# 1.2. Kinematika hmotného bodu

Po matematické přípravě už můžeme začít s první kapitolou, kinematikou. Tato část fyziky se zabývá **popisem pohybu těles**, aniž by se ptala proč k pohybu dochází. Jak je ve fyzice častým zvykem, budeme studovat ne pohyb konkrétního objektu, tělesa, ale budeme sledovat pohyb hmotného bodu. Situaci tím zjednodušujeme, nahrazujeme reálné těleso modelem - hmotným bodem.

## 1.2.1. Hmotný bod, mechanický pohyb

1. Umět vysvětlit pojem hmotného bodu.
2. Uvést konkrétní příklady, kdy těleso lze nahradit hmotným bodem.
3. Znát definici vztažné soustavy, umět ji zvolit v konkrétním případě.

**Hmotný bod** je myšlený bodový objekt, kterým nahrazujeme skutečné těleso. Hmotný bod má stejnou hmotnost jako těleso a představujeme si ho umístěný do jeho těžiště.

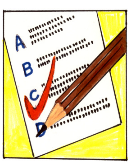
Toto zjednodušení lze použít, jsou-li rozměry tělesa zanedbatelné vůči vzdálenostem po kterých se pohybuje. Jedoucí auto vzhledem ke kilometrovým vzdálenostem, letící kámen, nebo dítě na řetízkovém kolotoči lze přibližně považovat za hmotné body.

Příklady na hmotný bod v předchozím odstavci vždy ukazovaly těleso v pohybu. Zastavme auto. Jeho poloha se nemění vůči okolí. Říkáme, že objekt je v klidu. Ale auto se přesto pohybuje spolu se Zemí – otáčí se s ní, pohybuje se s ní vůči Slunci atp. **Klid těles je vždy relativní, absolutní klid neexistuje.** Označím-li těleso za klidné, musím vždy uvést, vzhledem k čemu je v klidu.

Stejný problém je i s pohybem. Auto jede po silnici devadesátikilometrovou rychlostí. To je rychlost vůči silnici. Ale sledujeme-li jeho rychlost například vůči Slunci, musíme ještě přidat rychlost pohybu Země atd. Z této úvahy opět vyplývá závěr, že **pohyb těles je** také **vždy relativní.**

Vidíme, že popis klidu i pohybu vždy závisí na tom, k jakým tělesům jej vztahujeme. Volíme tedy soustavu těles, ke kterým vztahujeme pohyb nebo klid sledovaného tělesa - volíme tzv. **vztažnou soustavu**.

Nejčastěji vztahujeme pohyb k povrchu Země. Ale nemusí tomu tak být vždy. Například jdeme-li uličkou v jedoucím vlaku, pak může být vztažnou soustavou vagon, nebo povrch Země.



**TO 1.2.-1** *Které z uvedených těles můžeme považovat za hmotný bod?* Míč vystřelený na branku, míč v rukou brankáře, běžící závodník při dálkovém běhu, rotující kulička na stole, umělá družice Země.

**TO 1.2.-2** *Co znamená, že klid a pohyb jsou relativní?*

**TO 1.2.-3** Sedíte v jedoucím autě. *Jste v klidu nebo v pohybu?* Uvažujte dvě různé vztažné soustavy.

## 1.2.2. Polohový vektor, trajektorie, dráha

1. Umět zapsat polohu hmotného bodu pomocí pravoúhlé soustavy souřadnic.

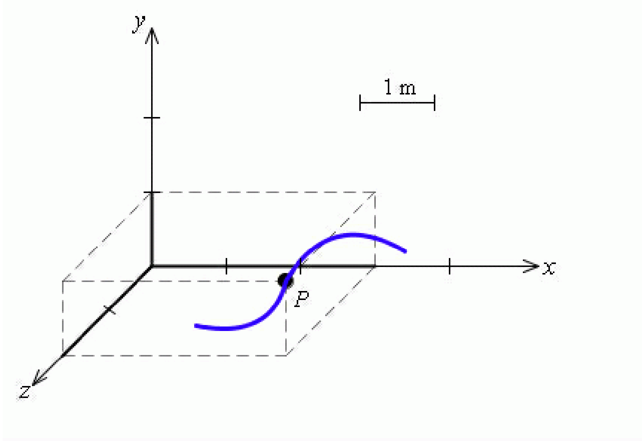
2. Určit polohu hmotného bodu pomocí polohového vektoru, umět vypočítat jeho velikost a směr.

3. Definovat pojmy dráha a trajektorie.

4. Rozlišovat podle tvaru trajektorie přímočaré a křivočaré pohyby.

5. Zakreslit do grafu závislost dráhy na čase.

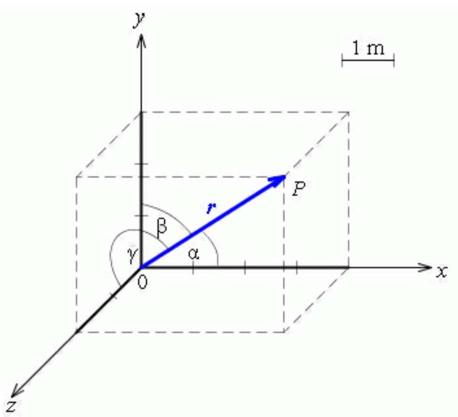
Popisujeme-li mechanický pohyb hmotného bodu vzhledem ke zvolené vztažné soustavě, musíme určit jeho polohu v libovolném čase. Nejjednodušší je určit polohu pomocí **pravoúhlé soustavy souřadnic** *Oxyz*. Na obrázku Obr.1.2.-1 stanovujeme polohu bodu *P*, třeba umístění vázy na stole v místnosti. Souřadnou soustavu spojíme s místností, počátek souřadnic *O* umístíme do jednoho spodního rohu místnosti.




Obr.1.2.-1

Osami *x, y, z* jsou z tohoto rohu vybíhající rohy stěn. Poloha našeho hmotného bodu – vázy je určena souřadnicemi $x$ = 3 m, $y$ = 1 m, $z$ = 2 m. Zkráceně zapisujeme tuto polohu jako $P$ = [3 m, 1 m, 2 m] .

Polohu hmotného bodu můžeme určit také pomocí **polohového vektoru *r*.** Polohový vektor je vektor s počátkem v bodě *O* souřadnicové soustavy a s koncovým bodem ve vyšetřovaném bodě *P*. Souřadnice polohového vektoru jsou totožné se souřadnicemi hmotného bodu *x, y, z* jak je vidět na Obr.1.2.-2. Vektor ***r*** tak můžeme zapsat jako ***r*** [*x*,*y*,*z*]. Jeho velikost je dána vztahem :

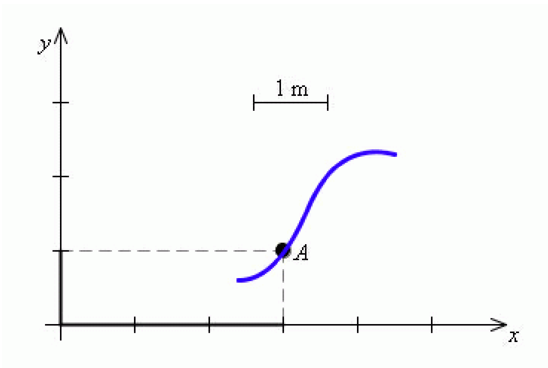



Obr.1.2.-2

$$\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2)} \,,$$

jeho směr je pak určen úhly α, β, a γ, které polohový vektor svírá s osami souřadnic.

**U 1.2.-1** Na obrázku Obr.1.2.-3 je znázorněna poloha bodu *A* ležícího v rovině. *Zapište jeho polohu pomocí polohového vektoru, určete jeho velikost a směr.*




Obr.1.2.-3

Pohybuje-li se hmotný bod, opisuje v prostoru pomyslnou souvislou čáru, kterou nazýváme **trajektorie hmotného bodu**.

**Trajektorie** je množina všech poloh, kterými hmotný bod při svém pohybu prochází.

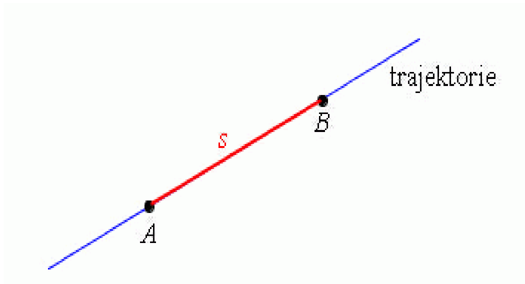
Podle tvaru trajektorie rozlišujeme **pohyby:**

- **přímočaré** – trajektorií je část přímky,
- **křivočaré** – trajektorií je křivka nebo její část (kružnice, parabola, elipsa nebo libovolná prostorová křivka).

Podle tvaru trajektorie usuzujeme na druh pohybu. Nás však také zajímá délka trajektorie – dráha.

Délka *s* trajektorie, kterou hmotný bod opíše za čas *t*, se nazývá **dráha.** Dráha je fyzikální veličina, kterou uvádíme v jednotkách délky.

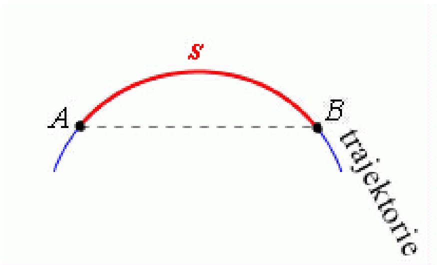
Na obrázku Obr.1.2.-4 se pohybuje hmotný bod po přímočaré trajektorii z bodu *A* do bodu *B*. V tomto případě je délka trajektorie – dráha *s* rovna vzdálenosti bodů *A* a *B*.




Obr.1.2.-4

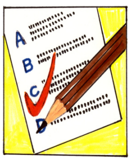
Na druhém obrázku Obr.1.2.-5 se hmotný bod pohybuje po křivočaré trajektorii. Nyní musíme měřit dráhu *s* podél celé křivky od bodu A do bodu B.

Jak se hmotný bod pohybuje po své trajektorii, plyne čas. S rostoucím časem se zvětšuje dráha, kterou hmotný bod urazil. Říkáme, že **dráha** *s* **je funkcí času** *t*. Tuto závislost dráhy na čase zapisujme výrazem $s = s(t)$.




Obr.1.2.-5

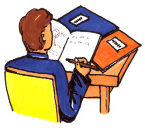
Je výhodné si tuto závislost zakreslovat do grafu. Na *x* osu nanášíme čas *t*, na osu *y* uraženou dráhu *s*.



**TO 1.2.-4**. *Jak rozdělujeme pohyby podle trajektorie*?

**TO 1.2.-5**. *Určete podle tvaru trajektorie jaký pohyb koná:* vržený oštěp, padající list ze stromu, lokomotiva na přímé trati, sprinter na trati 100 m a 200 m, umělá družice Země, celá Země.

**TO 1.2.-6** *Jakou trajektorii opisuje* jehla gramofonové přenosky vzhledem: ke skříni gramofonu, k přenosce, otáčející se gramofonové desce?



**U 1.2.-2**. Běžec uběhl v každé sekundě dráhu 7 m. *Jakou dráhu uběhl* za dobu 5 s, 10 s?

**U 1.2.-3** Hmotný bod se pohybuje z jednoho místa do druhého a) po přímce, b) po části kružnice. *Ve kterém případě urazí větší dráhu*?

