

Irena Budínová, Růžena Blažková

# **STATISTIKA A PRAVDĚPODOBNOST NA ZŠ**

# AKTIVITY Z PRAVDĚPODOBNOSTI (ZŠ)

- ✘ Házejte dvěma kostkami a zapisuje součet, který na kostkách padl.
- ✘ Vytáhněte z pytlíku vždy dvě kuličky a zapisujte, jaké barvy (světlá či tmavá) jste vytáhli.
- ✘ Z cifer 0 až 9 vytahujte náhodně vždy dvě cifry a zapisujte číslo, které bylo taženo ( $02=2$ ).

# ÚKOLY K AKTIVITÁM

---

- ✘ Určete pravděpodobnost, že na dvou kostkách padne součet a) 3, b) 7.
- ✘ Určete pravděpodobnost, že z pytlíku vytáhneme jednu světlou a jednu tmavou kuličku.
- ✘ Určete pravděpodobnost, že vylosované číslo je buď dělitelné 8, nebo mocninou čísla 2.



# ÚLOHA Z PRAVDĚPODOBNOSTI

- ✘ Tenista má první podání úspěšné s pravděpodobností 0,6 a druhé podání má úspěšné s pravděpodobností 0,8. S jakou pravděpodobností se tento tenista dopustí dvojchyby?

# STATISTIKA

---

- ✘ Původ slova „statistika“ pochází z latiny (status – stát) a nejprve představovala nauku o státu. Blíže k dnešnímu pojetí statistiky měla tzv. anglická politická aritmetika (zakl. J. Graunt a W. Petty), která se zabývala shromažďováním číselných údajů o ekonomických a demografických jevech.
- ✘ Počátky moderní statistiky jsou kladeny do 19. století a jsou spojovány se jménem Belgičana Adolfa Quételeta, který se zabýval číselně vyjádřitelnými vlastnostmi společnosti.

- 
- ✘ Další význam pro rozvoj statistiky mělo založení anglické statistické školy (aplikace v biologii, zemědělství – F. Galton, K. Pearson, R. A. Fischer). Na vývoji metod matematické statistiky mají od počátku 20. století významný podíl B. Gosset (pseudonym Student), P. Čebyšev, A. Ljapunov, A. Markov, Kolmogorov, Bernstejn, Romanovskij a další.
  - ✘ Ve vývoji statistika nastala významná proměna ve 30. letech, kdy vzniká moderní, analytická, indukční statistika, jejímž základním pojmem je výběr. S použitím matematických metod se stala samostatným vědním oborem.



# ZÁKLADNÍ POJMY

---

- ✘ Statistika je vědní obor, který se zabývá hromadným zkoumáním, pozorováním či šetřením určitých objektů a jevů.
- ✘ Statistika je soubor metod, které nám umožňují činit různá rozhodnutí, založená na pozorování, porovnávání, posuzování a zhodnocení množství informací.

- 
- ✘ Statistické šetření se provádí na statistickém souboru. Statistický soubor je množina – skupina prvků (objektů, osob, událostí aj.), které mají společné vlastnosti.
  - ✘ Rozlišujeme statistické soubory základní a výběrové. Vymezení základního souboru může někdy přinášet problémy, šetření na celém souboru může být časově náročné nebo i nemožné, proto v praxi používáme soubor výběrový (podmnožina statistického souboru). Tento soubor by měl vypovídat o základním souboru, z kterého byl odvozen (jinak dochází ke zkreslení výsledků).



- 
- ✘ Statistický soubor lze rozdělit na dvě části: Na část, ve které nastává zkoumaný jev a část, ve které zkoumaný jev nenastává. Základním statistickým úkonem je třídění, které provádíme podle jistých kritérií (rozklad množiny na třídy).
  - ✘ Respektujeme zásadu úplnosti (každý prvek statistického souboru musí být v některé třídě), a zásadu jednoznačnosti (žádný prvek nesmí být současně ve dvou třídách). Třídění může být dichotomické, trichotomické, obecně multitonické (např. hledání v klíči pro určování rostlin).

