KLÍČ MODULU 1. MECHANIKA

1.1.1. POHYB HMOTNÉHO BODU

ZTO 1.1.1.-1 d
BTO 1.1.1.-2 rovnice přímky: $3x - 4y - 3 = 0$
BTO 1.1.1.-3 rovnice kružnice: $x^2 + y^2 = 4$

1.1.2. RYCHLOST HMOTNÉHO BODU

ZTO 1.1.2.-1 I) c, II) a, III) b, IV) d
ZTO 1.1.2.-2 Nápověda: Vůči vodě jede loďka šikmo, složka rychlosti proti proudu je rovna rychlosti řeky, aby vzhledem ke břehu nebyla loďka strhávána po proudu. Složka rychlosti kolmo k proudu řeky je dána šířkou řeky a dobou, během níž loďka řeku přepluje.
I) d, II) a, III) c, IV) b, V) b
BTO 1.1.2.-3 $v = 18t^2 + 5$, (m.s^{-1}, s)
BTO 1.1.2.-4 $s = t^3 + t^2 + 5t$, (m, s)
BTO 1.1.2.-5 7 m.s^{-1}
BTO 1.1.2.-6 38 m.s^{-1}
BTO 1.1.2.-7 $6t$
ZU 1.1.2.-1 150 m
ZU 1.1.2.-2 20 m.s^{-1}
ZU 1.1.2.-3 $v_1 = 6{,}8$ m.s^{-1}, $v_2 = 1{,}8$ m.s^{-1}
ZU 1.1.2.-4 1,02 m.s^{-1}
ZU 1.1.2.-5 8,66 m.s^{-1}
ZU 1.1.2.-7 jeho záměr se mu nemůže podařit
BU 1.1.2.-8 120 km.h^{-1}
BU 1.1.2.-9 a) 80 km.h^{-1}, b) 114,7 km, 201,3 km, c) 8h 59min

1.1.3. ZRYCHLENÍ HMOTNÉHO BODU

ZTO 1.1.3.-1 I) b, II) a, III) b
BTO 1.1.3.-2 I) $36t$, II) 72 m.s^{-2}, III) 5,57 m.s^{-2}
BTO 1.1.3.-3 b
BTO 1.1.3.-4 a
BTO 1.1.3.-5 c
BTO 1.1.3.-6 b
BU 1.1.3.-2 a) 5 m.s^{-1}, b) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha \cong 53^0$, c) 1 s, x = 3 m, y = 2 m, d) 0 m, 6 m
BU 1.1.3.-3 11 m.s^{-1}, 15,6 m.s^{-2}
BU 1.1.3.-4 a) 14 m, 7 m.s^{-1}, -4 m.s^{-2}, b) 3 s, c) 4/3 s
BU 1.1.3.-5 a) pro obecné řešení: souřadnice HB v libovolném okamžiku jsou dány parametrickými rovnicemi trajektorie: $x = 2t + 5,\ y = -t^2,\ z = \frac{1}{3}t^3$, po třech sekundách pohybu platí: [11 m, -9 m, 9 m, b) $\vec{v}(t) = 2\vec{i} - 2t\vec{j} + t^2\vec{k}$, $\vec{a}(t) = -2\vec{j} + 2t\vec{k}$, $v_1 = 11$ m.s^{-1}, $a_1 = 6{,}32$ m.s^{-2}, c) $a_t = 2t$, $a_n = 2$ m.s^{-2}

1.1.4. PŘÍMOČARÝ POHYB HMOTNÉHO BODU

ZTO 1.1.4.-1 b
ZTO 1.1.4.-2 I) b, II) g, III) c

ZTO 1.1.4.-3 I) b, II) b
ZTO 1.1.4.-4 I) a II) c
ZTO 1.1.4.-5 c
ZTO 1.1.4.-6 $\Delta s = \frac{1}{2}at_5^2 - \frac{1}{2}at_4^2 \Rightarrow a = \frac{2\Delta s}{t_5^2 - t_4^2} = 10$ m.s^{-2}
BTO 1.1.4.-7 I) c, II) a, III) c, IV d)
BTO 1.1.4.-8 d
ZTO 1.1.4.-9 c
BU 1.1.4.-1 3 s, 9 m
ZU 1.1.4.-2 1,2 km
ZU 1.1.4.-3 1 km
BU 1.1.4.-4 a) $\frac{4x}{3} - y = 0$, tj. přímka procházející počátkem soustavy souřadnic, $r = \sqrt{x_{max}^2 + y_{max}^2} = 0{,}5$ m, b) $v_0 =$ 5 m.s^{-1}, $a_0 = 0$ m.s^{-2}, c) $v_{max} =$ 5 m.s^{-1}, $a_{max} = 50$ m.s^{-2}
ZU 1.1.4.-5 a) $v(t) = 0{,}0028t^2$, $a(t) = 0{,}0009t^3$, b) $v_1 = 22{,}5$ m.s^{-1}, $s_1 = 675$ m c) $v_2 =$ 0,26 m.s^{-1}, $s_2 = 0{,}92$ m
ZU 1.1.4.-6 1,5 m.s^{-2}, 108 km.h^{-1}
BU 1.1.4.-7 3 m.s^{-2}, 11 km.h^{-1}
ZU 1.1.4.-9 2,58 s, 0,4 s, 2,45 m.s^{-1}
ZU 1.1.4.-10 a) 5s, b) 10 s a resp. také 0 s, ale tento kořen postrádá pro náš příklad fyzikální smysl, c) 18 m.s^{-1}
BU 1.1.4.-11 30 s, 225 m, 15 m.s^{-1} a 30 m.s^{-1}