**U 1.2.-4** *Zakreslete do grafu* závislost uražené dráhy na čase auta jedoucího stále stejnou rychlostí 60 km/hod. *Jaký bude mít tvar* vzniklá křivka*?*

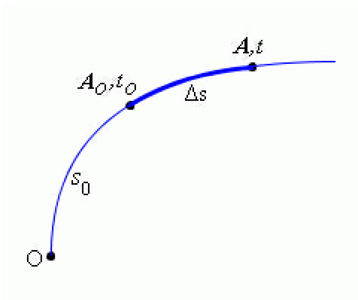
## 1.2.3. Rychlost hmotného bodu

1. Umět definovat vektor rychlosti a znát matematický zápis této definice.
2. Rozlišovat průměrnou a okamžitou rychlost.
3. Klasifikovat pohyby podle rychlosti.

Prozatím jsme u pohybu hmotného bodu vyšetřovali pouze jeho dráhu. Teď se budeme zabývat druhou veličinou charakterizující pohyb – rychlostí.

Hmotný bod se může pohybovat „pomaleji“ nebo „rychleji“, tj. urazí stejnou dráhu za různý čas. O tom, který potřebuje k uražení stejné dráhy nejkratší čas říkáme, že je nejrychlejší, nebo má největší rychlost.

Při definování rychlosti vyjdeme z obrázku Obr.1.2.-7 . Chceme stanovit rychlost hmotného bodu mezi body trajektorie $A_o$ a $A$. Než se hmotný bod v čase $t_o$ dostal do bodu $A_o$, urazil od počátku $O$ dráhu $s_o$. Označme dráhu od počátku k bodu $A$ jako $s$. Sem se hmotný bod dostane za čas $t$. Nás bude zajímat rychlost, se kterou se hmotný bod pohybuje v úseku (intervalu) dráhy $\Delta s = s - s_o$. K uražení tohoto úseku dráhy potřebuje čas $\Delta t = t - t_o$.



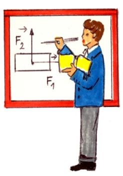

Obr.1.2.-7

**Průměrná rychlost** hmotného bodu je podíl jeho dráhy $\Delta s$ a odpovídající doby pohybu $\Delta t$.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_o}{t - t_o} . \qquad 1.2.\text{-}1$$

Jednotkou rychlosti v soustavě SI je metr za sekundu tj. m/s = m.s$^{-1}$. Běžně se používá také vedlejší jednotka km/h.

**U 1.2.-5** Automobil jede průměrnou rychlostí 90 km/h. *Vyjádřete tuto rychlost pomocí jednotek SI.*



Automobil projede první třetinu dráhy $s$ se stálou rychlostí o velikosti $v_1$, další dvě třetiny dráhy stálou rychlostí o velikosti $v_2$ = 72 km/h . Jeho průměrná rychlost byla $v$ = 36 km/h. *Určete velikost rychlosti* $v_1$.

---

Prvou třetinu dráhy $s_1 = s/3$ projel automobil za dobu $t_1 = s_1/v_1 = s/3v_1$, druhé dvě třetiny dráhy $s_2 = 2s/3$ za dobu $t_2 = s_2/v_2 = 2s/3v_2$ , celou dráhu za čas $t = t_1 + t_2$, kde $t = s/v$.

Po dosazení do vztahu pro celkový čas $t$ dostáváme výraz $s/v = s/3v_1 + 2s/3v_2$ a odtud pro velikost rychlosti $v_1 = v\, v_2 / (3v_2 - 2v)$.

Převedeme nyní rychlosti vyjádřené v km/h na jednotky m/s a dosadíme do vztahu pro $v_1$ = 10.20 / (3.20-2.10) = <u>5 m/s.</u>

Velikost rychlosti automobilu v prvé třetině dráhy byla 5 m/s, tj. 18 km/h.

Vypočítám-li si po ujetí jisté vzdálenosti autem průměrnou rychlost, neznamená to, že v každém okamžiku jízdy ukazuje tachometr tuto rychlost. Tento přístroj totiž měří dráhu, kterou auto ujede za velice krátký čas $\Delta t$ a ukazuje nám velikost tak zvané **okamžité rychlosti**.

Budeme-li zkracovat časový interval $\Delta t$ až k nekonečně malým hodnotám, potom $\Delta s \rightarrow \mathrm{d}s$ (interval přejde na diferenciál –zopakovat z matematiky!) pak dostaneme následující vztah pro velikost **okamžité rychlosti**

$$v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t}, \text{ kde } \Delta t \rightarrow 0, \text{ neboli}$$

$$\boxed{v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} \qquad 1.2.\text{-}2$$

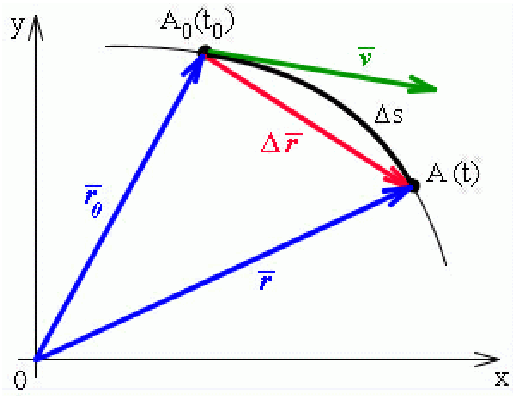
**Velikost okamžité rychlosti hmotného bodu se rovná první derivaci jeho dráhy podle času.**

Prozatím jsme si definovali pouze velikost rychlosti. Ale my potřebujeme okamžitou rychlost jako vektor, tedy určit nejen její velikost, ale také její směr.

Obraťme se k obrázku Obr.1.2.-8

Z obrázku je vidět, že změnu polohy hmotného bodu z místa $A_o$ do bodu A můžeme vyjádřit nejen pomocí dráhy $\Delta s$, ale také pomocí změny polohového vektoru $\Delta \boldsymbol{r}$. Můžeme tak definovat průměrnou rychlost, tentokráte již jako vektor.

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_o}{t - t_o}.$$




Obr.1.2.-8

Budeme-li zase zkracovat časový interval ve kterém určujeme změnu dráhy až do nekonečně malých hodnot dostaneme se k vyjádření **okamžité rychlosti jako vektoru**:

$$\boldsymbol{v} = \lim \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}, \text{ kde } \Delta t \rightarrow 0, \text{ neboli}$$

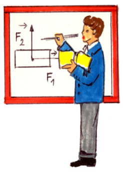
$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \ [\mathrm{m.s^{-1}}] \qquad 1.2.\text{-}3$$

**Okamžitá rychlost hmotného bodu se rovná první derivaci jeho polohového vektoru podle času.**

Jak už bylo řečeno ve středoškolské fyzice můžeme podle velikosti rychlosti rozdělit pohyby do dvou skupin:

- **rovnoměrný pohyb**. U tohoto pohybu urazí hmotný bod ve stejných časových intervalech stejné dráhy. Velikost jeho rychlosti se během pohybu nemění, je konstantní.
- **nerovnoměrný pohyb**. U nerovnoměrného pohybu se velikost rychlosti mění během pohybu, není konstantní.

**U 1.2.-6** Dráha hmotného bodu je dána rovnicí: $s = 6t^3 + 5t + 2$
*Napište rovnici jeho rychlosti*. $v =$



Poloha hmotného bodu je dána polohovým vektorem $\boldsymbol{r} = 3t^2\boldsymbol{i} + 6t\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ (m,s). *Napište velikost x-ové složky rychlosti* tohoto hmotného bodu. *Napište velikost rychlosti* tohoto hmotného bodu *ve druhé vteřině.*

---

Máme zadánu dráhu pohybu hmotného bodu pomocí polohového vektoru $\boldsymbol{r}$, který závisí na čase $t$. Když rovnici pro dráhu derivujeme podle času, dostaneme rovnici pro rychlost:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(3t^2\boldsymbol{i} + 6t\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}\right)$$

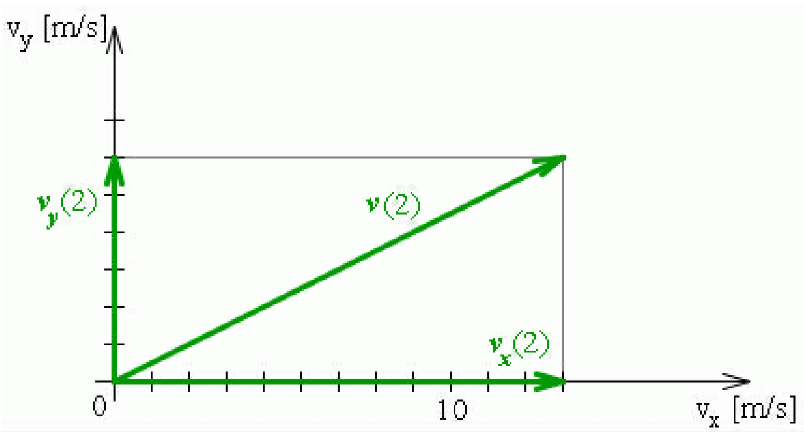
$\boldsymbol{v} = 6t\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$ **.**

Vidíme, že rychlost se s časem mění. Velikost jejích složek je $v_x = 6t$ a $v_y = 6$.

Při řešení druhé části zadání vyjdeme z rovnice pro rychlost. Dosadíme-li do ní čas 2 sekundy dostaneme vztah:

$\boldsymbol{v}(2) = 12\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$ **.**

To jsme ale určili vektor rychlosti v tomto čase jak je vidět na Obr.1.2.-9. Ze střední školy bychom měli vědět, že velikost vektoru je dána výrazem $v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$ . V našem případě $v = \sqrt{(12^2 + 6^2)} = \underline{13{,}4}\ \mathrm{ms}^{-1}$.




Obr.1.2.-9

**U 1.2.-7** *Za jakou dobu ujede cyklista dráhu* 18 km, jede-li stálou rychlostí 30 km/h?

## 1.2.4. Zrychlení hmotného bodu

1. Umět definovat vektor zrychlení a znát matematický zápis této definice.
2. Rozlišovat průměrné a okamžité zrychlení.
3. Rozložit celkové zrychlení křivočarého pohybu na tečné a normálové zrychlení.
4. Klasifikovat pohyby podle zrychlení.
5. Umět určit z rovnice pro dráhu pohybu rovnice pro rychlost a zrychlení pohybu.
6. Umět určit z rovnice pro zrychlení pohybu rovnice pro rychlost a dráhu pohybu.

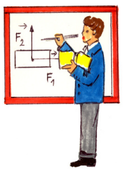
V kapitole o rychlosti jsme si dělili pohyby na rovnoměrné a nerovnoměrné. Pro rovnoměrné pohyby bylo charakteristické, že velikost jejich rychlosti byla konstantní. U nerovnoměrných pohybů se rychlost během pohybu mění. **Změnu rychlosti za jednotku času** označujeme jako **zrychlení**. Je to po dráze a rychlosti třetí veličina charakterizující mechanický pohyb z pohledu kinematiky.

Změní-li se rychlost hmotného bodu z hodnoty $v_o$ v čase $t_o$ na hodnotu $v$ v čase $t$, pak tuto změnu zapisujeme výrazem $\Delta v = v - v_o$. K této změně došlo v časovém intervalu $\Delta t = t - t_o$. Pomocí těchto změn můžeme definovat zrychlení hmotného bodu.

Velikost průměrného z**rychlení** $a$ je podíl změny rychlosti $\Delta v$ a doby $\Delta t$, za kterou k této změně dojde.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_o}{t - t_o} \quad . \qquad 1.2.\text{-}4$$

Jednotkou zrychlení v soustavě SI je metr za sekundu na druhou, tj. $m/s^2 = m.s^{-2}$.



