Irena Budínová, Růžena Blažková

ROZVOJ KOMBINAČNÍHO MYŠLENÍ NA ZŠ

ÚLOHY Z KOMBINATORIKY

- Vyřešte následující úlohy.
- Pokuste se je rozdělit do kombinatorických kategorií.
- Pojmenujte strategii, kterou jste při řešení použili.
- Pokud vás jako první napadne řešení vzorcem, přemýšlejte nad tím, jak by postupoval žák.

ÚLOHY Z KOMBINATORIKY

- Máme 2 druhy pohlednic, chceme vybrat 4 pohlednice. Kolik je možností výběru?
- Kolik trojciferných čísel dělitelných 12 vytvoříme z číslic 0, 1, 3, 4, 5, 8, 9? Číslice se nesmějí v zápisu čísla opakovat.
- Kolik anagramů lze vytvořit z písmen slova MATEMATIKA?
- Ve společnosti je 10 osob. Podají si ruce každý každému. Kolik podání ruky to bude?

KOMBINAČNÍ MYŠLENÍ

- Kombinatorika není součástí Rámcového vzdělávacího programu na ZŠ. Přesto by se žáci na ZŠ měli setkávat s úlohami, které rozvíjí kombinační myšlení.
- Cílem přitom není předkládat žákům kombinatorické vzorce, které si mají pamětně osvojit, ale prostřednictvím úloh rozvíjet schopnost třídění a uspořádání množin objektů a schopnost postupného zobecňování.

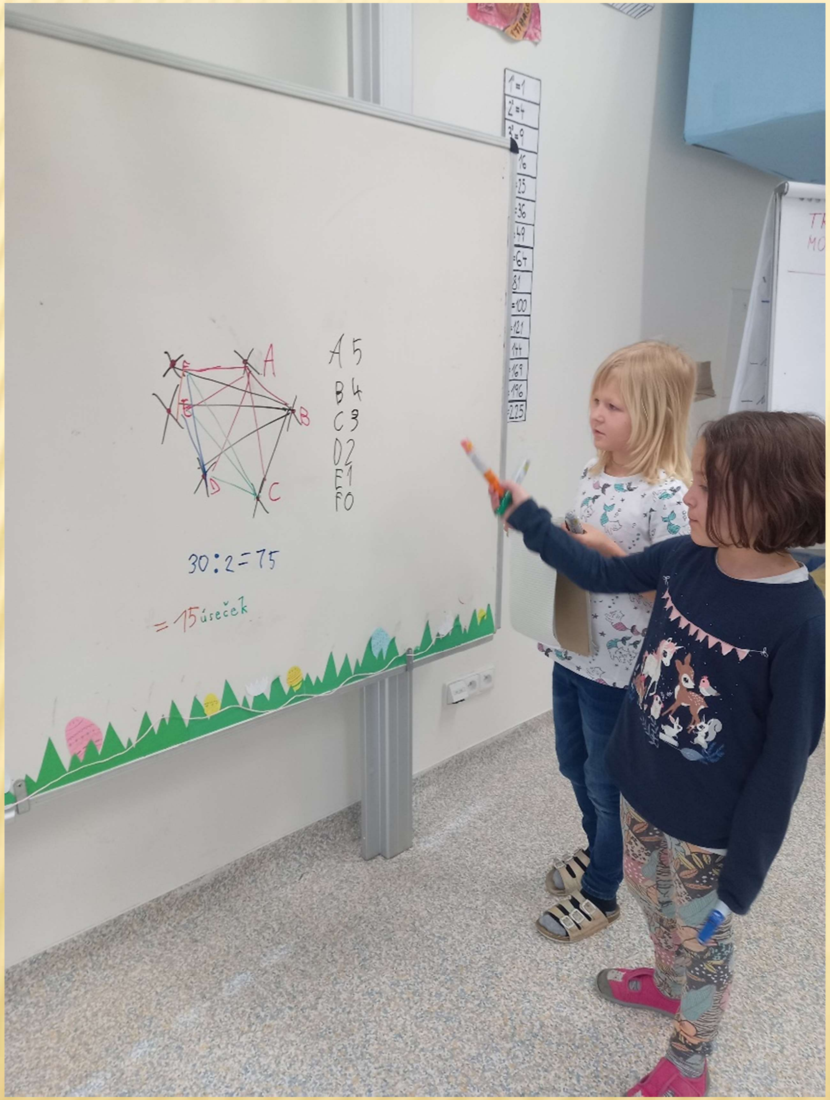
- Pod pojmem „kombinační myšlení“ na ZŠ tedy rozumíme:
  - schopnost uvědomovat si vztahy mezi zkoumanými objekty,
  - posoudit, zda vybrané skupiny jsou uspořádané či neuspořádané,
  - umět rozlišit, zda se ve skupinách prvky mohou nebo nemohou opakovat,
  - umět zobecňovat a najít pravidlo pro určení počtu skupin dané úlohy.