1.1.5. POHYB HMOTNÉHO BODU PO KRUŽNICI

ZTO 1.1.5.-1 I) a, II) a, III) c
ZTO 1.1.5.-2 I) b, c, II) a III) b
BTO 1.1.5.-3 b
ZTO 1.1.5.-4 c
BTO 1.1.5.-5 10 rad.s^{-1}
ZTO 1.1.5.-6 3,3.10^{3} m.s^{-2}
ZTO 1.1.5.-7 0,15 m
ZTO 1.1.5.-8 3090 m.s^{-1}
ZTO 1.1.5.-9 A
BTO 1.1.5.-10 I) a, II) b
BTO 1.1.5.-11 12,57 rad.s^{-2}
BTO 1.1.5.-12 1,6 rad.s^{-2}
BU 1.1.5.-1 5 m.s^{-2}, 4 m.s^{-2}, 6,4 m.s^{-2}
ZU 1.1.5.-2 5,8g
ZU 1.1.5.-4 12,6 m.s^{-1}, 0 m.s^{-2}, 316 m.s^{-2}
ZU 1.1.5.-6 5,17 m
BU 1.1.5.-8 a) 1,2 m.s^{-1}, b) 0,8 m.s^{-2}, c) 7,2 m.s^{-2}, d) 6° 20´
ZU 1.1.5.-9 0,15 m.s^{-2}, 0,25 m.s^{-2}
BU 1.1.5.-10 1:20
ZU 1.1.5.-11 0,4 m.s^{-2}, 12,80 m.s^{-2}, 12,81 m.s^{-2}
BU 1.1.5.-12 10 s
BU 1.1.5.-14 a) 463,8 m.s^{-1}, b) 298,1 m.s^{-1}
ZU 1.1.5.-15 1047,4 m, 52,3 m.s^{-1}

BU 1.1.5.-16 10π rad.s^{-1}

1.2.1. Síla

ZTO 1.2.1.-1 I) c, II) b, III) d, IV) c
ZTO 1.2.1.-2 I) d, II) b
ZTO 1.2.1.-3 a, b, d

1.2.2. NEWTONOVY POHYBOVÉ ZÁKONY

ZTO 1.2.2.-1 I) c, II) a
BTO 1.2.2.-2 I) a, II) b, III) a
ZTO 1.2.2.-3 I) b, II) d
ZTO 1.2.2.-4 I) b, II) d, III) b
ZTO 1.2.2.-5 I) B, II) A
ZTO 1.2.2.-6 I) a, c, II) a, c, d, III) f, IV) b
ZTO 1.2.2.-7 I) a, II) c
ZTO 1.2.2.-8 b
ZTO 1.2.2.-9 a
ZTO 1.2.2.-10 40 kg
ZTO 1.2.2.-11 $1{,}6.10^{3}$ N
BTO 1.2.2.-12 $F = 4t + 3$
BTO 1.2.2.-13 I) 14 m.s^{-1}, II) a = 2t – ½, III) 6,75 m
ZTO 1.2.2.-14 150 N
ZTO 1.2.2.-15 0,5 m.s^{-2}
ZTO 1.2.2.-16 1700 N, 1,4 m.s^{-2}
BTO 1.2.2.-17 e
ZU 1.2.2.-1 1,14 m.s^{-2}, 172 km.h^{-1}
ZU 1.2.2.-2 31,3 m
ZU 1.2.2.-3 66,7 m
BU 1.2.2.-4 $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} = 2$ m.s^{-2}, $F_T = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} F = 6$ N
ZU 1.2.2.-5 2100 N
ZU 1.2.2.-6 a) = b)= 5800 N, c) 113 km.h^{-1}
BU 1.2.2.-8 20 m.s^{-1}, 22°

1.2.3. HYBNOST A IMPULZ SÍLY

ZTO 1.2.3.-1 I) b, II) c, III) d
ZTO 1.2.3.-2 I) d, II) a, III) d
BTO 1.2.3.-3 d
BTO 1.2.3.-4 6 kg.m.s^{-1}
ZTO 1.2.3.-5 0,4 kg.m.s^{-1}
BU 1.2.3.-6 I) b, II) c
ZU 1.2.3.-1 100 N
ZU 1.2.3.-2 4.10^{-2} s, 5.10^{3} N
BU 1.2.3.-4 0,053 m.s^{-1}
ZU 1.2.3.-5 2,25 m.s^{-1}
ZU 1.2.3.-6 Nápověda: řešte pomocí zákona zachování hybnosti. 1,93 m.s^{-1} v původním směru

1.3.1 MECHANICKÁ PRÁCE, VÝKON, ÚČINNOST

ZTO 1.3.1.-1 I) a, II) c, III) a, IV) b
BTO 1.3.1.-2 c
BTO 1.3.1.-3 50 J
BTO 1.3.1.-4 8 J
ZTO 1.3.1.-5 I) b, II) d
ZTO 1.3.1.-6 d
BTO 1.3.1.-7 I) a, II) d
ZTO 1.3.1.-8 c
ZTO 1.3.1.-9 I) 500 J, II) 8,33 W
BU 1.3.1.-1 8 J
BU 1.3.1.-2 680 J
ZU 1.3.1.-4 4,9 kW
ZU 1.3.1.-5 17,4 kN
ZU 1.3.1.-6 96.10^6 J, 1600 kW
ZU 1.3.1.-7 2.10^7 J, 2.10^6 W, 1.10^6 W

