**Rekreační matematika – cvičení 6**

**Narozeninový paradox**

Určete minimální velikost skupiny, ve které je pravděpodobnost nalezení alespoň jedné dvojice se stejným datem narození (den a měsíc) alespoň 50 %.

Řešení:

Spočítejme si pravděpodobnost, že bude mít každý se skupiny osob narozeniny jiný den. Pravděpodobnost, že budou mít alespoň dvě osoby narozeniny ve stejný den, spočítáme jako doplněk do 100 %.

Uvažujme libovolnou osobu. Pokud k ní přidáme osobu druhou, má tato druhá osoba narozeniny v jiný des s pravděpodobností $p=^{364}/\_{365}$, jeden den z roku už je totiž „zabraný“ první osobou. Teď jsou již zabrané dny dva, pokračujeme stejnými úvahami např. pro 5 osob dostáváme:

$$p=\frac{365}{365}∙\frac{364}{365}∙\frac{363}{365}∙\frac{362}{365}∙\frac{361}{365}=\frac{365∙364∙363∙362∙361}{365^{5}}=\frac{365!}{365^{5}∙\left(365-5\right)!}\~97 \%$$

Obecně můžeme zapsat $p=\frac{365!}{365^{n}∙\left(365-n\right)!}$. Hodnota tohoto výrazu poměrně rychle klesá (a tím stoupá pravděpodobnost narozenin ve stejný den), například pro $n=10 \rightarrow p=88 \%$, pravděpodobnost stejných narozenin je 12 %. Poprvé stoupne pravděpodobnost narozenin ve stejný den nad 50 % pro 23 osob (50,7 %). Pro vyšší počet osob pravděpodobnost dál rychle roste, např. pro 50 osob už je tato pravděpodobnost 97 %.

**Hypochondrův problém**

Ondřej Hypoch dostal od lékaře balení 48 prášků. Celé balení musí vypotřebovat za 30 dní, přičemž každý den si musí vzít alespoň jeden prášek. V příbalovém letáku se ovšem vyskytovala dvě zneklidňující upozornění. Pokud v některých po sobě jdoucích dnech pacient užije právě 18 prášků (každý den polyká pacient všechny prášky najednou), vypadají mu všechny zuby. Navíc pokud pacient užije v některých po sobě jdoucích dnech právě 11 prášků, upadnou mu palce u rukou. Otázka zní, zda se bude moci Ondřej po skončení léčby kousnout do palce. Předpokládejme, že Ondřej udělá vše pro to, aby mu zůstaly palce i zuby.

Řešení:

Zuby může vyřešit například tak, že si prvních 15 dnů bude brát po jednom prášku, 16. den si vezme 19 prášků a dalších 14 si vezme opět vždy po jednom prášku.

S palci je to horší. Označme $p\_{1}$ počet prášků, které Ondřej spolykal za první den, $p\_{2}$ počet prášků spolykaných za první dva dny a tak dále. Platí: $0<p\_{1}<p\_{2}<…<p\_{30}=48$. Přičteme-li ke každé hodnotě číslo 11 následovně: $11<p\_{1}+11<p\_{2}+11<…<p\_{30}+11=59$, nerovnosti zřejmě zůstanou zachovány. Pokud by Ondřej spolykal v některých 11 po sobě jdoucích dnech právě 11 prášků, muselo by se některé číslo $p\_{i}$ rovnat některému číslu $p\_{j}+11$. To se ovšem nutně stane, protože zeleně označených hodnot je právě 60, všechny jsou celočíselné kladné a nejvyšší z nich je hodnota 59. Proto musí být alespoň jedna hodnota z první řady rovna alespoň jedné hodnotě z druhé řady a Ondřej přijde o palce u rukou.

Odpověď tedy zní kladně, avšak bude se moci kousnout pouze do palce u nohy.

**Zrádné kostky (Kabinet matematických kuriozit)**

Anička vyzvala Pepu ke hře v kostky. Její tři kostky, se kterými chtěla hrát, však nebyly úplně obyčejné. Na červené kostce se nacházela čísla 3, 3, 4, 4, 8 a 8, na žluté kostce 1, 1, 5, 5, 9 a 9 a na modré kostce 2, 2, 6, 6, 7 a 7. Aby měl Pepa výhodu, nabídla mu Anička, aby si jako první vybral nejlepší kostku, sama si pak vybrala ze zbylých dvou kostek. Hráli 3 dny a 3 noci s jediným pravidlem: kdo hodí vyšší hodnotu, vyhrává dané kolo. Jakou kostku si má Pepa vybrat?

Řešení:

Anička je mazaná, ať si Pepa vybere jakkoli, ona si pak může vybrat výhodnější kostku. Platí totiž, že mezi modrou a žlutou kostkou je pravděpodobnější vítěz modrá kostka, mezi žlutou a červenou je to žlutá kostka a mezi červenou a modrou má větší šanci na výhru kostka červená. Pro lepší znázornění si stačí zakreslit jednoduchou tabulku výher pro jednotlivé dvojice kostek.

**Krájení dortu (Truhlice matematických pokladů)**

Na jaký nejvyšší počet kousků mohu rozkrojit dort pomocí nejvýše 5 řezů?

Řešení:

1 řez -> 2 kousky

2 řezy -> 4 kousky

3 řezy -> 7 kousků

4 řezy -> 11 kousků

5 řezů -> 16 kousků

Obecně n řezů -> 0,5n(n+1)+1 kousků

**Kavárna (777 matematických her a zábav)**

V kavárně bylo 12 lidí, kteří se posadili ve skupinkách ke stolům. Každý z nich při odchodu podal ruku všem osobám, které seděly u jeho stolku. Celkem si vyměnili 19 podání ruky. U kolika stolů hosté seděli a kolik jich sedělo u každého ze stolů?

Řešení:

Spočítejme si, kolik podání ruky proběhne u stolu, kde sedí 2, 3, 4, nebo více osob. Pokud jsou u stolu dvě osoby, proběhne pouze jedno podání rukou. Pokud jsou 3 osoby, proběhne 2+1 podání rukou – když odchází první host, podá ruku dvěma osobám, dál je situace stejná jako u stolu s dvěma osobami.

2 osoby 1

3 osoby 2+1=3

4 osoby 3+2+1=6

5 osob 4+3+2+1=10

6 osob 5+4+3+2+1=15

7 osob 6+5+4+3+2+1=21

Nyní už jen potřebujeme určit správnou kombinaci počtu osob u stolů, aby proběhlo 19 podání ruky. Správné rozmístění hostů je jeden stůl pro 3, jeden stůl pro 4 a jeden stůl pro 5 osob.

**Ulice New Yorku (777 matematických her a zábav, upraveno)**

Manhattan má velmi pravidelné uspořádání ulic, které v některých místech tvoří téměř perfektní obdélníkovou síť. Ulice probíhající vzájemně rovnoběžně ve východo-západním směru jsou označeny St. (Street), ulice k nim kolmé se značí Av. (Avenue). Kolika cestami je možné projít mezi bloky domů, jestliže stojíte na rohu 14. St. a 5. Av. a chcete se dostat na roh 18. St. a 5. Av.? Cestou se nikdy nevracíte, to znamená, že postupujete zásadně na sever nebo východ.

Řešení:

Nakreslete si mapu a postupně od levého dolního rohu číslujte pro každou křižovatku počet cest, kolika se do ní lze dostat. Takto se dopracujete až k pravému hornímu rohu, kam se můžete dostat 70 způsoby.