- Metodami práce na základní škole jsou především experiment s následným zobecněním a užití grafického znázornění.
- Učitel sám musí znát teoretickou podstatu, avšak žákům ji nesděluje, spíše žákům pomáhá sledovat a vyslovovat obecné zákonitosti.

UKÁZKA ŘEŠENÍ KOMBINATORICKÉ ÚLOHY VE 2. ROČNÍKU ZŠ

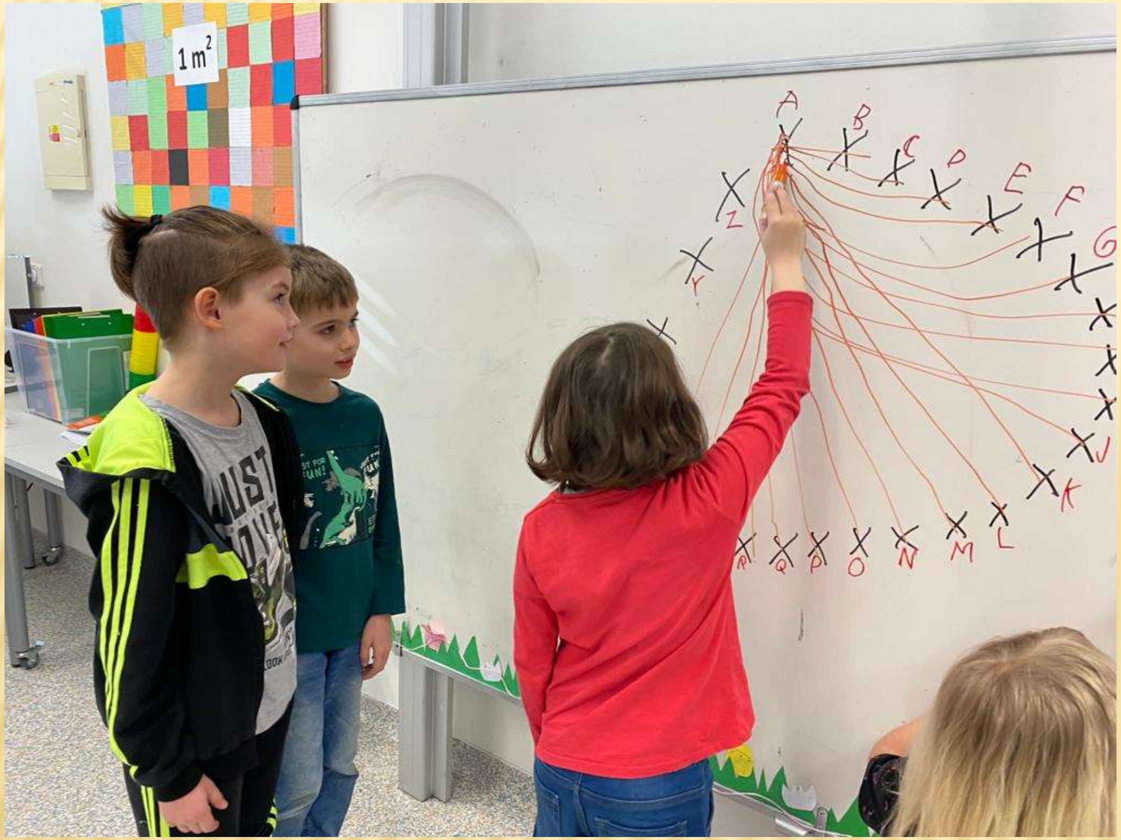
- Žákům byla zadána úloha:
- *Máme dáno 5 různých bodů A,B,C,D,E. Kolik různých úseček je těmito body dáno?*
- Problém č. 1: „Nevíme, co je úsečka.“
- Rozjezd vlažný, žáci se s podobným typem úlohy dříve nesetkali, nebyli si jisti tím, co a jak mají dělat.