1.3.2 MECHANICKÁ ENERGIE

ZTO 1.3.2.-1 I) c, II) b
ZTO 1.3.2.-2 I) a, II) c, III) d, IV) b
ZTO 1.3.2.-3 16 J
ZTO 1.3.2.-4 I) c, II) d
ZTO 1.3.2.-5 I) b, II) b, III) d
BTO 1.3.2.-6 7,2 m
ZTO 1.3.2.-7 a, b, c
ZU 1.3.2.-1 a) 14 $m.s^{-1}$, b) 2600 J, c) 3,5 s
BU 1.3.2.-2 77,3 $km.h^{-1}$, 0,2 $m.s^{-2}$
ZU 1.3.2.-4 dle zákona zachování energie (volba nulové hladiny potenciální energie – úpatí kopce): $\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \; v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 67$ $km.h^{-1}$
BU 1.3.2.-5 $5,12.10^5$ J
ZU 1.3.2.-6 1500 J
BU 1.3.2.-7 $s = \dfrac{mv_0^2\left(n^2 - 1\right)}{2F}$
BU 1.3.2.-8 Nápověda: vyjděte ze zákona zachování mechanické energie; kritickým bodem pohybu se stává bod na vrcholu válcové plochy.
5/2 R
BU 1.3.2.-9 10 kN

1.4.1. Newtonův gravitační zákon

ZTO 1.4.1-1 144 N
ZTO 1.4.1-2 144 N
ZTO 1.4.1-3 a
ZTO 1.4.1-4 $x : d$ =9:10
ZU 1.4.1.-2 $2,4.10^{-3}$ N
ZU 1.4.1.-3 $1,9.10^{24}$ kg, $2,2.10^{-4}$ $m.s^{-2}$, $2,1.10^{-7}$ $m.s^{-2}$

1.4.2. POPIS GRAVITAČNÍHO POLE

ZTO 1.4.2.-1 c

ZTO 1.4.2.-2 K/9
ZTO 1.4.2.-3 3K
ZTO 1.4.2.-4 12 N
BU 1.4.2.-1 8,5 m.s^{-2}

1.4.3. GRAVITAČNÍ A TÍHOVÉ POLE ZEMĚ

ZTO 1.4.3.-1 Nemůže uletět, jeho tíha se vlivem odstředivé síly sníží jen asi o 0,3 %. Tíhová síla je vždy větší než síla odstředivá.
ZU 1.4.3.-1 $h = R_Z\left(\sqrt{2}-1\right) = 2640$ km

1.4.4. POHYBY V HOMOGENNÍM TÍHOVÉM POLI ZEMĚ

ZTO 1.4.4.-1 I) c, II) c, III) b
ZTO 1.4.4.-2 I) b, II) b, III) b, IV) c
ZTO 1.4.4.-3 I) 20 m.s^{-1}, II) 2,83 s, III) 20,04 m (pohyb v této sekundě trvá pouze 0,83 s!), IV) 40,04 m (pohyb v tomto intervalu trvá pouze 2,83 s!).
ZTO 1.4.4.-4 I) b, II) a
BTO 1.4.4.-5 d
ZTO 1.4.4.-6 c
ZTO 1.4.4.-7 Nejsou nám nebezpečné, jsou bržděny ve vzduchu. Bez odporu prostředí by měly kapky rychlost jako vystřelený projektil z revolveru.
ZTO 1.4.4.-8 b
ZTO 1.4.4.-9 c
BTO 1.4.4.-10 10 m.s^{-1}
ZU 1.4.4.-1 5,36 s
ZU 1.4.4.-2 $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{gt_1}{gt_2} = 2,\ \dfrac{s_1}{s_2} = \dfrac{\frac{1}{2}gt_1^2}{\frac{1}{2}gt_2^2} = 4$
BU 1.4.4.-3 3 s, 45 m.s^{-1}
BU 1.4.4.-4 80 m, 120 m, 40 m.s^{-1}, 30 m.s^{-1}
ZU 1.4.4.-7 a) 3 s, b) 75 m, c) 39 m.s^{-1}
ZU 1.4.4.-8 $v_0 = n\sqrt{\dfrac{gh}{2}}$
ZU 1.4.4.-9 6,25 kJ
BU 1.4.4.-10 letí ve směru tečny ke kružnici, dopadne ve vzdálenosti 3,9 m
ZU 1.4.4.-11 40 J, 20 m
ZU 1.4.4.-12 a) 10,8 m.s^{-1}, 5,1 s, c) 127,4 m, d) 10,2 s, e) 50 m.s^{-1}
ZU 1.4.4.-13 127 m.s^{-1}
ZU 1.4.4.-14 7°58´, 35,4 m.s^{-1}
BU 1.4.4.-15 0,125 s, 0,53 m, 3,67 m.s^{-1}, 6,12 m.s^{-1}
BU 1.4.4.-16 44,2 m.s^{-1}

1.4.5. RADIÁLNÍ GRAVITAČNÍ POLE ZEMĚ

BTO 1.4.5.-1 I) d, II) c, III) b, IV) a, V) b , VI) c
BTO 1.4.5.-2 b, *neboť o půlnoci se rychlost otáčení Země přičítá k postupné rychlosti Země, v poledne se odečítá (princip skládání rychlostí)*
ZTO 1.4.5.-3 I) a, II) b, III) c
BTO 1.4.5.-4 d