- 
- ✘ Prvky statistického souboru se nazývají statistické jednotky. Počet jednotek statistického souboru se nazývá rozsah souboru.
  - ✘ Každá statistická jednotka je nositelem určitých vlastností. Ty vlastnosti, které jsou důležité z hlediska účelu provádění určitého statistického zkoumání, se nazývají statistické znaky. Statistické jednotky tedy vyšetřujeme z hlediska určitého znaku nebo několika znaků, které si zvolíme.



- 
- ✘ Statistické znaky dělíme na kvantitativní (číselné) a kvalitativní (slovní).
  - ✘ Některé kvantitativní znaky mohou nabývat pouze jednotlivých izolovaných hodnot - diskrétní znaky (např. počet obyvatel obce), nebo nabývají libovolných reálných hodnot z určitého intervalu – spojité znaky (např. hektarové výnosy).
  - ✘ V případě, že kvantitativní znak nabývá pouze dvou variant, hovoříme o znaku alternativním (např. muž, žena), nabývá-li více variant, hovoříme o znaku multiplikativním (např. kvalifikace, státní příslušnost).



- 
- ✘ Číslo, které udává, kolikrát se daná hodnota znaku ve statistickém souboru vyskytuje, se nazývá absolutní četnost hodnoty znaku. Součet jednotlivých četností sledovaného znaku je roven rozsahu souboru.
  - ✘ Poměrná – relativní četnost jevu je poměr absolutní četnosti a rozsahu souboru. Součet relativních četností je roven jedné. Relativní četnosti lze vyjadřovat také v procentech, pak je jejich součet 100 %.

- 
- ✘ Úloha: K následujícím statistickým souborům určete statistickou jednotku a statistické znaky:
    - + Všichni žáci třídy
    - + Všechny dopravní prostředky, které projedou kolem určitého stanoviště
    - + Všechny hody hrací kostkou
    - + Všechna slova na jedné straně knihy
    - + Všechny dopravní nehody v jednom roce v ČR

# DIAGRAMY

---

- ✘ Rozdělení četností znaků vyjadřujeme buď v tabulce nebo graficky pomocí diagramů. Diagram vyjadřuje vzájemný vztah mezi dvěma či více proměnnými veličinami pomocí přehledných grafických symbolů. Rychle a názorně poskytne obrazovou informaci o studovaném jevu.
- ✘ Rozlišujeme diagramy obrázkové, bodové, sloupkové (histogramy), hůlkové (úsečkové), spojnicové (polygon četností), kruhové.



# CHARAKTERISTIKY POLOHY

- ✘ Aritmetický průměr je definován jako podíl součtu hodnot znaku zjištěných u všech jednotek souboru a počtu všech jednotek souboru:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

---

## ✘ Vlastnosti aritmetického průměru:

- + Matematické vyjádření aritmetického průměru je jednoduché a snadno použitelné pro odvození dalších vztahů.
- + Výpočet je založen na všech pozorovaných hodnotách.
- + Součet všech odchylek jednotlivých hodnot od aritmetického průměru je vždy roven nule.
- + Aritmetický průměr je ovlivňován krajními hodnotami.

- ✘ Modus znaku  $x$  je hodnota s největší četností. Udává, který výsledek je zastoupen nejvíce, nepodává informace o krajních hodnotách.
- ✘ Medián je prostřední hodnota znaku, jsou-li hodnoty uspořádány podle velikosti.
- ✘ Harmonický průměr můžeme využít např. při výpočtu průměrné rychlosti.

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$



- 
- ✘ Úloha: Automobil jede do kopce průměrnou rychlostí 50 km/h, s kopce průměrnou rychlostí 120 km/h. Délka dráhy do kopce je stejná jako s kopce. Jaká byla jeho průměrná rychlost na celé dráze?

- ✘ Geometrický průměr se používá např. při výpočtu průměrného tempa růstu za jedno období.

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

- ✘ Úloha: Hrubý domácí produkt (HDP) nějaké země měl v následujících pěti letech následující vývoj: +5 %, +4 %, +1 %, -1 %, +2 %. Jaký je průměrný růst HDP?