UKÁZKA ŘEŠENÍ KOMBINATORICKÉ ÚLOHY



- Postupně však nacházeli systém, aktivita je začínala bavit, byli schopni zobecňování.

UKÁZKA ŘEŠENÍ KOMBINATORICKÉ ÚLOHY

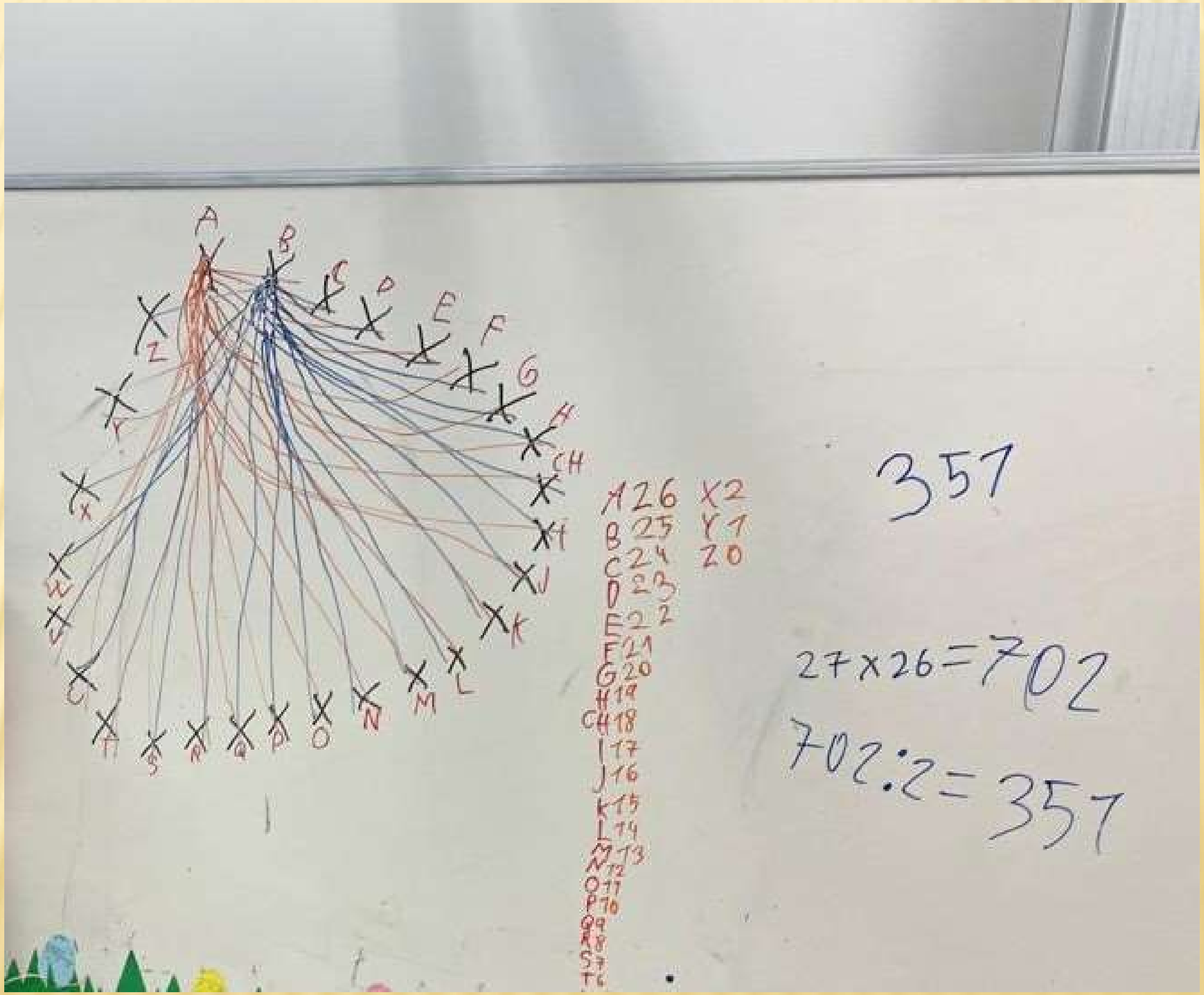


- Aktivita je pohltila, do následující hodiny si přidávali další a další body.

UKÁZKA ŘEŠENÍ KOMBINATORICKÉ ÚLOHY

- Byli schopni stále většího systému a zobecňování

UKÁZKA ŘEŠENÍ KOMBINATORICKÉ ÚLOHY: VELKÉ FINÁLE



KOMBINATORIKA

- Kombinatorika je matematická disciplína, která se zabývá rozdělováním, uspořádáváním, výběrem prvků z nějaké množiny.
- První kombinatorické poznatky můžeme najít již v nejstarších dochovaných textech ze staré Číny a Indie.
- Skutečná kombinatorika vzniká v 16. – 17. století v souvislosti s určením pravděpodobnosti výhry hazardních her a je spojena se jmény např. N. Tartaglii, B. Pascala, P. Fermata.

- K dalšímu vývoji kombinatoriky v 18. století přispěli zejména J. Bernoulli, G. W. Leibniz, L. Euler.
- V současné době se kombinatorika prudce rozvíjí, aplikace tzv. kombinatorické analýzy zahrnují, mimo jiné, ekonomické problémy. Výrazné je její využití v teorii pravděpodobnosti, statistice, teorii informací, lineárním programování apod. Kombinatorické metody hrají významnou roli v teoretické matematice, např. v teorii grup.

- Klasická kombinatorika se zabývá otázkou výběru a rozmístění prvků do tzv. konfigurací daných prvků do skupin s určitými vlastnostmi.
- Nejjednodušší typy konfigurací mají své specifické názvy – variace, permutace, kombinace.

ÚLOHY

- Úloha 1: *Čtverec o straně 4 jednotky je rozdělen rovnoběžkami se stranami na 16 jednotkových čtverců. Určete, kolik je v daném obrazci čtverců.*
- K řešení jsme využili komb. pravidlo součtu.
- Pravidlo součtu: Jestliže $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots p_n$ prvků a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků sjednocení těchto množin $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

- Úloha 2: *Určete počet všech dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.*
- K řešení úlohy jsme využili **kombinatorické pravidlo součinu.**
- **Pravidlo součinu:** Jestliže vybíráme uspořádané k-tice čísel, přičemž první člen můžeme vybrat n_1 způsoby, druhý n_2 způsoby, ... k-tý člen n_k způsoby, pak počet všech uspořádaných k-tic je roven $n_1.n_2...n_k$.