BTO 1.4.5.-5 b
ZU 1.4.5.-1 7,59 km.s^{-1}, 5370 s

1.5. MECHANIKA SOUSTAV HMOTNÝCH BODŮ A TUHÝCH TĚLES

ZTO 1.5.1.-1 I) b, II) c, III) a, IV) b, V) b
ZTO 1.5.1.-2 I) b, II) c, III) d
BTO 1.5.1.-3 e
BTO 1.5.1.-4 I) f, II) a, III) c
BTO 1.5.1.-5 10 N
BTO 1.5.1.-6 5 m.s^{-2}
ZTO 1.5.1.-7 a
BTO 1.5.1.-8 $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$
ZTO 1.5.1.-9 kg.m^2.s^{-2}
ZTO 1.5.1.-10 I) c, II) d, III) d, IV) b, V) a
BTO 1.5.1.-11 Nápověda: ověřte výpočtem pomocí zákona zachování momentu hybnosti I) b, II) b
BTO 1.5.1.-12 d
ZTO 1.5.1.-13 b
ZTO 1.5.1.-14 I) 10 N.m, II) 14,1 N.m, III) 14,1 N.m, IV) 20 N.m
ZTO 1.5.1.-15 a) F_5, b) F_1, F_4, c) F_3, F_6
ZTO 1.5.1.-16 I) c, II) b
ZU 1.5.1.-1 108 km.h^{-1}, 94,2 rad.s^{-1}, 15
BU 1.5.1.-3 6,7 m.s^{-1}
BU 1.5.1.-4 $\eta = \frac{W_0}{W} = \frac{mgs\sin\alpha}{mas} = \frac{mgs\sin\alpha}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)s} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = 0{,}743$
BU 1.5.1.-5 0,43
BU 1.5.1.-7 $a_1 > a_2$
BU 1.5.1.-8 1,4 m.s^{-2}, 1,68 N
BU 1.5.1.-9 1,045 kg
BU 1.5.1.-10 $a = \frac{m_2 g - \frac{m_1 g h}{l}}{m_1 + m_2} = 0{,}23$ m.s^{-2}, $F = ma = 1{,}34$ N
BU 1.5.1.-11 4,24 N
BU 1.5.1.-12 0,4 kN.m

1.5.2. SKLÁDÁNÍ SIL

ZU 1.5.2.-2 $F_1 = F_2 = \frac{mg}{\sqrt{3}}$

$$F_1 = \frac{\sqrt{3}\,mg}{2}, F_2 = \frac{mg}{2}$$

BU 1.5.2.-3 $F = \frac{1}{2}\frac{l}{\sqrt{l^2 - (a/2)^2}}mg = 50$ N
ZU 1.5.2.-4 a) 90 N, 0,7 m od větší síly, b) 30 N, 2,1 od větší síly

1.5.3. TĚŽIŠTĚ TUHÉHO TĚLESA

ZTO 1.5.3.-1 1,8 m, -1,2 m

ZTO 1.5.3.-2 3 m
ZU 1.5.3.-5 2,17 m, 0,67 m, -1,17 m
BU 1.5.3.-6 těžiště leží na ose souměrnosti ve vzdálenosti $3/8\,R$ od středu koule

BU 1.5.3.-7 $x_0 = 0,\ y_0 = \dfrac{r_1^2 h_1 (2h_2 + h_1) + r_2^2 h_2^2}{2(r_1^2 h_1 + r_2^2 h_2)}$

ZU 1.5.3.-8 720 J

1.5.4. ENERGIE TUHÉHO TĚLESA

ZTO 1.5.4.-1 a
ZTO 1.5.4.-2 I) c, II) a
BTO 1.5.4.-3 1,22 Hz
ZTO 1.5.4.-4 I) b, II) d
ZTO 1.5.4.-5 4 kg
ZTO 1.5.4.-6 $7mR^2/5$
ZTO 1.5.4.-7 a
BTO 1.5.4.-8 0 J
ZTO 1.5.4.-9 0,75 kJ
BTO 1.5.4.-10 $\sqrt{2gH}$
BTO 1.5.4.-11 $\sqrt{\dfrac{4gH}{3}}$
BU 1.5.4.-1 10 s
BU 1.5.4.-2 6,1 kg.m^2
BU 1.5.4.-3 118,4 m
BU 1.5.4.-4 4,5 s
BU 1.5.4.-5 6 s
ZU 1.5.4.-6 Pomůcka: momenty setrvačnosti zadaných těles:

tenké obruče mR^2, *plného válce* $\dfrac{1}{2}mR^2$, *plné koule* $\dfrac{2}{5}mR^2$

$$E_K = mv^2, E_K = \frac{3}{4}mv^2, E_K = \frac{7}{10}mv^2$$

BU 1.5.4.-8 $v = \sqrt{3gh}$, těžiště, tj bod ve výšce $h_1 = \dfrac{2}{3}h$

BU 1.5.4.-9 $v = \sqrt{6gl} =$7,7 m.s^{-1}, $F = 4mg$ =39,2 N

1.6.1. Netlumené kmitání

ZTO 1.6.1-4 c
ZTO 1.6.1-5 b
ZTO 1.6.1-6 d
ZTO 1.6.1-7 b
ZTO 1.6.1-8 d
ZTO 1.6.1-9 a,c
ZTO 1.6.1-10 b
ZTO 1.6.1-11 d
ZTO 1.6.1-12 b

ZTO 1.6.1-13 a
ZTO 1.6.1-14 b
ZTO 1.6.1-15 a
ZTO 1.6.1-16 d
ZTO 1.6.1-17 a
ZTO 1.6.1-18 b
ZTO 1.6.1-19 a
ZTO 1.6.1-20 d
ZTO 1.6.1-21 c
ZTO 1.6.1-22 a
ZTO 1.6.1-23 a
ZTO 1.6.1-24 a
ZTO 1.6.1-25 b
ZTO 1.6.1-26 a
ZTO 1.6.1-27 b
ZTO 1.6.1-28 a
BTO 1.6.1-29 a,d
ZTO 1.6.1-30 a
ZTO 1.6.1-31 b

ZU 1.6.1-32 $F_1 = k\,y_1$. Pak $k = \frac{F_1}{y_1}$ dosadíme do vztahu $F_2 = k\,y_2 = \frac{F_1}{y_1}y_2 = 2\,\mathrm{N}$

ZU 1.6.1-33 Síla pružnosti je $F = k\,y$. Z toho plyne, že $k = \frac{F}{y}$ a zároveň $k = m\,\omega^2$. Pak

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{F}{m\,y}}\,.$$

Po dosazení je $\omega = 50\,\mathrm{rad}$.