- ✘ Úloha: Vypočítejte délku hrany krychle, která má stejný objem jako kvádr o rozměrech  $a, b, c$ .
- ✘ Vždy platí, že geometrický průměr je menší nebo roven než aritmetický průměr.
- ✘ Vážený průměr se používá např. při řešení slovních úloh o směsích nebo výpočtu průměrné známky žáka.

$$\bar{x}_v = \frac{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n}{v_1 + \dots + v_n}$$



# ZÁKLADY STATISTIKY NA ZŠ

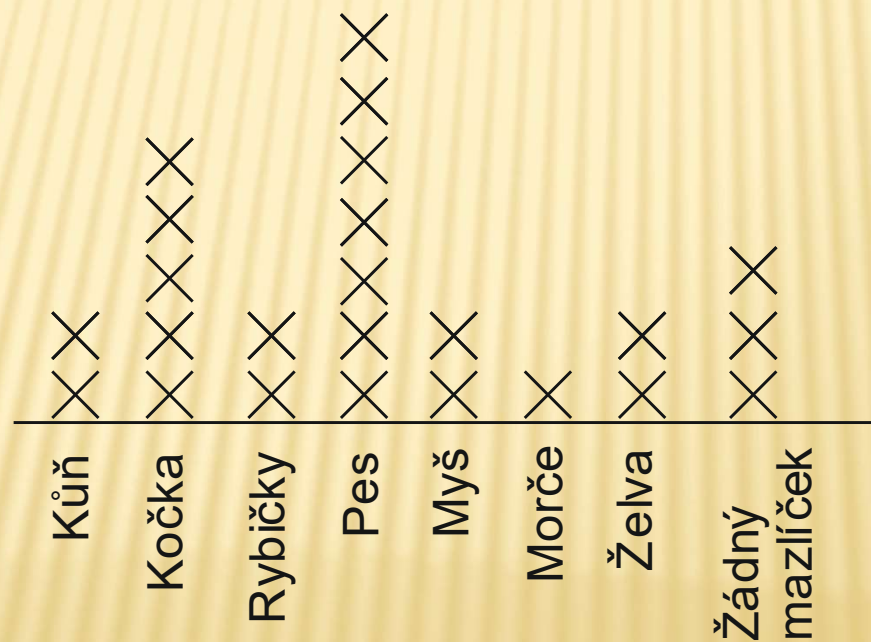
---

- ✘ Žáci by se na ZŠ měli setkat se statistikou ve formě zpracování dat. Na konkrétních příkladech se učí potřebné pojmy, učí se data zaznamenávat do tabulek a diagramů.
- ✘ Pracují s programem MS Excel a rovněž s Internetem.

- ✘ Příklad: zaznamenávají domácí mazlíčky všech žáků třídy. Mohou je zapsat do tabulky:

Kůň	//
Kočka	###
Rybičky	//
Pes	####//
Myš	//
Morče	/
Želva	//
Žádný mazlíček	///

- ✘ Data je také možné zaznamenat do obrázkového diagramu, kde je každá položka znázorněna jedním křížkem.