Automobil jede rychlostí 36 km/h. V určitém okamžiku řidič „šlápne na plyn“ a během doby 30 s zvětší rychlost na 90 km/h. *Určete průměrné zrychlení automobilu.*

---

Nejdříve převedeme všechny jednotky do soustavy SI. Počáteční rychlost $v_o$ = 36 km/h = 10 m/s, konečná rychlost $v$ = 90 km/h = 25 m/s.

Vyjdeme ze vztahu pro zrychlení, kde za $\Delta v$ dosadíme $v - v_{0,}$ za $\Delta t$ dobu zrychlování $t$ a dostaneme

$$a = (v - v_o)/t = (25 - 10)/30 = \underline{0{,}5 \text{ m/s}^2}$$

Automobil jede s průměrným zrychlením 0,5 m/s$^2$

Výše uvedeným vztahem pro velikost zrychlení je definována velikost průměrného zrychlení. Zkrátíme-li dobu $\Delta t$, ve které určujeme zrychlení, na velmi malou hodnotu blížící se nule, pak vztah nám definuje **okamžité zrychlení.**

Tak jak jsme definovali obecný vztah pro okamžitou rychlost dokonce i jako vektor, obdobně můžeme postupovat při definování okamžitého zrychlení.

Vyjdeme ze vztahu pro průměrné zrychlení ve vektorovém tvaru $\boldsymbol{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_o}{t - t_o}$. Jestli zase zkracujeme interval času ve kterém zrychlení stanovujeme až na nekonečně malé hodnoty $\Delta t \to 0$ pak dojdeme k vyjádření

$$\boldsymbol{a} = \lim \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}, \text{ kde } \Delta t \to 0, \text{ neboli}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}. \qquad 1.2.\text{-}5$$

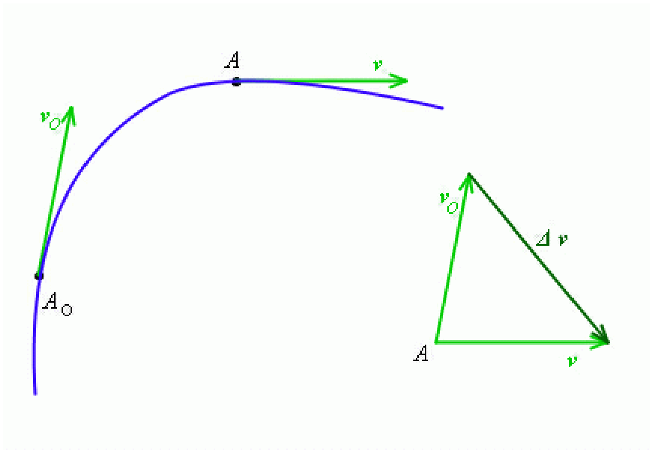
**Vektor okamžitého zrychlení hmotného bodu se rovná první derivaci vektoru jeho rychlosti podle času.**

Vektor okamžitého zrychlení můžeme přímo stanovit jako druhou derivaci polohového vektoru.

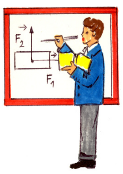
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \qquad 1.2.\text{-}6$$

Zrychlení ***a*** je vektor vyjadřující **časovou změnu vektoru rychlosti,** tj. **změnu velikosti i směru** vektoru rychlosti**.**

Změna směru vektoru rychlosti se nejlépe ukazuje na křivočarém pohybu. Podívejte se na obrázky na Obr.1.2.-10. Na levém obrázku vidíte jak se na obloukové trajektorii mění směr vektoru rychlosti ***v*** i když jeho velikost se nemění. **Vektor rychlosti má** totiž **směr tečný k trajektorii**. V pravé části obrázku je pak znázorněn odpovídající vektor **změny** rychlosti.




Obr.1.2.-10

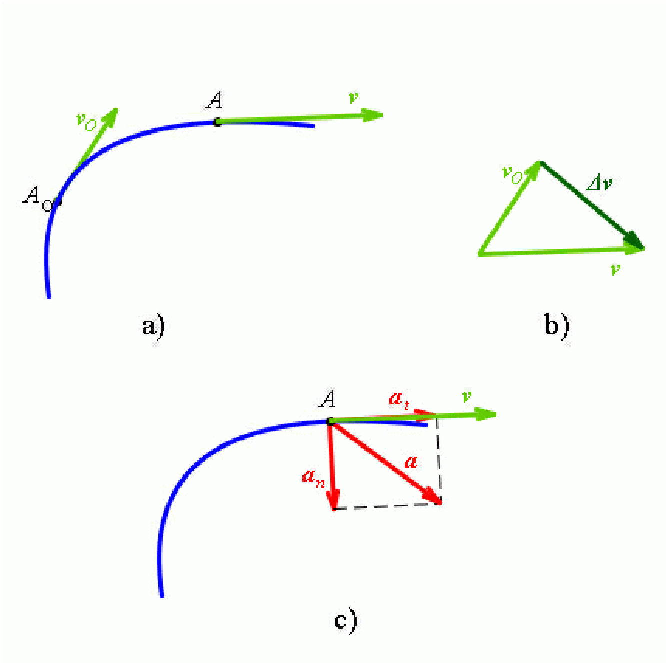


*Určete směr vektoru zrychlení* v předchozím obrázku . *Zakreslete* vektor zrychlení do pravé části obrázku (do vektorového trojúhelníku).

---

Nic nemusíte kreslit. Vektor zrychlení ***a*** bude mít totiž směr vektoru změny rychlosti **Δ*v*,** bude mít jenom jinou velikost. Zdůvodnění je jednoduché. Vyjdeme z definičního vztahu $\boldsymbol{a} = \Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$ a vzpomene si, co jsme se naučili o násobení vektoru skalárem. V našem případě násobíme vektor Δ***v*** reálným číslem $\frac{1}{\Delta t}$. A jak jistě víte, výsledkem tohoto násobení je vektor stejného směru jako má násobený (Δ***v***), pouze jiné velikosti.

Teď se podívejme na další obdobný obrázek Obr.1.2.-11 pro křivočarý pohyb, ale v něm se nám mění směr i velikost vektoru rychlosti. Na obrázku a) jsou zakresleny vektory rychlosti v bodech $A_o$ a *A*. Na obrázku b) vidíme vektorový trojúhelník určující rozdíl obou vektorů rychlosti Δ***v***. Na třetím obrázku c) je znázorněn vektor zrychlení ***a*** pohybu hmotného bodu po křivce. Tento vektor jsme si rozložili do dvou vzájemně kolmých směrů:




Obr.1.2.-11

- do směru tečného k trajektorii. Složku vektoru ***a*** v tomto směru jsme označili $\boldsymbol{a}_t$ . Toto tak zvané **tečné zrychlení vyjadřuje změnu <u>velikosti</u> rychlosti hmotného bodu**.
- do směru normály k trajektorii. Složku vektoru ***a*** v tomto směru jsme označili $\boldsymbol{a}_n$ . Toto tak zvané **normálové zrychlení vyjadřuje změnu <u>směru</u> rychlosti hmotného bodu**.

Podle pravidel vektorového počtu je **celkové zrychlení *a*** dáno vektorovým součtem tečného a normálového zrychlení:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n \qquad 1.2.\text{-}7$$

Velikost celkového zrychlení můžeme vypočítat jestliže známe velikost tečného a normálového zrychlení pomocí Pythagorovy věty:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

**U 1.2.-8** *Stanovte velikost normálového a tečného zrychlení* přímočarého pohybu. Celkové zrychlení tohoto pohybu je 5 m.s$^{-2}$.

**U 1.2.-9**. Rychlost hmotného bodu je dána rovnicí: $v = 3t^2 + 2t + 5$. *Napište rovnici jeho zrychlení.* $a =$

**U 1.2.-10** Závislost dráhy na čase pohybujícího se tělesa je $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$ (m,s). *Určete zrychlení tělesa na konci druhé sekundy od začátku pohybu.* $a =$

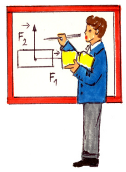
Obdobně jak jsme rozlišovali pohyby na rovnoměrný a nerovnoměrný pomocí rychlosti, můžeme využít i zrychlení ke klasifikaci pohybů:

- **rovnoměrný pohyb.** Tečné zrychlení tohoto pohybu je nulové $a_t = 0$.
- **rovnoměrně zrychlený pohyb.** Tečné zrychlení tohoto pohybu je konstantní $a_t$ = konst., a je kladné ($a_t > 0$).
- **rovnoměrně zpomalený pohyb.** Tečné zrychlení tohoto pohybu je konstantní $a_t$ = konst., ale je záporné ($a_t < 0$).
- **nerovnoměrný pohyb.** Tečné zrychlení se během pohybu mění $a_t \neq$ konst.
- **přímočarý pohyb.** Normálové zrychlení je nulové $\boldsymbol{a}_n = 0$, tečné zrychlení je rovno celkovému zrychlení $\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{a}$.
- **křivočarý pohyb.** Normálové zrychlení je různé od nuly $\boldsymbol{a}_n \neq 0$.

Ukázali jsme si že **pomocí** matematické operace – **derivování – jste** tedy **schopni z rovnice pro dráhu určit postupně rovnice pro rychlost a zrychlení pohybu.**

**Pomocí** další matematické operace **– integrování pak naopak z rovnice pro zrychlení je možné stanovit rovnice pro rychlost a pak pro dráhu** jak obecně ukazují následující vztahy:

$$v = \int a\,\mathrm{d}t \quad \text{respektive} \quad s = \int v\,\mathrm{d}t\,. \qquad 1.2.\text{-}8$$



Zrychlení hmotného bodu je dáno rovnicí: $a = 6t + 2$. *Napište rovnici jeho dráhy.*

Nejdříve si stanovíme rovnici pro rychlost. Vyjdeme z definičního vztahu pro velikost zrychlení $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ a vyjádříme si z něj diferenciál rychlosti d$v$ = $a$d$t$. Celou rovnici integrujeme

$$\int dv=\int a\mathrm{d}t\,.$$

Dosadíme vztah pro zrychlení

$$a=\int(6t+2)\mathrm{d}t\,.$$

Po provedení integrace získáme vztah pro rovnici rychlosti v závislosti na čase

$v$ =3 $t^2$+2 $t$.

A postupujeme dále. Teď vyjdeme z definičního vztahu pro velikost rychlosti $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ a vyjádříme si z něj diferenciál dráhy d$s$ = $v$d$t$. Celou rovnici integrujeme

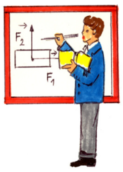
$$\int ds=\int v\mathrm{d}t\,.$$

Dosadíme vztah pro rychlost

$$s=\int(3t^2+2t)\mathrm{d}t\,.$$

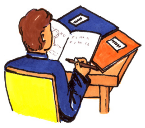
Po provedení integrace získáme vztah pro rovnici dráhy v závislosti na čase

$s$ = $t^3$+ $t^2$.




Tachometr automobilu ukazoval po dobu 5 min stálou rychlostí 60 km/h. *Jakou dráhu automobil ujel?*

Nejdříve si zadané údaje převedeme do soustavy SI. Čas bude $t$ = 5.60 = 300 s, rychlost pak = $v=60\frac{1000}{3600}$ = 16,7 ms$^{-1}$. Vyjdeme z definice rychlosti $v$ = d$s$/d$t$ a vyjádříme diferenciál dráhy d$s$ = v d$t$. Tuto rovnici integrujeme $\int \mathrm{d}s=\int v.\mathrm{d}t$ a dosadíme meze. $\int_0^s \mathrm{d}s=\int_0^{300} v.\mathrm{d}t=[16{,}7.t]_0^{300}=5000\mathrm{m}=5\,\mathrm{km}$



**U 1.2.-11** Zrychlení pohybu hmotného bodu se mění s časem podle rovnice 6$t^2$ + 4. *Napište rovnici jeho rychlosti. v =*

**U 1.2. -12** Rychlost, zrychlení a dráha v předešlých čtyřech otázkách *byly vyjádřeny jako vektory, nebo pouze jejich velikosti?*

## 1.2.5. Přímočarý pohyb hmotného bodu

V této kapitole využijeme toho, co jsme se naučili o dráze, rychlosti a zrychlení k řešení pohybu hmotného bodu po přímkové trajektorii. Začneme nejjednodušším případem tj. rovnoměrným pohybem, přejdeme na pohyb rovnoměrně zrychlený a ukončíme obecným nerovnoměrným pohybem.