ZU 1.6.1-34 Z rovnovážné polohy do bodu vratu (amplitudy) urazí těleso čtvrtinovou dráhu. Pak čas $t = \frac{T}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5\,\mathrm{s}$.

ZU 1.6.1-35 $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}5} = 2\,\mathrm{s}$

ZU 1.6.1-36 Z rovnovážné polohy do bodu vratu (amplitudy) a opět do rovnovážné polohy urazí těleso poloviční dráhu. Pak čas *t* představuje poloviční dobu potřebnou k vykonání jednoho kmitu. $t = \frac{T}{2} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25\,\mathrm{s}$.

ZU 1.6.1-37 a) ω = 20 rad.s^{-1}, b). $f = \frac{10}{\pi}$ rad.s^{-1} , c) $T = \frac{\pi}{10}$ s, d) $\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$ rad, e) $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ rad, f) A = 0,1 m

ZU 1.6.1-38 Srovnáním s rovnicí $y = A\sin\left(\omega\,t + \varphi_0\right)$ zjistíme, že $\omega = 0{,}5\pi$.

Protože $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0{,}5\pi} = 4\,\mathrm{s}$. Z rovnovážné polohy do bodu vratu se těleso dostane za čtvrtinu periody. Pak $t = \frac{T}{4} = \frac{4}{4} = 1\,\mathrm{s}$.

ZU 1.6.1-39 Použijeme rovnicí $y = A\sin\left(\omega\, t + \varphi_0\right)$. Po dosazení hodnot je

$y = 1\sin\left(\omega.0 + \frac{\pi}{4}\right) = 1\sin\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = 1\sin\frac{\pi}{4} = 0{,}707\,\mathrm{m}$.

ZU 1.6.1-40 Použijeme rovnicí $y = A\sin\left(\omega\, t + \varphi_0\right)$. Po dosazení hodnot je výchylku tělesa.

$y = 0{,}05\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$(m,s).

ZU 1.6.1-41 Srovnáním s rovnicí $y = A\sin\left(\omega\, t + \varphi_0\right)$ zjistíme, že $A = 6\,\mathrm{m}$, $\omega = 3\,\mathrm{rad.s^{-1}}$

a $\varphi_0 = 0\,\mathrm{rad}$. Po dosazení do vztahu $v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega\, A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$ dostaneme $v = -18\sin 3t$.

ZU 1.6.1-42 Pro rychlost kmitavého pohybu platí vztah $v = \omega\, A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$. Srovnáním

určíme $\omega = 3\,\mathrm{rad.s^{-1}}$. Protože platí $\omega\, A = 6$ je $A = \frac{6}{3} = 2\,\mathrm{m}$.

ZU 1.6.1-44 Pro rychlost kmitavého pohybu platí vztah $v = \omega\, A\cos(\omega t)$. Po dosazení je

$v = \omega\, A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right) = \omega\, A\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

ZU 1.6.1-45 Protože u tohoto kmitavého pohybu nedochází k fázovému posunu, prochází těleso rovnovážnou polohou v čase $t = 0\,\mathrm{s}$. Po dosazení do rovnice je

$v = 6\cos 3.0 = 6\cos 0 = 6\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

ZU 1.6.1-46 V bodě vratu se těleso zastaví, pak je jeho rychlost nulová a v = 0 m.s$^{-1.}$

ZU 1.6.1-47 Vztah pro rychlost kmitavého pohybu je dán rovnicí $v = \omega\, A\cos(\omega t)$.

Rovnovážnou polohou prochází rychlostí $v_{max} = \omega\, A = 2\pi\, f = 2.3{,}14.3.0{,}2 = 3{,}77\,\mathrm{m.s^{-1}}$.

ZU 1.6.1-48 Podle rovnice pro výchylku je $A = 2\,\mathrm{m}$, $\omega = 3\,\mathrm{rad.s^{-1}}$. Rovnice zrychlení je dána vztahem $a = -\omega^2 A\sin\left(\omega\, t + \varphi_0\right)$**.** Protože je fázový posuv nulový, je po dosazení

$a = -18\sin 3t$ (m,s).

ZU 1.6.01-49 Podle rovnice pro výchylku je $A = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $\omega = 3\,\mathrm{rad.s^{-1}}$. Rovnice zrychlení je dána vztahem $a = -\omega^2 A\sin\left(\omega\, t + \varphi_0\right)$**.** Protože je fázový posuv nulový, je po dosazení

$a = -1{,}8\sin 3t$

(m.s^{-2},s).

ZU 1.6.1-50 Rovnovážnou polohou prochází těleso v čase $t = 0\,\mathrm{s}$. Pak po dosazení do rovnice je $a = 0\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

ZU 1.6.1-51 Protože v bodě vratu působí na těleso maximální síla, je zrychlení maximální, pak $a = 10\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

ZU 1.6.1-52 Kinetická energie je $E_k = \frac{1}{2} m\, v^2$. Protože je v bodě vratu rychlost nulová, je

$E_k = 0\,\mathrm{J}$.

ZU 1.6.1-53 Kinetická energie je $E_k = \frac{1}{2} m v^2$. Rovnice rychlosti je í $v = \omega A \cos(\omega t)$. Po dosazení je $v = 3.0{,}2 \cos(3.0) = 0{,}6\,\mathrm{m.s^{-1}}$. Kinetická energie je pak $E_k = \frac{1}{2} 2.0{,}6^2 = 0{,}36\,\mathrm{J}$.