- *Kamarádi hrají tenis systémem každý s každým. Zvolte si postupně počet hráčů a sledujte, jak se mění počet zápasů v závislosti na počtu hráčů.*
- *V rovině je dáno 5 různých bodů, žádné tři z nich neleží na jedné přímce. Kolik různých přímek a kolik různých úseček je těmito body určeno?*

- *Kolik stran a úhlopříček má konvexní pětiúhelník?*
- *Kolik úhlopříček má pravidelný šestiúhelník (n-úhelník)?*
- *Ve společnosti je 12 osob. Podají si ruce každý každému. Kolik podání ruky to bude?*

- *Kolik způsoby si můžete vybrat z osmi různých zákusků dva různé zákusky?*
- *Jsou dány úsečky a = 6,4 cm, b = 4,7 cm, c = 50 mm, d = 32 mm. Vypočítejte obvody a obsahy všech obdélníků, jejichž stranami mohou být úsečky a, b, c, d.*
- *Zahradník vypěstoval 8 druhů růží. Kolik má možností výběru kytice ze tří druhů růží?*

- *V turnaji bylo sehráno 28 zápasů. Kolik družstev se turnaje zúčastnilo, jestliže hrál každý s každým právě jednou?*
- *Pět kamarádů A, B, C, D, E jelo stanovat. Měli jeden stan pro dvě osoby a jeden stan pro tři osoby. Kolika způsoby se mohli rozdělit?*
- *Kuželky jsou sestaveny do čtverce tak, že v každé řadě jsou tři kuželky. Při házení koulí můžeme shodit 0 až 9 kuželek. Kolik je všech možností shození kuželek?*

- *Šest kamarádek A, B, C, D, E, F se rozhodlo, že budou vytvářet všechny možné skupiny po jedné, po dvou, po třech, po čtyřech, po pěti. Jak se mohly rozdělit? Kolik různých skupin vždy mohly vytvořit?*
- *V rovině je dáno 7 různých bodů, z nichž žádné tři neleží v téže přímce. Kolik různých trojúhelníků je těmito body určeno?*

- *V rovině je dáno 9 různých bodů, z nichž žádnými třemi neprochází přímka a žádnými čtyřmi neprochází kružnice. Kolik různých kružnic je těmito body určeno?*
- *Jsou dány úsečky délek 6 cm, 4 cm, 3 cm, 8 cm, 2 cm, 5 cm. Kolik různých trojúhelníků můžeme pomocí těchto úseček sestrojit?*

KOMBINACE BEZ OPAKOVÁNÍ

- V předcházejících příkladech nezáleželo na pořadí prvků a prvky se neopakovaly.
- K-členná **kombinace** z *n* prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. K-členná kombinace z *n* prvků je k-prvková podmnožina *n*-prvkové množiny.

KOMBINAČNÍ ČÍSLO

- Symbol $\binom{n}{k}$ se nazývá kombinační číslo. Pro všechna celá nezáporná čísla *n*,*k*, *n*<*k* platí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Kombinační číslo se poprvé objevuje u L. Eulera v 18. století. Určuje počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.
- Pro každé přirozené číslo *n* definujeme *n* faktoriál takto: $n! = n(n-1)\ \ldots\ 2.1$, $0! = 1$

- *Kolik různých vlajek můžeme sestavit ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou-li k dispozici látky barev: červená, modrá, bílá, zelená, žlutá?*
- *Kolik různých dvoutónových signálů můžeme vytvořit ze čtyř tónů c, e, g, h?*

- *Kolik různých trojciferných čísel můžeme zapsat pomocí číslic 8, 7, 6, 5, 2, jestliže se každá číslice vyskytuje v zápisu čísla nejvýše jednou? Kolik z těchto čísel je sudých?*
- *Kolik různých čísel můžeme sestavit z číslic 3, 5, 4, 0, 9, jestliže se každá číslice vyskytuje v zápisu čísla nejvýše jednou? Kolik z nich je násobkem čísla 5?*