Vždy nás budou zajímat tři veličiny: zrychlení, rychlost a dráha daného pohybu.

Důležité je, že všechny přímočaré pohyby lze charakterizovat tím, že jejich **normálové zrychlení je rovno nule**.

1. Rozlišovat druhy přímočarých pohybů pomocí jejich zrychlení a rychlosti.

2. Umět si odvodit u rovnoměrného a rovnoměrně zrychleného pohybu vztahy pro jejich rychlost a uraženou dráhu.

3. Graficky znázornit u těchto pohybů závislost zrychlení, rychlosti a dráhy na čase.

Pokud jste si opakovali stejnojmennou kapitolu z CD Základy fyziky určitě vás zarazilo množství vztahů zde uvedených.

Teď si ukážeme, že **je nesmyslné si všechny tyto vztahy pamatovat**, že **vystačíme** pouze **se znalostí definic rychlosti a zrychlení (**žluté) a se základními znalostmi derivačního a integračního počtu a s trochou myšlení.

Projděme si všechny tři případy uvažované v Základech fyziky.

### 1.2.5.1. Rovnoměrný přímočarý pohyb

Pro rovnoměrný přímočarý pohyb je charakteristické, že **zrychlení je rovno nule**, ***a*** = 0. **Rychlost je konstantní, *v* = konst**., jak její velikost, tak její směr.

Vyjdeme z definičního vztahu pro velikost rychlosti. Protože se její směr nemění nemusíme používat vektorovou definici.

$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ , vyjádříme si z toho vztahu diferenciál dráhy d$s$ = $v$ d$t$ a tuto rovnici integrujeme:

$$s = \int v\mathrm{d}t + C\,.$$

$s = vt + C.$

Musíme si stanovit integrační konstantu $C$. Fyzici vycházejí z tzv. „počátečních podmínek“. Víme, že v čase $t$ = 0, tedy před dobou kdy jsme začali sledovat pohyb hmotného bodu, ten již urazil tzv. „počáteční dráhu“ $s_0$. Dosaďme tyto známé údaje do rovnice pro dráhu.

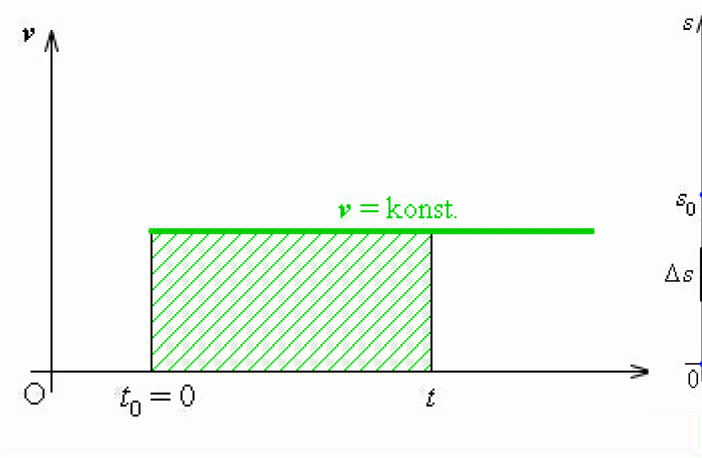
$s_0 = v.0 + C.$

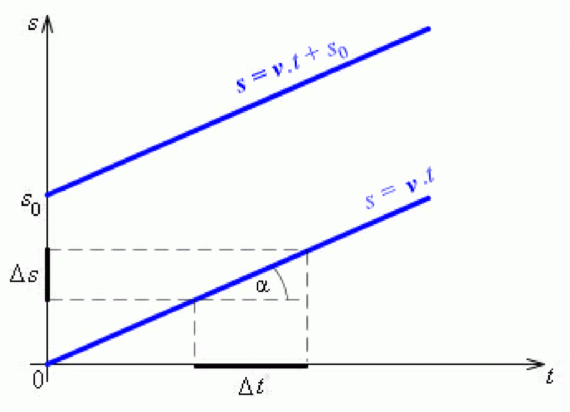
Z rovnice nám vyplývá, že integrační konstanta je rovna počáteční dráze. Konečná rovnice pro uraženou dráhu v libovolném čase $t$ je tedy dána vztahem:

$$s = vt + s_0. \qquad 1.2.\text{-}9$$

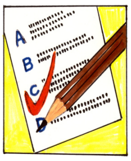
Došli jsme tak použitím jediného vztahu ke vzorci, který jste se na střední škole museli učit nazpaměť.

Často je výhodné závislosti rychlosti a dráhy na čase vynášet do grafu. Na levém obrázku Obr.1.2.-12 je znázorněn graf rychlosti na čase na pravém pak závislost dráhy na čase (Obr.1.2.-13).




Obr.1.2.-12 Obr.1.2.-13



**TO 1.2. -7** *U rovnoměrného pohybu přímočarého*

a) dochází jen ke změně velikosti vektoru rychlosti

b) dochází jen ke změně směru vektoru rychlosti

c) dochází ke změně jak směru tak i velikosti vektoru rychlosti

d) vektor rychlosti je konstantní co do směru i velikosti

**TO 1.2. -8** *Zrychlení pohybu rovnoměrného přímočarého je*

a) libovolné

b) konstantní, různé od nuly

c) stále nulové

**TO 1.2. -9** *U pohybu rovnoměrného přímočarého je*

a) dráha i rychlost lineární funkcí času

b) dráha lineární funkcí času a rychlost konstantou

c) dráha kvadratickou a rychlost lineární funkcí času

d) dráha i rychlost konstantní, nezávislé na čase

**TO 1.2. -10** Hmotný bod se pohybuje po přímce tak, že jeho dráhu lze vyjádřit rovnicí: $s = 5t + 1$. *O jaký pohyb se jedná*?

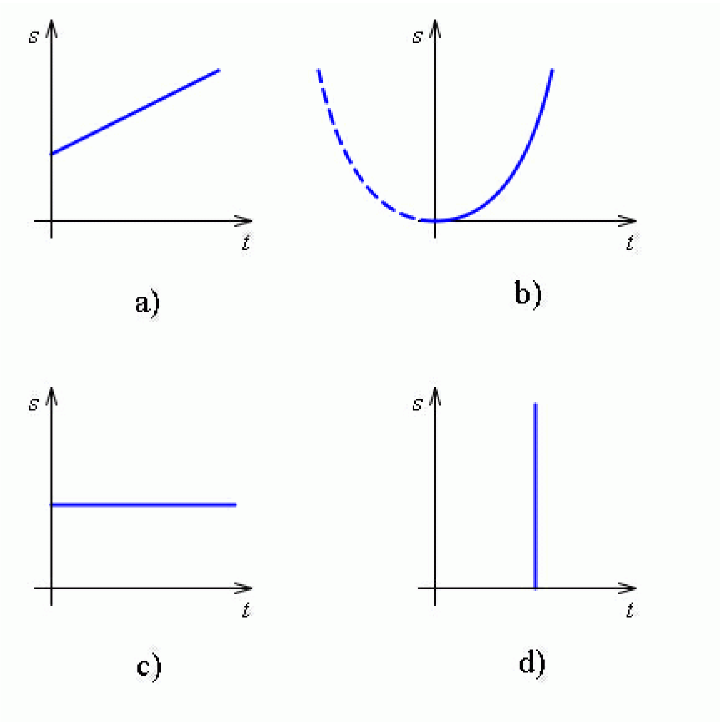
a) rovnoměrný

b) zrychlený

c) rovnoměrně zrychlený

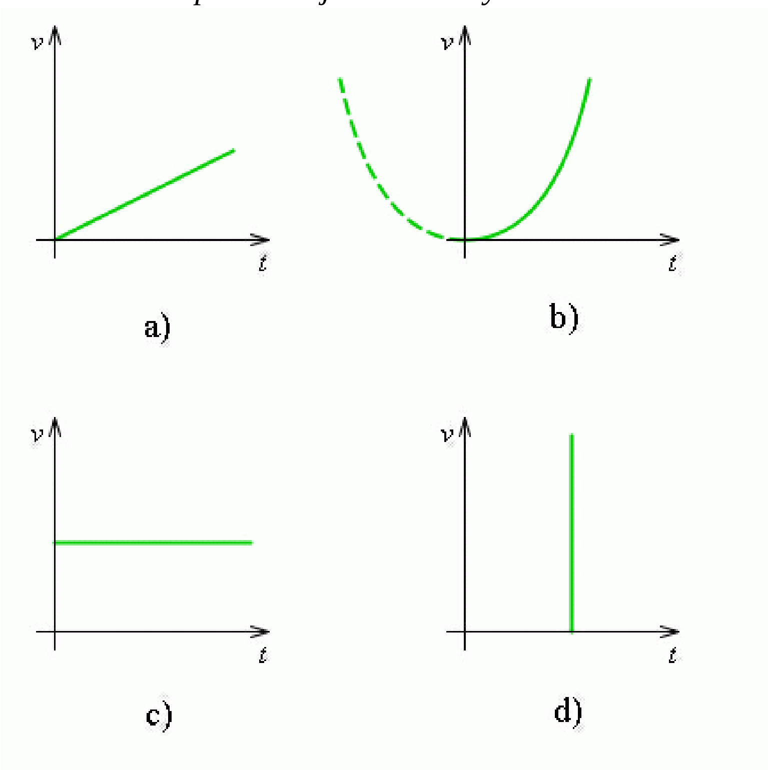
d) nelze rozhodnout

**TO 1.2.-11** Hmotný bod se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem. *Který z grafů* na Obr.1.2.-14 *představuje závislost dráhy na čase*?




Obr.1.2.-14

**TO 1.2.-12** Hmotný bod se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem. *Který z grafů* na Obr.1.2.-15 *představuje závislost rychlosti na čase* ?




Obr.1.2.-15

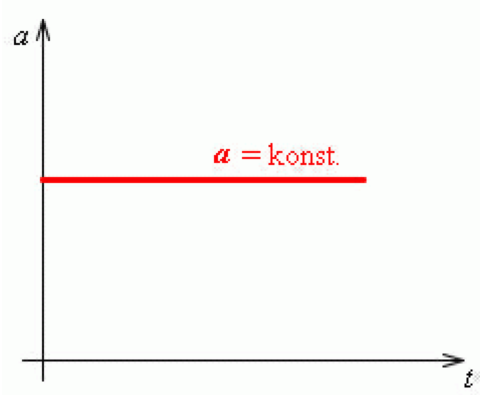
**U 1.2. -13** Hmotný bod urazí dráhu 10 m za 5 s pohybem rovnoměrným přímočarým. *Jakou se pohybuje rychlostí* ?

**U 1.2. -14** Hmotný bod se pohybuje po přímce tak, že jeho dráhu lze vyjádřit rovnicí: $s = 6t + 1$ (m,s). *Určete jeho rychlost. Co znamená číslo 1?*

### 1.2.5.2. Rovnoměrně zrychlený (zpomalený) přímočarý pohyb

Pro rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb je charakteristické, že **zrychlení je konstantní, *a* = konst,** nemění se ani jeho velikost ani jeho směr.