BU 1.6.1-54 a) Na těleso působí síla pružnosti a tíhová síla, které jsou v rovnováze pak $ky = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{y} \Rightarrow k = \frac{4.9{,}81}{0{,}16} \Rightarrow k = 245{,}25\,\mathrm{N.m^{-1}}$

b) Pro tuhost pružiny platí $k = m\omega^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5}{245{,}25}} = 0{,}284\,\mathrm{s}$.

BU 1.6.1-55 a) Na těleso působí síla pružnosti a tíhová síla, které jsou v rovnováze pak $ky_m = mg \Rightarrow A = \frac{m\,g}{k} \Rightarrow A = \frac{m\,g\,T^2}{m\,4\pi^2} \Rightarrow A = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 24{,}9\,\mathrm{m}$.

b) Podobně jako v předchozím případě pak $k\,A = mg \Rightarrow m\,\omega^2 A = m\,g \Rightarrow 4\pi^2 f^2 A = g \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}} = 2{,}23\,\mathrm{Hz}$ ..

BU 1.6.1-56 Nejprve určíme počáteční fázi z rovnice pro okamžitou výchylku $y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$, pak $1{,}5 = 3\sin(2\pi 4.0 + \varphi_0) \Rightarrow 1{,}5 = 3\sin(\varphi_0)$. Úpravou dostaneme $\frac{1}{2} = \sin\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{rad}$. Nyní opět použijeme vztah pro okamžitou výchylku $y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$ a dosadíme zadané hodnoty, pak

$y = 3\sin\left(2\pi 4t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = 3\sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ (m, s).

BU 1.6.1-57 Sílu určíme podle vztahu $F = k\,y = m\,\omega^2 y = 4.(0{,}5\pi)^2.0{,}1 = 0{,}98\,\mathrm{N}$.

BU 1.6.1-58 Pro maximální zrychlení a maximální rychlost platí $a_m = A\omega^2$, $v_m = A\omega$. Pak po dosazení je $a_m = v_m\omega \Rightarrow \omega = \frac{a_m}{v_m} = \frac{27}{3} = 9\,\mathrm{rad.s^{-1}}$.

BU 1.6.1-59 Pro potenciální energii platí vztah $E_p = \frac{1}{2} k\,y^2$. V bodě vratu je výchylka rovna amplitudě, $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} 2.2^2.3^2 = 36\,\mathrm{J}$.

BU 1.6.1-60 Celková energie $E = \frac{1}{2} k\,A^2$ je rovna součtu $E_p + E_k = E$. Pak

$E_k = E - E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 - E_p = \frac{1}{2} 2.3^2 0{,}2^2 - 0{,}09 = 0{,}27\,\mathrm{J}$.

BU 1.6.1-61 Celková energie je $E=\frac{1}{2}k\,A^2$, maximální síla je $F_m=k\,A$. Vyjádříme

$k=\frac{F_m}{A}$. Dosadíme do vztahu pro energii,

pak $E=\frac{1}{2}\frac{F_m}{A}A^2 \Rightarrow E=\frac{1}{2}F_m A \Rightarrow A=\frac{2E}{F_m}=\frac{2.3.10^{-5}}{1{,}5.10^{-3}}=4.10^{-5}$ m.

BU 1.6.1-63 a) k=200 N.m^{-1}, b) m = 1,39 kg, c) f = 1,9 Hz

BU 1.6.1-64 Určíme poměr $\frac{E_p}{E}=\frac{\frac{1}{2}k\,y^2}{\frac{1}{2}k\,A^2}=\frac{y^2}{A^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}A^2\right)^2}{A^2}=\frac{1}{4}$. Pak $E_p=\frac{1}{4}E$.

Energie kinetická je $E_k=E-E_p=E-\frac{1}{4}E=\frac{3}{4}E$.

1.6.2. TLUMENÉ KMITÁNÍ

BTO 1.6.2-1 a, b
BTO 1.6.2-2 a
BTO 1.6.2-3 d
BTO 1.6.2-4 b

BU 1.6.2-5 Protože $2b=\frac{R}{m}$, je $R=2bm$. Pak jednotkou je kg.s^{-1}.

BU 1.6.2-6 Výraz v exponentu vztahu $A=A_0 e^{-bt}$ je bezrozměrné číslo. Pak jednotkou b je s^{-1}.

BU 1.6.2-7 Diferenciální rovnici těchto tlumených kmitů můžeme psát ve tvaru $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\omega^2 y=0$.

Srovnáním dostaneme $\omega_t^2=\frac{\pi^2}{4}\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{4}$rad.s^{-1}.

BU 1.6.2-8 Diferenciální rovnici těchto tlumených kmitů můžeme psát ve tvaru $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\omega^2 y=0$.

Srovnáním dostaneme $2b=4\Rightarrow b=\frac{4}{2}=2\,\mathrm{s}^{-1}$.

BU 1.6.2-9 Protože druhá amplituda je časově o periodu posunutá, můžeme psát

$$\lambda=\frac{A_0\,e^{-bt}}{A_0\,e^{-b\left(t+T_t\right)}}=\frac{e^{-bt}}{e^{-bt}.e^{-bT_t}}=e^{bT_t}.$$

BU 1.6.2-10 $\delta = \ln\lambda = \ln e^{bT_t} = bT_t$

BU 1.6.2-11 Poměr výchylek zapíšeme pomocí útlumu $\lambda = e^{bT_t}$. Protože

$\delta = bT_t \Rightarrow b = \dfrac{\delta}{T_t}$. Pak $\lambda = e^{\frac{\delta}{T_t}T_t} = e^{\delta} = e^{0,2} = 1,2$.