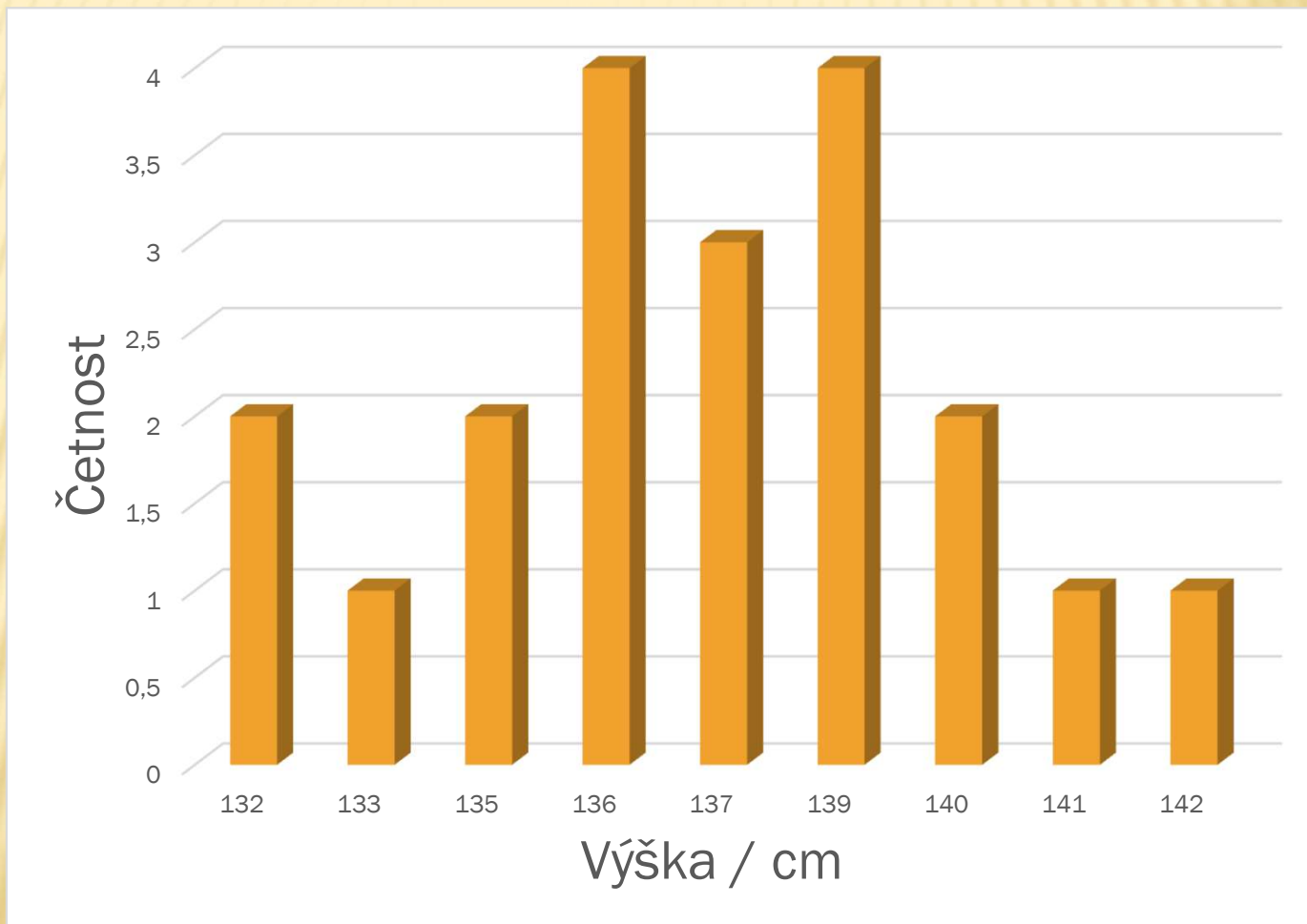




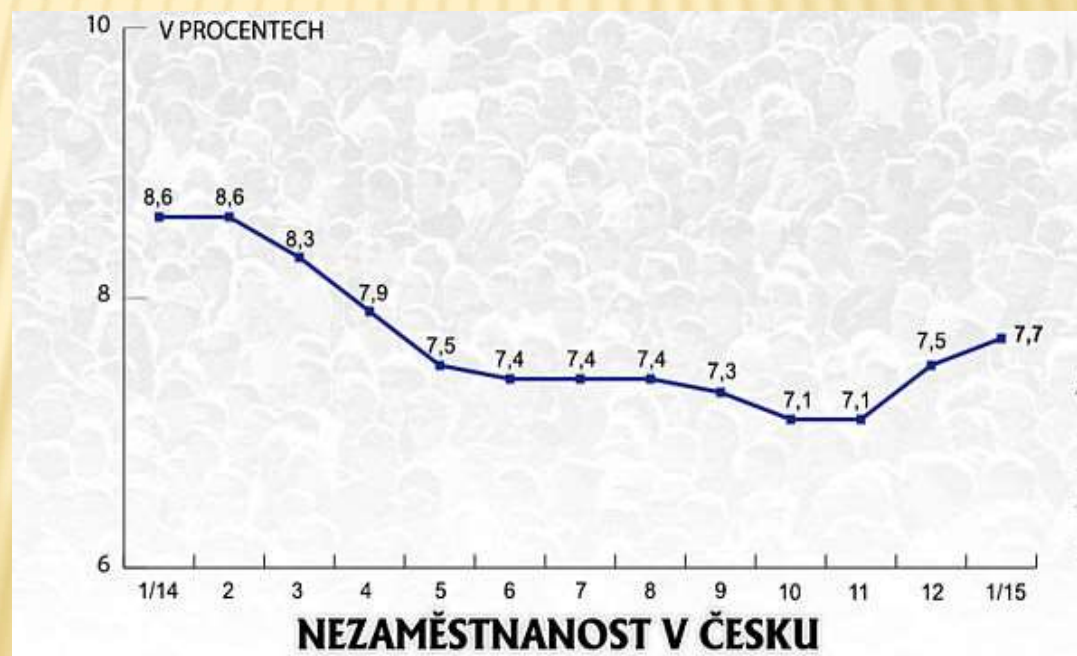
- ✘ Žáci jsou schopni z tabulky či diagramu určovat různé charakteristiky souboru: absolutní četnosti a relativní četnosti jednotlivých jevů.
- ✘ Úloha: Ve třídě s 20 žáky byly naměřeny následující tělesné výšky žáků. Určete, co je statistický soubor, statistické jednotky, statistický znak a vytvořte tabulku relativních četností.