Budeme postupovat stejným způsobem jako v předešlém případě. Musíme však vyjít z definice zrychlení, které v tomto případě není nulové. Pokud si sestrojíme graf závislosti zrychlení na čase dostaneme polopřímku rovnoběžnou s časovou osou – Obr.1.2.-16.




Obr.1.2.-16

Protože se však nemění směr zrychlení zase bude dostačovat definiční vztah pro velikost zrychlení:

$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ a opět si z něj vyjádříme diferenciál rychlosti a vzniklou rovnici integrujeme:

$v = \int a\,\mathrm{d}t + C_1$. Protože zrychlení je konstantní dostaneme po integraci vztah:

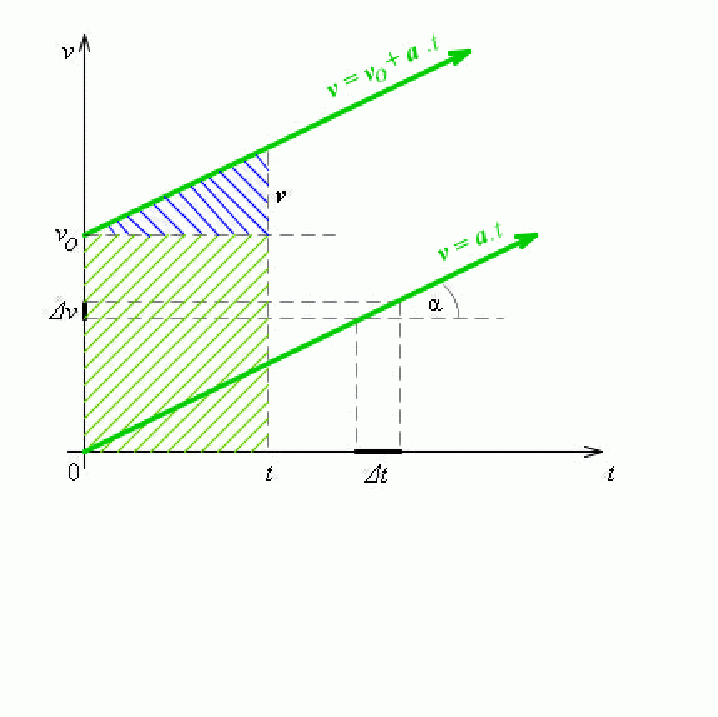
$v = at + C_1$.

A protože v čase $t = 0$ se může hmotný bod již pohybovat počáteční rychlostí $v_o$ vyjde nám integrační konstanta (stejným postupem jako u rovnoměrného pohybu) rovna počáteční rychlosti.

$v = at + v_o$. 1.2.-10

A máme odvozený vztah předkládaný na střední škole k zapamatování.

Pokud si sestrojíme graf závislosti rychlosti na čase dostaneme polopřímku se směrnicí rovnou zrychlení *a* jak je vidět na Obr.1.2.-17.




Obr.1.2.-17

Dobře si uvědomte, že v rovnici pro rychlost je $v$ konečná rychlost a $v_o$ počáteční rychlost. Jedná-li se o

- **zrychlený pohyb** je $v > v_o$ a zrychlení je kladné, $a = \dfrac{v - v_o}{t} > 0$.
- **zpomalený pohyb** je $v < v_o$ a

zrychlení je záporné, $a = \dfrac{v - v_o}{t} < 0$.

Potřebujeme však znát ještě dráhu. Zase vyjdeme z definice pro rychlost.

$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, z ní vyjádříme diferenciál dráhy, za rychlost dosadíme z předchozího vztahu a integrujeme:

$$s = \int (at + v_o)\mathrm{d}t + C_2 .$$

Vypočítáme integrál:

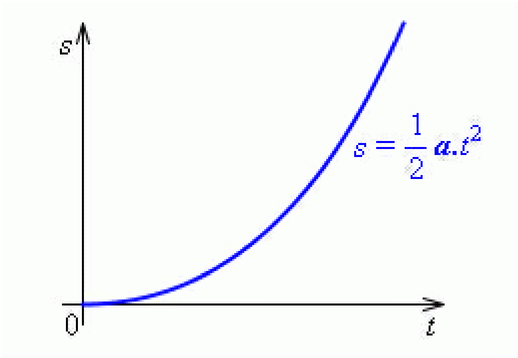
$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + C_2 .$$

Zavedením počátečních podmínek (pro $t$ = 0 bude $s$ = $s_o$) dostaneme konečný obecný vztah pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu:

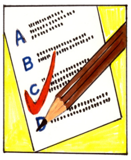
$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + s_o . \qquad 1.2.\text{-}11$$

Takže jsme si odvodili další vztah a nemusíme se jej učit nazpaměť.

Jako poslední graf této kapitoly máme závislost dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu na čase. Pro zjednodušení je zakreslen případ pohybu s nulovou počáteční rychlostí a nulovou počáteční dráhou. Graf je na Obr.1.1.-18.




Obr.1.1.-18

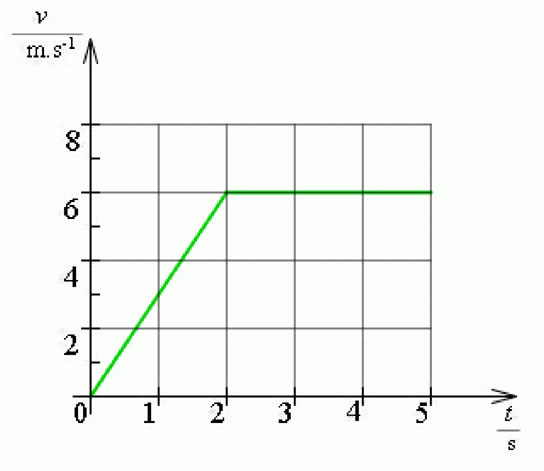


**TO 1.2.-13** Hmotný bod koná přímočarý pohyb. Na obrázku Obr.1.2.-19 je nakreslen graf závislosti velikosti rychlosti hmotného bodu na čase. *Jak velké je zrychlení hmotného bodu během prvních dvou sekund pohybu?*

a) 0,3 m.s$^{-2}$ b) 3 m.s$^{-2}$ c) 6 m.s$^{-2}$ d) 12 m.s$^{-2}$

**TO 1.2. -14** Hmotný bod koná přímočarý pohyb. Na obrázku Obr.1.2.-19 je nakreslen graf závislosti velikosti rychlosti hmotného bodu na čase. *Jak velké je zrychlení hmotného bodu v čase $t$ = 3s?*

a) 0 m.s$^{-2}$ b) 0,2 m.s$^{-2}$ c) 2 m.s$^{-2}$ d) 6 m.s$^{-2}$




Obr.1.2.-19

**TO 1.2. -15** Automobil se rozjíždí rovnoměrně zrychleně po přímé silnici. Velikost zrychlení automobilu je 2 m.s$^{-2}$, jeho počáteční rychlost je nulová. *Jak velká je rychlost automobilu za 4s od začátku jeho pohybu?*

a) 0,5 m.s$^{-1}$ b) 2 m.s$^{-1}$ c) 4 m.s$^{-1}$ d) 8 m.s$^{-1}$

**U 1.2.-15** Hmotný bod koná rovnoměrně zrychlený pohyb ve směru osy $x$ se zrychlením o velikosti 2 $m.s^{-2}$, přičemž v čase $t_o = 0$ s se nachází v bodě o souřadnici $x_o = 5$ m a má rychlost o velikosti $v_o = 8$ $m.s^{-1}$.

a) *Napište vztahy vyjadřující závislost rychlosti a dráhy hmotného bodu na čase.*

*b) Určete dobu, ve které má rychlost hmotného bodu velikost 40 $m.s^{-1}$.*

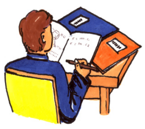
*c) Určete dobu, ve které má hmotný bod x-ovou souřadnici 110 m.*

**U 1.2.-16** Vlak se rozjíždí z klidu se stálým zrychlením o velikosti 0,6 $m.s^{-2}$. *Za jakou dobu dosáhne rychlosti* o velikosti 20 $m.s^{-1}$? *Jakou dráhu přitom ujede*?

### 1.2.5.3. Volný pád

Volný pád je vlastně přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením daným tíhovým zrychlením, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$. Pokud jde o skutečně volný pád, předmět prostě upustíme, pak počáteční rychlost pohybu je nulová, $v_o = 0$. Takže využijeme rovnic pro rychlost a dráhu odvozených v předešlém případě.

$$v = gt, \quad s = \frac{1}{2}gt^2 .$$



**U 1.2.-17** *Z jaké výšky padalo těleso* volným pádem, jestliže dopadlo na zem rychlostí 82 km/h?

**U 1.2.-18** *Jak se změní velikost rychlosti* volně padajícího tělesa během třetí sekundy pádu? *Jakou dráhu těleso* za tuto dobu *urazí*?

## 1.2.6. Pohyb hmotného bodu po kružnici

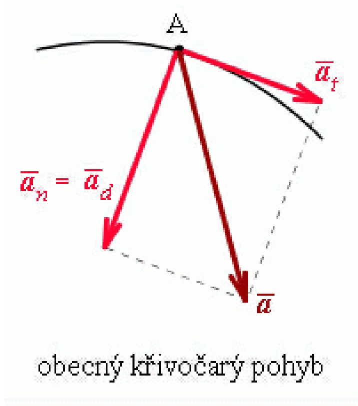
Pohyb hmotného bodu po kružnici, zkráceně kruhový pohyb, je nejjednodušší případ křivočarého pohybu. **Jeho trajektorií je kružnice**. Takto se pohybuje například sedačka roztočeného řetízkového kolotoče.

1. Vědět, že u kruhového pohybu se mění směr rychlosti.
2. Vysvětlit pojem úhlová dráha a úhlová rychlost.
3. Umět určit úhlovou dráhu pomocí délky oblouku a poloměru kružnice.
4. Znát definiční vztah pro úhlovou rychlost.
5. Znát definiční vztah pro úhlové zrychlení.
6. Umět přiřadit vektorům úhlové dráhy, úhlové rychlosti a úhlového zrychlení jejich směr.
7. Znát souvislost mezi obvodovou a úhlovou rychlostí jak u kruhového tak u obecného křivočarého pohybu.
8. Znát vztah mezi periodou a frekvencí, umět vyjádřit úhlovou rychlost pomocí těchto veličin.
9. Znát vztah pro velikost dostředivého zrychlení.

10. Umět odvodit u rovnoměrného a rovnoměrně zrychleného pohybu po kružnici vztahy pro jejich úhlovou rychlost a úhlovou dráhu.

Při vyšetřování rovnoměrného kruhového pohybu nás budou opět zajímat tři veličiny: zrychlení, rychlost a dráha.

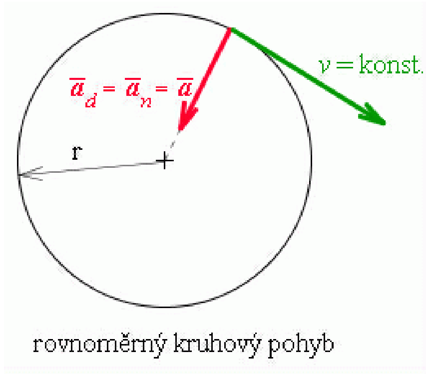
Protože se jedná o křivočarý pohyb, nesmíme zapomenout na to, že celkové zrychlení u obecného křivočarého pohybu bude mít **dvě složky** jak je vidět z Obr.1.2.-20. Vezmeme-li případ rovnoměrného kruhového pohybu pak je složka ve směru tečném $\boldsymbol{a_t}$ , která rozhoduje o zrychlování či zpomalování pohybu, rovna nule, protože se jedná o rovnoměrný pohyb, $\boldsymbol{a_t} = 0$. Velikost rychlosti pohybujícího se hmotného bodu bude tedy konstantní $v$ = konst.