BU 1.6.2-12 Pro energii kmitů platí vztah $E = \frac{1}{2}kA^2$. Amplituda tlumených kmitů klesá podle funkce $A = A_0\, e^{-bt}$. Pak $E = \frac{1}{2}k\left(A_0\, e^{-bt}\right)^2$. Po úpravě

$E = \frac{1}{2}k\, A_0^2\, e^{-2bt} \Rightarrow E = E_0 e^{-2bt}$.

$$0,2E_0 = E_0 e^{-2bt}$$
$$0,2 = e^{-2bt}$$
$$\ln 0,2 = -2bt\ln e$$
$$\frac{\ln 0,2}{-2b} = t$$
$$t = \frac{\ln 0,2}{-2.3}$$
$$t = 0,27\,\mathrm{s}\,.$$

<u>1.7.1 MECHANICKÉ VLNĚNÍ</u>

ZTO 1.7.1-1. c
ZTO 1.7.1-2. c
ZTO 1.7.1-3. a, b, c, d
ZTO 1.7.1-4. b
ZTO 1.7.1-5. c
ZTO 1.7.1-6. b
ZTO 1.7.1-7. c
ZU 1.7.1-1. λ = 3 m
ZU 1.7.1-2. λ = 314 m
ZU 1.7.1-3. f = 10 Hz
ZU 1.7.1-4. v = 30 m.s^{-1}
ZU 1.7.1-5. $\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$ = 4π rad
BU 1.7.1-1. $\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$ = π rad
ZU 1.7.1-6. $u = 2.10^{-2}\sin 4t\left(20t - 10^{-2}x\right)$
BU 1.7.1-2. $v = 2\cos 2\pi\left(25t - \dfrac{x}{20}\right)$
BU 1.7.1-3. v = 31,4 m/s
BU 1.7.1-4. a = 1974 m.s^{-2}

ZU 1.7.1-7. $7{,}5.10^{14}$ Hz – $4{,}3.10^{14}$ Hz
ZU 1.7.1-8. 1 m až 200 m
BU 1.7.1-5. $80/\pi$ krát
BU 1.7.1- 2. Při úplném odrazu se vlnění šíří po rozhraní obou prostředí, tzn. že úhel lomu α_2 má hodnotu 90°. Pak ze zákona lomu $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$ platí $\sin\alpha_1 = \frac{v_1}{v_2}\sin\alpha_2$. Po dosazení je $\sin\alpha_1 = 0{,}10687$, pak $\alpha_1 = 6{,}13°$.

1.7.2 Interference

ZTO 1.7.2-1. c)
ZTO 1.7.2-2. c)
ZTO 1.7.2-3. d)
ZTO 1.7.2-4 d)
ZTO 1.7.2-5. b),c)
BTO 1.7.2-1. b)
BTO 1.7.2-2. c)
BTO 1.7.2-3. b)
ZU 1.7.2-1. d = 12,08 m
ZU 1.7.2-2. v = 1 450 m/s
BU 1.7.2-1. d = 4/3m $u = 2.10^{-3}\cos(3\pi x)\sin 1200\pi t$ (m,s)
BU 1.7.2-2. $82{,}8^0$
BU 1.7.2-3. A = 4,44 mm
BU 1.7.2-4. A = 5 cm

1.7.3 Zvuk

ZTO 1.7.3-1. a)
ZTO 1.7.3-2. b)
ZTO 1.7.3-3. b)
ZTO 1.7.3-4. a)
ZTO 1.7.3-5. c)

ZTO 1.7.3-6. c)
ZTO 1.7.3-7 c)
ZTO 1.7.3-8 b)
ZTO 1.7.3-9. b)
ZTO 1.7.3-10. a),b)
ZTO 1.7.3-11. c)
ZTO 1.7.3-12. b)
ZTO 1.7.3-13. b)
ZTO 1.7.3-14. c)
ZU 1.7.3-1. Frekvence zvuku se při přechodu z jednoho prostředí do druhého nemění. Ve vodě je rychlost šíření zvuku větší, pak se zvětší jeho vlnová délka. Pro poměr vlnových délek platí

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{v_1}{f}}{\frac{v_2}{f}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1480}{340} = 4{,}35$$ Vlnová délka je ve vzduchu 4,35 krát kratší.

ZU 1.7.3-2.
ZU 1.7.3-3. f = 100 kHz

ZU 1.7.3 - 5. Rychlost podélných vln v pevné látce je dána vztahem $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Úpravou určíme $E = v^2 \rho$. Po dosazení hodnot je E = 9,8.10^9 Pa.

ZU 1.7.3-6. Rychlost šíření vlnění je v daném prostředí konstantní. Pak $v = \frac{s}{t}$ a zároveň platí $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Porovnáním obou vztahů je $E = \frac{s^2 \rho}{t^2}$. Po dosazení je E =2,12.10^{11} Pa.

ZU 1.7.3-7. Vypočítejte modul pružnosti v tahu mědi, rozšíří-li se podélné vlnění v mědi do vzdálenosti 1000 m za dobu 0,269 s.
E = 1,22.10^{11} Pa

BU 1.7.3-1. Pro rychlost podélných vln v kapalině platí vztah $v = \sqrt{\frac{1}{\gamma \rho}}$**,** úpravou dostaneme $\lambda = \frac{1}{v^2 \rho}$, po dosazení γ=8,26.10^{-10} Pa^{-1}.

BU 1.7.3-2. Pro rychlosti šíření podélných v_1 a příčných vln v_2 platí vztahy $v_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ a $v_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$. Kde modul pružnosti v torzi $G = \frac{mE}{2(m+1)}$. Protože $E = v_1^2 \rho$ je po úpravě $v_2 = \sqrt{\frac{m\rho v_1^2}{2(m+1)\rho}} = v_1 \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}$. Po dosazení je v_2 = 3111 m-s^{-1}.