- *Osm spolužáků si slíbilo, že si o prázdninách pošlou pohlednice. Kolik pohlednic tak bylo rozesláno?*
- *Ve škole máme 10 vyučovacích předmětů, každý den máme 6 vyučovacích hodin. Každému předmětu se má vyučovat nejvýše jednu hodinu denně. Kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den?*

- *Kolik přirozených šesticiferných čísel, v jejichž zápisu jsou všechny číslice navzájem různé, lze zapsat pomocí všech deseti cifer desítkové soustavy?*

VARIACE BEZ OPAKOVÁNÍ

- V předcházejících příkladech záleželo na pořadí prvků, prvky se neopakovaly.
- K-členná variace z *n* prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.
- Počet všech k-členných variací z *n* prvků je:

$$V(k,n) = n.(n-1).(n-2). \ldots .(n-k+1)$$

- Platí: V(k,n) = n. V(k-1, n-1). Ověřte.
- Existuje vztah mezi vzorcem pro kombinace a variace. Odvoďte ho na následující úloze:
- Úloha 3: *Ze čtyř závodníků vybíráme trojici, která* a) *obdrží medaile*, b) *dostane zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili.*

PERMUTACE BEZ OPAKOVÁNÍ

- Permutace bez opakování jsou speciálním případem variací bez opakování.
- Žáci mohou tedy tyto úlohy řešit souběžně.
- Ovládají-li výpočty pro variace bez opakování, umí tím i permutace bez opakování.

- *Zapište všechna trojciferná čísla, v jejichž zápisu se vyskytují číslice 5, 3, 8, každá právě jednou.*
- *Kolik lichých čtyřciferných čísel lze sestavit z číslic 3, 4, 6, 7, jestliže se v zápisu čísla vyskytuje každá číslice právě jednou?*
- *Kolika způsoby můžeme rozesadit 8 dětí na jedné dlouhé lavici?*
- *Kolika způsoby můžeme rozesadit 8 dětí kolem kulatého stolu?*

- *Šest dětí se přesazuje ve školních lavicích každý den. Bude jim stačit na všechna možná rozesazení školní rok?*
- *Kolik způsoby můžeme posadit 10 hostů na 10 židlí?*
- *Kolik různých vět o sedmi slovech můžeme získat, máme-li k dispozici právě 7 různých slov? Pokuste se takovou větu sestavit.*

- Permutace z *n* prvků je uspořádaná *n*-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní vyskytuje každý prvek právě jednou.
- Permutace z *n* prvků je každá *n*-členná variace z těchto prvků.
- Počet permutací:

  $P(n) = V(n,n) = n.(n-1).(n-2). \dots . 3 . 2 . 1 = n!$
- Hodnoty faktoriálu rostou velmi rychle.

- *Král posílá 6 spěšných zpráv. Každý ze 3 poslů může doručit libovolnou z nich. Kolik je možností, jak může rozdělit dopisy mezi kurýry?*
- *Kolik značek Morzeovy abecedy je možno vytvořit, sestavíme-li tečky a čárky do skupiny o 1-4 prvcích?*
- *Kolik čtyřciferných čísel můžeme sestavit z číslic 3 a 6?*

- *Kolik pěticiferných čísel můžeme poskládat z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, pokud se cifry mohou opakovat?*
- *Kolik přirozených čísel menších než 10^5 lze zapsat pouze pomocí cifer 7 a 9?*

VARIACE S OPAKOVÁNÍM

- Předcházející příklady patří do kategorie variace s opakováním.
- K-členná variace s opakováním z *n* prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše k-krát.
- Počet variací s opakováním:

$$V'(k,n) = n^k$$

- *Kolika způsoby můžeme sestavit 5 vagonů, když ve třech vagonech je písek a ve dvou je cement?*
- *Kolik anagramů lze vytvořit z písmen slova MATEMATIKA?*
- *Určete počet všech anagramů, které lze vytvořit z písmen PARABOLA, požadujeme-li, aby se ve vytvořeném anagramu pravidelně střídaly samohlásky a souhlásky.*