Obr.1.2.-20

Směr vektoru rychlosti se však v každém okamžiku mění. To způsobuje druhá složka zrychlení ve směru normály $\boldsymbol{a_n}$ . U kruhového pohybu se toto normálové zrychlení označuje jako **dostředivé zrychlení** $\boldsymbol{a_d}$, protože v každém bodě kruhové dráhy směřuje do jejího pevného středu (Obr.1.2.-21). Velikost dostředivého zrychlení je dána vztahem:

$$a_d = \frac{v^2}{r}, \qquad 1.2.\text{-}12$$




(Obr.1.2.-21)

kde $v$ je velikost rychlosti (někdy označované jako obvodová rychlost) a $r$ je poloměr opisované kružnice.

Na střední škole jste si definovali pojmy **úhlová dráha, úhlová rychlost** a **úhlové zrychlení.**

Trochu si vaše znalosti rozšíříme, budeme definovat tyto veličiny zase jako vektory.

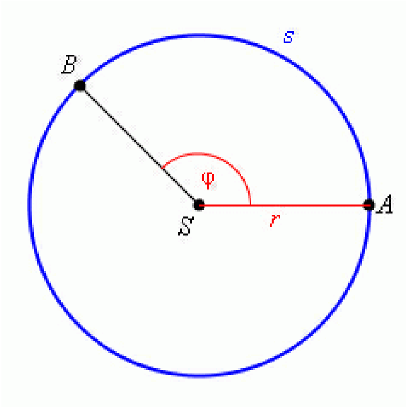
Začneme od **úhlové dráhy**. Na střední škole byla úhlová dráha definována jako středový úhel, který opíše průvodič $r$ hmotného budu za dobu $t$. Úhlovou dráhu měříme v radiánech se značkou rad.

**U 1.2.-19** *Kolik radiánů* je úhlová dráha celé kružnice?

Zobecníme středoškolskou definici úhlové dráhy $\varphi = \frac{s}{r}$ (Obr.1.2.-22) a budeme definovat změnu úhlové dráhy d$\varphi$, kterou opíše průvodič $r$ za dobu d$t$.

Mezi přírůstkem úhlové dráhy d$\varphi$ a příslušnou změnou dráhy d$s$ platí vztah:

$$d\varphi = \frac{ds}{r}$$ 1.2.-13




Obr.1.2.-22

Důležitou veličinou charakterizující kruhový pohyb je **úhlová rychlost** $\omega$. Středoškolská fyzika ji definovala jako podíl změny úhlové dráhy $\Delta\varphi$ a odpovídající doby pohybu $\Delta t$.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_o}{t - t_o}.$$

Obdobně jako u přímočarého pohybu i teď přejdeme od změny vyjadřované symbolem Δ na nekonečně malou změnu – diferenciál d. Definiční vztah pro úhlovou dráhu tedy bude zapsán jako:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.\ [\mathrm{rad.s^{-1}}]$$ 1.2.-14

Dosadíme-li do tohoto vztahu za $d\varphi = \frac{ds}{r}$ dostaneme výraz:

$\omega = \frac{ds}{dt}\frac{1}{r}$. Podílem $\frac{ds}{dt}$ jsme si dříve definovali rychlost $v$. Upravíme si vztah a dostaneme důležitou rovnici udávající souvislost mezi velikostí obvodové rychlosti $v$ a úhlovou rychlostí $\omega$:

$$v = r\,\omega.$$ 1.2.-15

A konečně nám zbývá vyjádřit si úhlové zrychlení křivočarého pohybu. To se zpravidla ve středoškolské fyzice nedefinuje. Tuto veličinu budeme ale potřebovat v mechanice tuhého tělesa.

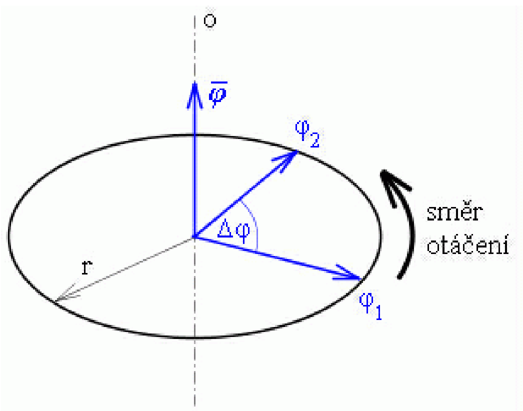
**Úhlové zrychlení** $\varepsilon$ je podíl změny úhlové rychlosti $d\omega$ a odpovídající doby pohybu d$t$.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.\ \ [\mathrm{rad.s^{-2}}]$$ 1.2.-16

A ještě jedno rozšíření středoškolské látky. Úhlová dráha, úhlová rychlost i úhlová zrychlení byly definovány pouze svými velikostmi. Ve skutečnosti se jedná o vektorové veličiny což se uplatní při řešení složitějších rotačních pohybů.

Směr všech těchto veličin je volen tak, aby se vystihl směr otáčení rotujícího objektu a vždy ležel v ose otáčení o.

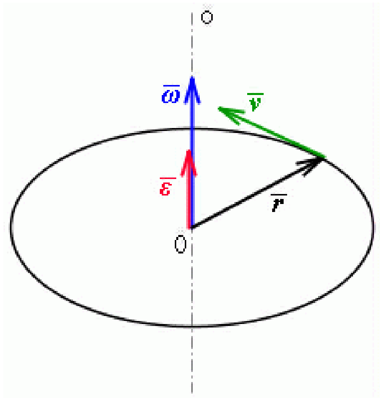
Vektor úhlové dráhy $\boldsymbol{\varphi}$ má velikost rovnu velikosti opsaného úhlu $\Delta\varphi$ a směr kolmý na rovinu opisovanou průvodičem $\boldsymbol{r}$. Směr vektoru úhlové dráhy $\boldsymbol{\varphi}$ vidíte na obrázku Obr.1.2.-23 (směr pravotočivého šroubu).




Obr.1.2.-23

Směr vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ opět leží v ose otáčení (vyplývá to z definičního vztahu $\omega = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}$). Obrázek. také Obr.1.2.-24 ukazuje, že v rovnici $v = r\,\omega$ jsou všechny tři vektory dány vektorovým součinem:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\ . \qquad 1.2.\text{-}17$$




Obr.1.2.-24

Vraťme se ještě na úvod této kapitoly k pojmu **celkové zrychlení** křivočarého pohybu $\boldsymbol{a}$. Nezaškodí si trochu pocvičit znalost derivování. Napišme si definiční vztah pro celkové zrychlení a dosaďme z rovnice pro rychlost:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\ .$$

Při derivování výrazu v závorce jsme využili pravidla o derivování součinu. Upravme si výraz za posledním rovnítkem. Výrazem $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$ jsme definovali vektor úhlového zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$, výraz $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ znamená obvodovou rychlost $\boldsymbol{v}$. Po dosazení dostáváme:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

Na pravé straně rovnice máme součet dvou vektorových součinů. Každý z těchto součinů musí mít charakter zrychlení. Podívejme se teď na poslední obrázek, kde máme všechny vektory zakresleny. Vektor, který je výsledkem součinu $\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}$ má směr rychlosti $\boldsymbol{v}$, tedy tečny ke dráze rotujícího objektu. Tento součin bude vyjadřovat tečné zrychlení $\boldsymbol{a}_t$.

$$\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}. \qquad 1.2.\text{-}18$$

Vektor, který je výsledkem součinu $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ zase směřuje do středu křivosti O a určuje normálové zrychlení $\boldsymbol{a}_n$.

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}. \qquad 1.2.\text{-}19$$

Poslední tři vztahy platí pro obecný křivočarý pohyb. **Pro kruhový pohyb** se je zjednodušíme. Začněme od tečného zrychlení. To určuje změnu velikosti obvodové rychlosti $v$. **Velikost tečného zrychlení** si můžeme tedy vyjádřit jako

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\,\varepsilon\ . \qquad 1.2.\text{-}20$$

Také výraz $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ si můžeme upravit a vyjádřit si **velikost normálového zrychlení** jako:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2\ . \qquad 1.2.\text{-}21$$

A samozřejmě si osvěžte pojmy **frekvence** a **perioda** z CD Základy fyziky a jejich souvislosti s úhlovou rychlostí. Je nutné znát vztahy:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\ . \qquad 1.2.\text{-}22$$

**TO 1.2.-16** *Kterými fyzikálními veličinami popisujeme pohyb hmotného bodu po kružnici?*

**TO 1.2.-17** *Mění se rychlost hmotného bodu, který koná rovnoměrný pohyb po kružnici?*

**TO 1.2.-18** Hmotný bod se pohybuje po kružnici o poloměru 2 m s rychlostí stejné velikosti 8 m.s$^{-1}$. *Jak velká je úhlová rychlost hmotného bodu?*

a) 4 rad.s$^{-1}$ b) 16 rad.s$^{-1}$ c) 32 rad.s$^{-1}$ d) 128 rad.s$^{-1}$

**U 1.2.-20** *Určete oběžnou dobu a frekvenci* otáčení hodinové a minutové ručičky u hodinek.

**U 1.2.-21.** Kotouč brusky koná 600 otáček za minutu. *Určete jeho frekvenci, periodu a úhlovou rychlost.*

**U 1.2.-22.** Kolotoč koná 15 otáček za minutu. *Určete jeho úhlovou rychlost a rychlost osoby* na sedačce, která opisuje kružnici o poloměru 5 m.

Podobně jako u přímočarého pohybu proberme si dva nejčastější případy pohybu po kružnici.

**1.2.6.1. Rovnoměrný pohyb po kružnici**

Pro rovnoměrný křivočarý pohyb je charakteristické, že **tečné zrychlení je rovno nule**, $\boldsymbol{a}_t = 0$. **Úhlová rychlost je konstantní,** $\omega$ = konst. Protože se jedná o rovnoměrný kruhový pohyb je **velikost normálového zrychlení konstantní**, $a_n$ = konst.

Tak jako u přímočarého pohyby i zde vyjdeme z definičního vztahu pro velikost úhlové rychlosti. Protože se její směr nemění (stále leží ve směru osy otáčení) nemusíme používat vektorovou definici.

$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ , vyjádříme si z tohoto vztahu diferenciál úhlové dráhy $\mathrm{d}\varphi = \omega \mathrm{d}t$ a tuto rovnici integrujeme:

$$\varphi = \int \omega \mathrm{d}t + C \,.$$

$$\varphi = \omega t + C$$

Musíme si stanovit integrační konstantu $C$. Fyzici vycházejí z tzv. „počátečních podmínek“. Víme, že v čase $t = 0$, tedy před dobou kdy jsme začali sledovat pohyb hmotného bodu, ten již urazil tzv. „počáteční úhlovou dráhu“ $\varphi_0$. Dosaďme tyto známé údaje do rovnice pro úhlovou dráhu.

$$\varphi_0 = \omega.0 + C.$$

Z rovnice nám vyplývá, že integrační konstanta je rovna počáteční úhlové dráze. Konečná rovnice pro uraženou úhlovou dráhu v libovolném čase $t$ je tedy dána vztahem:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0. \qquad 1.2.\text{-}23$$

Kdo jste si pořádně prostudovali tuto část o rovnoměrném pohybu po kružnici a srovnali text s textem kapitoly o rovnoměrném přímočarém pohybu ( 1.2.5.1) pak jste si jistě všimli, že text je identický (Ctrl C, Ctrl V), pouze byly nahrazeny pojmy dráha pojmem úhlová dráha, rychlost → úhlová rychlost, $s \rightarrow \varphi$, $v \rightarrow \omega$. **Po vyměnění symbolů veličin zůstaly formálně stejné i vztahy.**

**1.2.6.2. Rovnoměrně zrychlený (zpomalený) pohyb po kružnici**

Pro rovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici je charakteristické, že **velikost tečného zrychlení je konstantní,** $a_t$ = konst**,** nemění se jeho velikost, pouze se mění jeho směr. **Konstantní je i velikost normálového zrychlení** $a_n$ = konst, jedná se o kruhový pohyb. Důležité pro nás je, že **úhlové zrychlení je konstantní,** $\varepsilon$ = **konst**.