Výška / cm	132	133	135	136	137	139	140	141	142
Četnost	2	1	2	4	3	4	2	1	1

✘ Údaje zaznamenáme do histogramu.



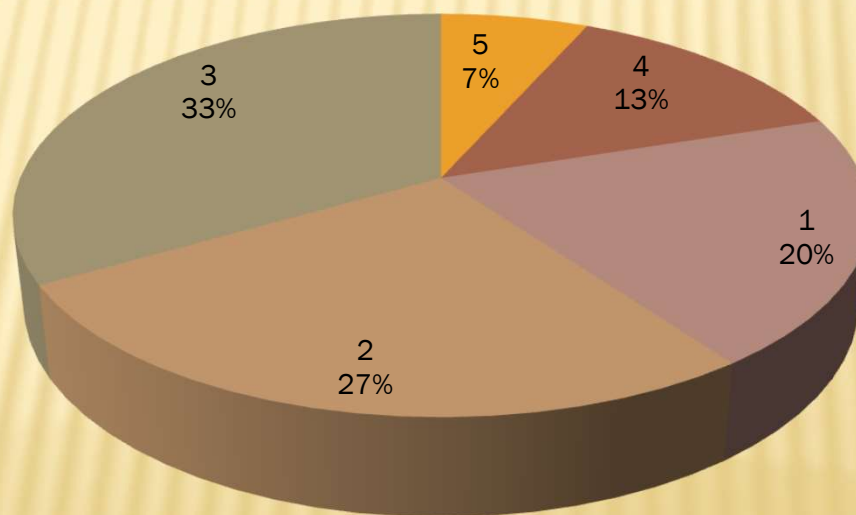
- ✘ Spojnicový diagram se nejlépe hodí na průběžně se měnící data, např.:
- ✘ Příklad: Na následujícím spojnicovém diagramu vidíme vývoj nezaměstnanosti v ČR od ledna 2014 do ledna 2015. Nezaměstnanost je uvedena v procentech.