- *Kolik různých anagramů můžeme získat ze slova ROKOKO, nesmějí-li v takovém anagramu stát všechna písmena O vedle sebe?*
- *Pro 8 studentů je připraveno ubytování ve 3 pokojích, z nichž dva jsou trojlůžkové, jeden dvojlůžkový. Kolik je způsobů rozdělení do jednotlivých pokojů?*
- *Matka má 2 stejná jablka, 3 stejné hrušky a 4 stejné pomeranče. Každý den dá synovi po jednom kousku ovoce. Určete, kolik je možností výdeje.*

PERMUTACE S OPAKOVÁNÍM

- Předcházející příklady patřily do kategorie permutace s opakováním.
- Permutace s opakováním z *n* prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní vyskytuje každý prvek alespoň jednou.

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots k_n!}$$

- Na následujícím příkladě ukažte, jaký existuje vztah mezi permutacemi a permutacemi s opakováním:
  - *Z číslic 1, 2, 3, 4 utvořte všechna čtyřciferná čísla.*

    Z číslic 1, 2 utvořte všechna čtyřciferná čísla.

- *U stánku prodávají tři druhy čokolád a Aleš chce koupit 5 čokolád. Kolik má možností nákupu?*
- *V sadě je 32 karet, 8 druhů, každá ve čtyřech barvách. Kolika způsoby můžeme vybrat 4 karty, jestliže: a) rozlišujeme jen barvy, b) rozlišujeme barvy i hodnoty karet?*
- *Mezi 6 dětí rozdělujeme 15 (stejných) tenisových míčků. Určete počet a) všech možných rozdělení, b) počet všech rozdělení, při kterých každé dítě dostane aspoň jeden míček.*

- *Máme 2 druhy pohlednic, z nich chceme vybrat 3 pohlednice. Kolik je možností výběru?*
- *Máme 2 druhy pohlednic, chceme vybrat 4 pohlednice. Kolik je možností výběru?*
- *Máme 12 druhů pohlednic. Kolika způsoby lze provést nákup 8 pohlednic, když jeden druh může být zakoupen vícekrát?*

KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM

- Předcházející úlohy spadají do kategorie kombinace s opakováním.
- Jedná se o nejnáročnější příklady. Na ZŠ proto volíme úlohy tak, aby je žáci mohli řešit intuitivně.
- K-členná kombinace s opakováním z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše k-krát.

- Počet kombinací s opakováním:

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$$

- Toto číslo také udává, kolika způsoby můžeme rozmístit *k* identických předmětů do *n* přihrádek.

ZAŘAZOVÁNÍ KOMBINATORICKÝCH ÚLOH DO UČIVA ZŠ

- Kombinatorické úlohy lze zařazovat průběžně do různých tematických celků od 6. ročníku:
- Numerace a početní výkony v oboru přirozených čísel
  - *Kolika způsoby můžeme zaplatit 50 Kč pomocí mincí: 20 Kč, 20 Kč, 5 Kč, 2 Kč?*
  - *Doplňte mezi čtyři dvojky závorky a znaménka +, -, . , : tak, abyste dostali výsledek 1.*

- Dělitelnost v oboru přirozených čísel
  - *Určete všechny dělitele čísla 2730.*
  - *Kolik trojciferných přirozených čísel sestavených z číslic 0, 1, 2, 3, 5 je dělitelných pěti?*
- Algebraické výrazy
  - Pascalův trojúhelník, binomická věta

LITERATURA

- Calda, E., Dupač, V.: Matematika pro gymnázia. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Praha: Prometheus, 1993.
- Divíšek, J., Dřízal, V., Koman, M.: Matematika pro 5. ročník ZŠ. Doplňující text pro třídy s rozšířenou výukou matematiky a přírodovědných předmětů. Praha: Prometheus, 1991.