ZU 1.7.3.-8. Intenzita zvuku je $I = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho v}$. Po dosazení číselných hodnot je

a) I = 11,7.10^{-6} W.m^{-2}
b) I = 3,37.10^{-9} W.m^{-2}

ZU 1.7.3-9.
Jestliže $I = \frac{P}{S}$, pak $S = 4\pi r^2$ je velikost kulové plochy o poloměru 1 m, v jejímž středu je umístěný zdroj zvuku. Po úpravě je $I = \frac{P}{4\pi r^2}$ a dosazení hodnot je I = 0,08 W.m^{-2}.

BU 1.7.3.-3. Intenzita zvukové vlny ve vzduchu je $I_1 = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{\rho_1 v_1}$, intenzita zvukové vlny ve vodě je $I_2 = \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{\rho_2 v_2}$. Jestliže $I_1 = I_2$ pak porovnáním obou vztahů a vyjádřením akustického tlaku p_2 získáme výraz $p_2 = p_1\sqrt{\frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1}}$. Po dosazení hodnot vyjde p_2 = 1115,4 Pa.

BU 1.7.3.-4. Podle základního vztahu je intenzita zvuku $I = \frac{P}{S}$, kde $S = 4\pi r^2$ je plocha koule poloměru r. Pro vzdálenost D je $I_1 = \frac{P}{4\pi D^2}$ a $I_2 = \frac{P}{4\pi (D-50)^2}$.

Protože $I_2 = 2 I_1$ je $\frac{P}{4\pi (D-50)^2} = 2\frac{P}{4\pi D^2}$.

Po úpravě je $D^2 = 2(D-50)^2$, pak $D^2 = 2\left(D^2 - 2.50\,D + D^2\right)$.

Získáme kvadratickou rovnici $D^2 - 200D + 5000 = 0$. Řešením je D = 170,7 m.

BU 1.7.3-5.

Dopadá-li, na přijímací systém několik zvukových vln, bude jejich výsledná hladina intenzity rovna hladině intenzity součtu veličin, které původní hladiny určily (např. intenzita, výkon, tlak).

Hladina intenzity zvuku je $L = 10\lg\frac{I}{I_0}$. Pak $L_v = 10\lg\frac{I+I}{I_0} = 10\lg\frac{2I}{I_0} = 10\left(\lg 2 + \lg\frac{I}{I_0}\right)$.

$$L_v = 10\lg\frac{I}{I_0} + 10\lg 2 = L + 3$$

Výsledná hladina intenzity je o 3 dB vyšší.

BU 1.7.3-6. Původní hladina intenzity $L_1 = 10\lg\frac{I_1}{I_0}$ se zvýší na $L = 10\lg\frac{I}{I_0}$. Podle zadání je $L = L_1 + 30$.

Pak $10\lg\frac{I}{I_0} - 30 = 10\lg\frac{I_1}{I_0}$,

rovnici vydělíme 10 a upravíme podle pravidel pro počítání s logaritmy.

$$\lg I - \lg I_0 - 3\lg 10 = \lg I_1 - \lg I_0$$

$$\lg I - \lg 1000 = \lg I_1$$

$$\lg I - \lg I_1 = \lg 1000$$

$$\lg\frac{I}{I_1} = \lg 1000$$

$$\frac{I}{I_1} = 1000$$
$$I = 1000\, I_1$$

Intenzita zvuku se zvýší 1000 krát.

BU 1.7.3-7. Intenzita zvuku v daném místě závisí na vzdálenosti a výkonu zdroje vztahem $I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}$.

V dané vzdálenosti h =100 m je intenzita $I = \frac{P}{4\pi h^2}$ a hladina intenzity $L = 10\lg\frac{I}{I_0}$.

V hledané vzdálenosti h_1 je intenzita $I_1 = \frac{P}{4\pi h_1^2}$ a hladina intenzity $L_1 = 10\lg\frac{I_1}{I_0}$.

Dosazením do obou vztahů za intenzity dostaneme $L = 10\lg\frac{P}{4\pi h^2 I_0}$ a $L_1 = 10\lg\frac{P}{4\pi h_1^2 I_1}$.

Protože je výkon zdroje v obou případech stejný, vyjádříme a porovnáme.

$$4\pi h_1^2 I_0 10^{\frac{L_1}{10}} = 4\pi h^2 I_0 10^{\frac{L}{10}}$$
$$h_1^2 10^{\frac{L_1}{10}} = h^2 10^{\frac{L}{10}}$$
$$h_1 = h\sqrt{\frac{10^{\frac{L}{10}}}{10^{\frac{L_1}{10}}}}$$
$$h_1 = 100.\sqrt{10^3} = 3162{,}3\,\mathrm{m}$$

BU 1.7.3.-8. Pro hladiny intenzit platí vztahy $L_1 = 10\lg\frac{I_1}{I_0}$ a $L_2 = 10\lg\frac{I_2}{I_0}$. Z obou vztahů vyjádříme intenzity: $\frac{L_1}{10} = \lg\frac{I_1}{I_0} \Rightarrow \frac{120}{10} = \lg\frac{I_1}{I_0} \Rightarrow 12 = \lg\frac{I_1}{I_0} \Rightarrow 10^{12} = \frac{I_1}{I_0} \Rightarrow I_1 = I_0.10^{12}$.

Podobně $I_2 = I_0.10^{9,2}$.

Oba vztahy dáme do poměru $\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_0.10^{12}}{I_0.10^{9,2}} = 10^{2,8} = 630{,}9$