- ✘ Kruhový diagram dobře slouží, chceme-li opticky porovnat procentuální zastoupení jednotlivých položek. Např. následující kruhový diagram znázorňuje zastoupení známek z písemky z matematiky v jedné třídě:

Výsledky písemné práce



# ZÁKLADY PRAVDĚPODOBNOСТИ NA ZŠ

- ✘ Úvahy o náhodě spadají do renesance, kdy obchodníci a finančníci chtěli znát míru rizika nebo zisku zamýšlených obchodních transakcí. Také Galileo Galilei se zajímal o míru přesnosti svých, mnohokrát opakovaných pokusů.
- ✘ Hazardní hráči tušili, že do her zasahuje kromě osudu a podvodů také něco zákonitého. Právě hazardní hry měly rozhodující vliv na vývoj nové disciplíny – teorie pravděpodobnosti.

- 
- ✘ Počátky jsou spojeny se jménem Luca Paciolo (1445 - 1514), o rozvoj teorie pravděpodobnosti se zasloužili Girolamo Cardano (1501 - 1576), Galileo Galilei (1564 - 1642), Blaise Pascal (1623 - 1662), Pierre de Fermat (1601 - 1665), Christiaan Huyghens (1629 - 1695), Jacob Bernoulli (1654 - 1705).
  - ✘ Klasickou definici pravděpodobnosti vyslovil Abraham Moivre (1667 - 1754) a zdokonalil Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827).



- 
- ✘ Teorie pravděpodobnosti proniká do mnoha dalších vědních oborů – teorie her, teorie informací, kybernetiky, psychologie, sociologie, pojišťovnictví, finančnictví, statistiky, biologie, zemědělství aj.
  - ✘ Základy pravděpodobnosti jsou důležité pro každého člověka. Je potřebné umět odhadnout, jaká je pravděpodobnost např. výhry v loterii či výhry na výherním automatu.

# PROPEDEUTIKA PRAVDĚPODOBNOSTI

- ✘ Na základní škole jde zejména o rozvoj pravděpodobnostního myšlení. Při výuce pravděpodobnosti bychom měli respektovat dvoustupňový přístup.
- ✘ V první části uvádět kvalitativní hodnocení – úsudky o pravděpodobnosti některých jevů.
- ✘ Ve druhé etapě provádět kvantitativní ohodnocení, uvést pravděpodobnost jako číslo.  
Pravděpodobnost chápeme v klasickém slova smyslu a uvádíme ji jako poměr počtu jevů příznivých ku počtu všech možných jevů

- × Příklad: Následující jevy umísťujte na pravděpodobnostní osu.
  - + V únoru bude sněžit.
  - + Prase bude létat.
  - + 1. 5. bude zavřená škola.
  - + Autobus nezastaví na zastávce.
  - + Slunce bude svítit o půlnoci.
  - + Při házení šesti kostkami nastane jev:
    - × padnou všechny počty ok, tzv. postupka
    - × alespoň na dvou kostkách padne stejný počet ok
    - × nenastane žádný z jevů A, B
    - × padne součet 7



# ZÁKLADNÍ POJMY

---

- ✘ Náhoda je něco, co nemůžeme ovlivnit.
- ✘ V praktických činnostech, ve vědě nebo ve výzkumu se často setkáváme s pokusy, které i při dodržení předepsaných podmínek mohou vést k různým výsledkům, výsledky těchto pokusů se mohou od jednoho provedení pokusu k provedení druhého měnit.
- ✘ Výsledky těchto pokusů závisí nejen na předepsaných podmínkách, ale také na náhodě. Nazýváme je náhodné pokusy.

- 
- ✘ Uvažujme, že u každého náhodného pokusu jsme schopni předem určit všechny jeho možné výsledky, a to tak, že se navzájem vylučují, tj. nastane-li jeden, nenastane druhý a že jeden z nich nastane vždy.
  - ✘ Množinu všech takto stanovených výsledků nazýváme množina všech možných výsledků pokusu a značíme ji  $\Omega$ . Prvky této množiny značíme  $\omega$ .

- 
- ✘ Podmnožiny množiny všech možných výsledků nazýváme jevy. Označujeme je zpravidla písmeny  $A, B, C, \dots$
  - ✘ V daném pokusu můžeme rozlišit tolik jevů, kolik má množina všech možných výsledků podmnožin.
  - ✘ Prázdná množina charakterizuje jev nemožný, množina  $\Omega$  charakterizuje jev jistý.