Budeme postupovat stejným způsobem jako v předešlém případě. Musíme však vyjít z definice úhlového zrychlení, které v tomto případě není nulové. Protože se však nemění jeho směr zase bude dostačovat definiční vztah pro velikost tohoto zrychlení:

$\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ a opět si z něj vyjádříme diferenciál rychlosti a vzniklou rovnici integrujeme:

$\omega = \int \varepsilon\,\mathrm{d}t + C_1$**.** Protože zrychlení je konstantní, dostaneme po integraci vztah:

$\omega = \varepsilon t + C_1$.

A protože v počátečním čase $t = 0$ se může hmotný bod již pohybovat počáteční úhlovou rychlostí $\omega_0$ vyjde nám integrační konstanta stejným postupem jako u rovnoměrného pohybu rovna počáteční úhlové rychlosti.

$\omega = \varepsilon t + \omega_0$. 1.2.-24

Potřebujeme však znát ještě úhlovou dráhu. Zase vyjdeme z definice pro úhlovou rychlost.

$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, z ní vyjádříme diferenciál úhlové dráhy, za rychlost dosadíme z předchozího vztahu a integrujeme:

$\varphi = \int (\varepsilon t + \omega_o)\,\mathrm{d}t + C_2$.

Vypočítáme integrál:

$\varphi = \dfrac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_o t + C_2$.

Zavedením počátečních podmínek (pro $t = 0$ bude $\varphi = \varphi_o$) dostaneme konečný obecný vztah pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu:

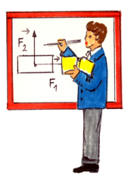
$\varphi = \dfrac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_o t + \varphi_o$. 1.2.-25

Takže jsme si odvodili další vztah a nemusíme se jej učit nazpaměť.

A ještě jedna poznámka. Jak to bude, půjde-li o rovnoměrně **zpožděný** pohyb?

Dobře si uvědomte, že v rovnici $\omega = \varepsilon t + \omega_0$ je $\omega$ konečná rychlost a $\omega_0$ počáteční rychlost. Jedná-li se o

- **zrychlený pohyb** je $\omega > \omega_0$ a zrychlení je kladné, $\varepsilon = \dfrac{\omega - \omega_o}{t} > 0$.
- **zpomalený pohyb** je $\omega < \omega_0$ a zrychlení je záporné, $\varepsilon = \dfrac{\omega - \omega_o}{t} < 0$.



Úhlová rychlost rotujícího objektu se mění s časem podle rovnice:

$\omega = (2t^2 - t + 4)$ (rad.s$^{-1}$).

a) *Jaké je úhlové zrychlení v čase 3 s?*

b) *Jaký úhel objekt opíše za 3 s*, byl-li úhel v čase nula nulový?

Obecně je úhlové zrychlení první derivací úhlové rychlosti podle času $\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$, v našem případě tedy:

$\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}(2t^2 - t + 4)}{\mathrm{d}t} = 4t - 1$ (rad.s$^{-2}$) a po dosazení za čas 3s $\underline{\varepsilon = 11 \text{ rad.s}^{-2}}$.

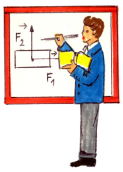
Úhlovou dráhu (úhel) obecně, můžeme vyjádřit :

$$\varphi = \int \omega \mathrm{d}t + \mathrm{C},$$

po dosazení a integraci dostáváme

$$\varphi = 2/3\, t^3 - 1/2\, t^2 + 4t + \mathrm{C}.$$

Integrační konstanta C představuje dráhu v čase nula, ale ta je v našem případě nulová, tedy C = 0. Po dosazení za čas 3 sekundy dostáváme hledanou úhlovou dráhu $\underline{\varphi_3 = 25{,}5 \text{ rad}}$.



Hmotný bod se pohybuje po kružnici poloměru 10 cm s konstantním tangenciálním zrychlením. *Najděte normálové zrychlení* tohoto bodu v čase 20 s od začátku pohybu, víte-li, že na konci páté otáčky má rychlost 1 cm.s$^{-1}$.

Ze zadání vyplývá, že jde o pohyb kruhový (konstantní poloměr) rovnoměrně zrychlený (konstantní tečné zrychlení).

Abychom mohli stanovit normálové zrychlení ze vztahu $a_n = v^2/r$, potřebujeme nejdříve vypočítat velikost rychlosti v zadaném čase. Vyjdeme ze známé rychlosti na konci páté otáčky a půjdeme na to přes tečné zrychlení. Toto souvisí s rychlostí vztahem:

$a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, ale protože tečné zrychlení je konstantní, můžeme napsat vztah ve tvaru $a_t = \dfrac{v}{t}$.

Čas potřebný k dosažení rychlosti $v$ na konci páté otáčky určíme ze vztahu pro dráhu $s$ pohybu rovnoměrně zrychleného:

$s = \dfrac{vt}{2} \quad \rightarrow \quad t = \dfrac{2s}{v} = \dfrac{2n\,2\pi r}{v}$ ,kde n je počet otáček. A po dosazení $t = \dfrac{2\ 5\ 2\pi\ 0{,}1}{0{,}1} = 20\pi$ s.

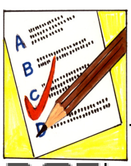
Nyní vypočítáme tečné zrychlení pohybu :

$$a_t = \frac{v}{t} \quad \rightarrow \quad a_t = \frac{0{,}1}{20\pi} = \frac{0{,}01}{2\pi} \quad \text{ms}^{-2}.$$

Rychlost v čase 20 s určíme ze vztahu $a_t = \dfrac{v}{t} \rightarrow v = a_t\, t$. Po dosazení $v = \dfrac{0{,}01}{2\pi} 20 = \dfrac{0{,}1}{\pi}$ ms$^{-1}$

A konečně lze vypočítat normálové zrychlení :

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{0{,}1^2}{\pi^2\ 0{,}1} = \underline{0{,}01}\ \text{ms}^{-2}.$$



**TO 1.2. -19** *Druhou derivací polohového vektoru podle času dostaneme*

a) velikost tečného zrychlení

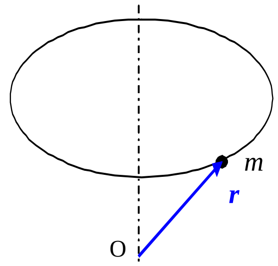
b) vektor tečného zrychlení
c) velikost normálového zrychlení
d) vektor normálového zrychlení
e) vektor zrychlení

**TO 1.2.-20** *Velikost tečného zrychlení dostaneme*
a) derivací vektoru rychlosti podle času
b) derivací velikosti rychlosti podle času
c) druhou derivací polohového vektoru podle času
d) druhou derivací velikosti polohového vektoru podle času

**TO 1.2.-21** *U rovnoměrného pohybu křivočarého dochází*
a) jen ke změně velikosti rychlosti
b) jen ke změně směru rychlosti
c) ke změně jak velikosti, tak i směru rychlosti

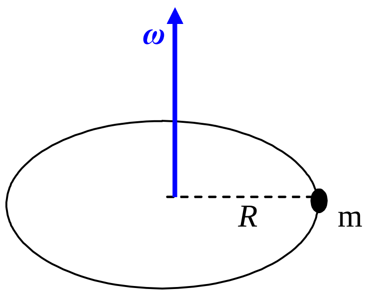
**TO 1.2.-22** *U křivočarého pohybu nerovnoměrného má celkové zrychlení* v daném bodě dráhy směr
a) dráhy
b) rychlosti
c) normály v daném bodě
d) tečny v daném bodě
e) žádná správná odpověď

**TO 1.2.-23** Hmotný bod se pohybuje po kružnici s úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$, resp. obvodovou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Mezi vektorem úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ a vektorem obvodové rychlosti $\boldsymbol{v}$ *platí vztah*
a) $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}$
b) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}$
c) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}$
d) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
e) $\boldsymbol{\omega} = r \times v$

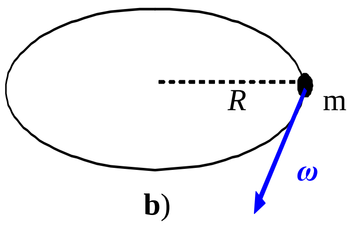



**TO 1.2.-24** Hmotný bod se pohybuje po kružnici poloměru $r$ s obvodovou rychlostí $v$. S použitím zadaných veličin ($r$,$v$) *napište vztah pro výpočet velikosti normálového zrychlení*.
$a_n$ =

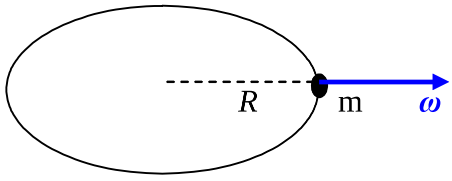
**TO 1.2.-25** Těleso se pohybuje po kružnici poloměru $R$ s úhlovou rychlostí $\omega$. Rozhodněte *na kterém obrázku j*e tento vektor správně nakreslen.




a)




**b**)




c)

**TO 1.2.-26** Hmotný bod rotuje po kružnici poloměru $r$ = 5 m s konstantní obvodovou rychlostí 10 m/s. *Vypočítejte jeho tečné zrychlení.* $a_t$ =

**TO 1.2. -27** Hmotný bod se pohybuje po kružnici poloměru 5 m, přičemž velikost jeho rychlosti se mění podle rovnice: $v = t^2 + 1$ (m/s,s). *Určete velikost tečného zrychlení* na *konci druhé sekundy* pohybu. $a_t$ =

**TO 1.2.-28** Hmotný bod se pohybuje po kružnici tak, že jeho úhlová dráha je dána rovnicí : $\varphi = \pi . t^{2,5}$. *Napište rovnici pro úhlovou rychlost.* $\omega$ =

Na závěr této kapitoly si provedeme užitečné srovnání přímočarých a kruhových pohybů. Ze srovnání budete vidět analogii mezi těmito dvěma druhy pohybů hmotného bodu.