- 
- ✘ Pravděpodobnost  $P(A)$  jevu  $A$  je definována jako součet pravděpodobností příznivých jevu  $A$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m}$$

kde  $m(A)$  je počet výsledků příznivých jevu  $A$  a  $m$  je počet všech možných výsledků.

- 
- ✘ Pravděpodobnost jevu nemožného je rovna nule:  $P(\emptyset) = 0$
  - ✘ Pravděpodobnost jevu jistého je rovna jedné:  $P(\Omega) = 1$
  - ✘ Pro pravděpodobnost libovolného jevu  $A$  platí:  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

# SČÍTÁNÍ PRAVDĚPODOBNOSTÍ

- ✘ Pravděpodobnost sjednocení dvou navzájem vylučujících se jevů je rovna součtu pravděpodobností těchto jevů:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ jestliže } A \cap B = \emptyset.$$

- ✘ Pravděpodobnost sjednocení jevů, které se navzájem nevylučují, tj.  $A \cap B \neq \emptyset$ , je rovna

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- ✘ Pravděpodobnost jevu opačného je rovna rozdílu  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .



# NEZÁVISLOST JEVŮ

---

- ✘ Nezávislostí dvou jevů rozumíme to, že nastání jednoho jevu nemá vliv na nastání nebo nenastání druhého jevu.
- ✘ Matematicky to vyjádříme tak, že pravděpodobnost současného nastání nezávislých jevů je rovna součinu jejich pravděpodobností:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- 
- ✘ Úkol: Najděte příklady pravděpodobnosti sjednocení jevů (slučitelných i neslučitelných) a pravděpodobnosti nastání dvou nezávislých jevů. Vypočtete pravděpodobnost nastání takového jevu.

# ÚLOHY

---

- ✘ Určete množinu všech možných výsledků, jestliže házíte:
  - + třemi rozlišitelnými mincemi,
  - + dvěma rozlišitelnými hracími kostkami.
- ✘ Jaká je pravděpodobnost že ze součtů, které mohou padnout při hodu dvěma kostkami, hodíme součet, který je dělitelný třemi?



---

✘ Z osudí, ve kterém je 10 kuliček červených a 5 kuliček modrých vybíráme

+ jednu modrou kuličku,

+ dvě modré kuličky,

+ jednu červenou nebo modrou kuličku.

Vypočítejte pravděpodobnosti těchto jevů.

✘ Ze skupiny pěti mužů a tří žen má být vybrána dvojice, ve které jsou:

+ Jeden muž a jedna žena

+ Dva muži

---

✘ Máme tři osudí. V prvním jsou 2 žluté, 3 červené a 1 černá kulička, ve druhém jsou 3 žluté a jedna černá kulička, ve třetím 3 červené, 1 modrá, 1 černá kulička. Náhodně vybereme jedno osudí a jednu kuličku. Znázorněte pomocí stromu a vypočítejte pravděpodobnosti, že bude vybrána:

- + Modrá kulička
- + Černá kulička
- + Červená kulička
- + Žlutá kulička

# LITERATURA

---

- ✘ Bílková, D., Budinský, P., Vohánka, V.: Pravděpodobnost a statistika. Plzeň, A.Čeněk, 2009.
- ✘ Budíková, M., Mikoláš, Š., Osecký, P.: Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika. Brno: MU 2001.
- ✘ Calda, E., Dupač, V.: Matematika pro gymnázia. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Praha: Prometheus, 1993.
- ✘ Kuřina F. a kol.: Matematika a porozumění světu. Praha: Academia, 2009.
- ✘ Kuřina, K., Půlpán, Z.: Podivuhodný svět elementární matematiky. Praha: Academia, 2006.
- ✘ Mareš, M.: Příběhy matematiky. Příbram: Pistorius, Olšanská, 2008.
- ✘ Plocki, A.: Pravděpodobnost kolem nás. Ústí nad Labem: UJEP, 2001
- ✘ Plocki, A., Tlustý, P.: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé. Praha: Prometheus, 2007.