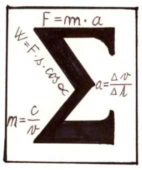
| ***Přímočarý pohyb*** | | ***Kruhový pohyb*** | |
|---|---|---|---|
| ***Název veličiny*** | | ***Název veličiny*** | |
| dráha | $s$ | úhlová dráha | $\varphi$ |
| dráha | $s = \int v\mathrm{d}t + C$ | úhlová dráha | $\varphi = \int \omega \mathrm{d}t + C$ |
| polohový vektor | $\boldsymbol{r}$ | vektor úhlové dráhy | $\boldsymbol{\varphi}$ |
| rychlost | $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ | úhlová rychlost | $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ |
| rychlost | $v = \int a\mathrm{d}t + C_1$ | úhlová rychlost | $\omega = \int \varepsilon \mathrm{d}t + C_1$ |
| vektor rychlosti | $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ | vektor úhlové rychlosti | $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}$ |
| zrychlení | $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ | úhlové zrychlení | $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$ |
| vektor zrychlení | $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ | vektor úhlového zrychlení | $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}$ |

**rovnoměrný pohyb**

| ***Přímočarý pohyb*** | | ***Kruhový pohyb*** | |
|---|---|---|---|
| ***Název veličiny*** | | ***Název veličiny*** | |
| dráha | $s = vt + s_o$. | úhlová dráha | $\varphi = \omega t + \varphi_o$ |
| rychlost | $v$ = konst. | úhlová rychlost | $\omega$ = konst. |
| zrychlení | $a = 0$ | úhlové zrychlení | $\varepsilon = 0$ |

**rovnoměrně zrychlený pohyb**

| ***Přímočarý pohyb*** | | ***Kruhový pohyb*** | |
|---|---|---|---|
| ***Název veličiny*** | | ***Název veličiny*** | |
| dráha | $s = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + s_o$ | úhlová dráha | $\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_o t + \varphi_o$ |
| rychlost | $v = at + v_o$. | úhlová rychlost | $\omega = \varepsilon t + \omega_o$ |
| zrychlení | $a$ = konst | úhlové zrychlení | $\varepsilon$ = konst |




1. Kinematika popisuje mechanický pohyb, nezkoumá jeho příčinu. Mechanický pohyb je popsán dráhou, rychlostí a zrychlením.

2. **Trajektorie** je souhrn všech poloh, kterými pohybující se objekt postupně prochází. Trajektorie je geometrická čára.

3. Polohu objektu určujeme pomocí **polohového vektoru *r***. Je to vektor mající působiště v počátku pravoúhlé souřadné soustavy a s koncovým bodem ve vyšetřovaném bodě. Velikost polohového vektoru vyjádříme pomocí jeho složek $x$, $y$, $z$ jako $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

4. Délka trajektorie, kterou hmotný bod opíše za určitou dobu je **dráha** $s$. Jednotkou dráhy je metr.

5. Přírůstek dráhy $\Delta s$ za čas $\Delta t$ je průměrná **rychlost** $v$, $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, vektor okamžité rychlosti je $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ . Jednotkou rychlosti je m/s. Rychlost je vektor, u přímočarých pohybů je

její směr konstantní, u křivočarých pohybů změna směru rychlosti způsobí zakřivení trajektorie.

6. Změna rychlosti $\Delta v$ za čas $\Delta t$ je průměrné **zrychlení** $a$, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, vektor okamžitého zrychlení je $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$. Jednotkou zrychlení je m/s$^2$. Zrychlení je vektor, který rozkládáme do dvou složek, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_t} + \boldsymbol{a_n}$. $\boldsymbol{a_t}$ je **tečné zrychlení** a způsobuje změnu velikosti rychlosti. $\boldsymbol{a_n}$ je **normálové zrychlení,** které způsobuje změnu směru rychlosti a je příčinou zakřivení trajektorie.

7. **Přímočarý pohyb** je charakterizován tím, že jeho **normálové zrychlení je rovno nule.**

- U **přímočarého pohybu rovnoměrného** je **zrychlení nulové,** jeho rychlost je konstantní. Dráha tohoto pohybu je dána vztahem $s = v\,t + s_o$, kde $s_o$ je počáteční dráha.

- U **přímočarého pohybu rovnoměrně zrychleného** je **zrychlení konstantní**, rychlost rovnoměrně roste s časem $v = a\,t + v_o$, $v_o$ je počáteční rychlost. Dráhu vyjádříme jako $s = \frac{1}{2} a\,t^2 + v_o\,t$.

8. Pro **pohyb po kružnici** je charakteristické **konstantní normálové zrychlení**. To zrychlení se označuje jako dostředivé zrychlení a je dáno vztahem $a_d = \frac{v^2}{r}$.

9. U křivočarých pohybů zavádíme nové veličiny:

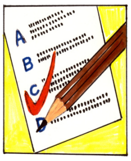
- **Úhlovou dráhu** $\varphi$ jako středový úhel, který opíše průvodič $r$ za dobu $t$. Jednotkou je rad.
- **Úhlovou rychlost** $\omega$ jako podíl změny úhlové dráhy a doby pohybu $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$. Jednotkou je rad.s$^{-1}$. Úhlová rychlost a rychlost pohybu spolu souvisejí vztahem $v = r\,\omega$.
- **Úhlové zrychlení** $\varepsilon$ *j*ako podíl změny úhlové rychlosti a doby pohybu $\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$. Jednotkou je rad.s$^{-2}$.
- **Frekvenci** $f$ - počet oběhů po kružnici za jednotku času s jednotkou s$^{-1}$.
- **Periodu** $T$ jako dobu jednoho oběhu vyjadřovanou v sekundách. Periodu je možné vyjádřit jako převrácenou hodnotu frekvence $T = \frac{1}{f}$. Obě poslední veličiny souvisejí s úhlovou rychlostí vztahem $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\,\pi\,f$.

10. U kruhového pohybu rovnoměrného je tečné zrychlení rovno nule, velikost normálového zrychlení konstantní. Úhlová dráha tohoto pohybu je dána vztahem $\varphi = \omega\,t + \varphi_o$, kde $\varphi_o$ je počáteční dráha.

11. U kruhového pohybu rovnoměrně zrychleného je tečné zrychlení konstantní, velikost normálového zrychlení je také konstantní. Úhlová rychlost tohoto pohybu je dána vztahem $\omega = \varepsilon\,t + \omega_o$, kde $\omega_o$ je počáteční úhlová rychlost. Úhlová dráha tohoto pohybu je

dána vztahem $\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_o t + \varphi_o$, kde $\omega_o$ je počáteční úhlová rychlost a $\varphi_o$ je počáteční úhlová dráha.

# Klíč



**TO 1.2. -1** ano, ne, ano, ano, ano

**TO 1.2.-2** Tyto veličiny nelze absolutně určit, vždy záleží na volbě vztažné soustavy.

**TO 1.2.-3** V klidu vůči autu, v pohybu vůči Zemi.

**TO 1.2.-4** přímočaré, křivočaré

**TO 1.2.-5** křivočarý, křivočarý, přímočarý, přímočarý, křivočarý, křivočarý, křivočarý

**TO1.2.-6** oblouk kružnice, bod, spirálu

**TO 1.2.-7** d

**TO 1.2.-8** c

**TO 1.2.-9** b

**TO 1.2.-10** a

**TO 1.2.-11** a

**TO 1.2.-12** c

**TO 1.2.-13** b

**TO 1.2.-14** a, vycházíme ze směrnice úsečky, $a = \Delta v / \Delta t$

**TO 1.2.-15** d, $v = a\,t$

**TO 1.2.-16** průvodičem, úhlovou dráhou a úhlovou rychlostí, rychlostí, frekvencí a periodou, dostředivým zrychlením

**TO 1.2.-17** nemění se velikost, jen směr

**TO 1.2.-18** a, $\omega = v/r$

**TO 1.2.-19** e)

**TO 1.2.-20** b), d)

**TO 1.2.-21** b)

**TO 1.2.-22** e)

**TO 1.2.-23** d)

**TO 1.2.-24** $v^2/r$

**TO 1.2.-25** a)

**TO 1.2.-26** 0 $m.s^{-2}$

**TO 1.2.-27** 4 $m.s^{-2}$

**TO 1.2.-28** $2{,}5\,\pi t^{1{,}5}$

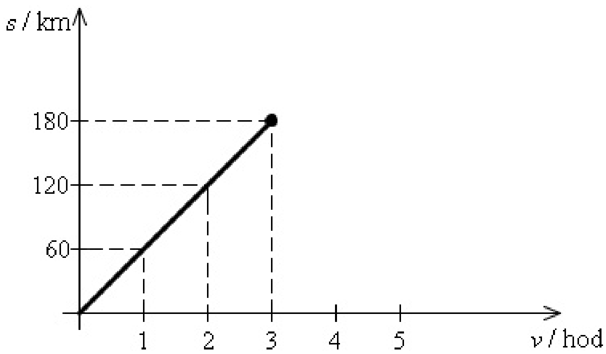
**U 1.2.-1** $\boldsymbol{r}$ [3 m,1 m,0], nebo dostačuje $\boldsymbol{r}$ [3 m,1 m]. $r = \sqrt{3^2 + 1^2)} = 3{,}2\ \mathrm{m}$.

$\sin\alpha = \dfrac{3}{3{,}2}$, $\sin\beta = \dfrac{1}{3{,}2}$

**U 1.2.-2** 5s = 35 m, 10s = 70 m

**U 1.2.-3** v případě b)

**U 1.2.-4** Grafem závislosti dráhy na čase bude přímka, Obr.1.2.-6




**U 1.2. -5** $v = 90\ \mathrm{km}/\mathrm{h} = 90\,\dfrac{1000\ \mathrm{m}}{60.60\ \mathrm{s}} = 25\ \mathrm{m}/s$

**U 1.2. -6** $v$ = d$s$/d$t$ = d/d$t$($6t^3 + 5t + 2$) = $18t^2 + 5$

**U 1.2.-7** 36 minut

**U 1.2.-8** $a = a_t = 0{,}5\ \mathrm{m.s^{-2}}$ U přímočarého pohybu nedochází ke změně směru rychlosti, proto **normálové zrychlení je vždy nulové.** U přímočarého pohybu je celkové zrychlení rovno tečnému zrychlení.

**U 1.2. -9** $a = 6\mathrm{t} + 2$

**U 1.2.-10** $a = 24t - 6$, $a_2 = 42\ \mathrm{m.s^{-2}}$

**U 1.2.-11** $v = 2t^3 + 4t$

**U 1.2. -12** velikostí

**U 1.2.-13** $2\ \mathrm{m.s^{-1}}$

**U 1.2.-14** $6\ \mathrm{m.s^{-1}}$, počáteční dráhu, $s_o = 1$ m.

**U 1.2.-15** a) $v = v_o + a\,t$ , $s = s_o + v_o\,t + 1/2\,a\,t^2$

b) 16 s , vyjdeme z rovnice pro rychlost $40 = 8 + 2\,t$

c) 7 s, vyjdeme z rovnice pro dráhu $110 = 5 + 8\,t + ½\,2\,t^2$

**U 1.2.-16** 33,3 s, vyjdeme z rovnice pro rychlost $20 = 0{,}6\,t$

330 m, vyjdeme z rovnice pro dráhu $s = ½\ 0{,}6\ 33^2$

**U 1.2.-17** 26 m

Vycházíme z rovnic $s = ½\,g\,t^2$ a $v = g\,t$. Z druhé rovnice vyjádříme čas, dosadíme ho do první a vypočítáme dráhu. Pozor na jednotku rychlosti.

**U 1.2.-18** o 9,81 m/s, 24,5 m

Nejdříve si stanovíme změnu rychlosti od druhé do třetí sekundy. $\Delta v = v_3 - v_2$ , dolním indexem označujeme čas, ve kterém určujeme rychlost. Stejným způsobem vypočítáme uraženou dráhu $\Delta s = s_3 - s_2$.

**U 1.2.-19** $2\pi$

**U 1.2.-20** hodinová ručička: 3600 s, 1/3600 $s^{-1}$. minutová ručička: 60 s ; 1/60 $s^{-1}$

**U 1.2.-21** 10 $s^{-1}$, 0,1 s ; 63 rad/s

**U 1.2.-22** 1,67 rad/s ; 7,9 m/s