Základy algebry a aritmetiky IMA02, jaro 2024 kombinované
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

Vlastnosti relací v množině M

Binární relace R v množině M je **reflexivní** právě tehdy, když $(\forall\, x \in M)\ ([x,x] \in R)$,
tzn. obsahuje všechny uspořádané dvojice [x,x], kde $x \in M$.

Binární relace R v množině M je **antireflexivní** právě tehdy, když $(\forall\, x \in M)\ ([x,x] \notin R)$,
tzn. neobsahuje žádnou uspořádanou dvojici typu [x,x], kde $x \in M$.

Binární relace R v množině M je **symetrická** právě tehdy, když
$(\forall\, x,y \in M)\ ([x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \in R)$,
tzn. s každou uspořádanou dvojicí [x,y] obsahuje i dvojici ([y,x].

Binární relace R v množině M je **antisymetrická**, právě tehdy, když
$(\forall\, x,y \in M)\ ((x \neq y \wedge [x,y] \in R) \Rightarrow [y,x] \notin R)$,
tzn. s žádnou dvojicí [x,y] různých prvků neobsahuje dvojici [y,x].

Binární relace R v množině M je **tranzitivní** právě tehdy, když
$(\forall\, x,y,z \in M)\ ([x,y] \in R \wedge [y,z] \in R) \Rightarrow [x,z] \in R$,
tzn. jestliže se v relaci vyskytují „na sebe navazující dvojice“, pak musí relace obsahovat i dvojici, jejíž první složkou je 1. složka z první dvojice a druhou složkou je 2. složka z druhé dvojice.

Binární relace R v množině M je **souvislá** právě tehdy, když
$(\forall\, x,y \in M)\ (x \neq y \Rightarrow ([x,y] \in R \vee [y,x] \in R)$,
tzn. každé dva různé prvky z množiny M musí být „spolu v relaci“.

Binární relaci U v množině M nazýváme **uspořádání** v M, právě když U je antisymetrická a tranzitivní.
Binární relaci U v množině M nazýváme **uspořádání ostré**, resp. **neostré** v M, právě když U je antisymetrická, tranzitivní a antireflexivní, resp. antisymetrická, tranzitivní a reflexivní.
Binární relaci U v množině M nazýváme **uspořádání lineární** v M, právě když U je antisymetrická, tranzitivní a souvislá.
Binární relaci U v množině M nazýváme **ostré lineární uspořádání** v M, právě když U je antisymetrická, tranzitivní, souvislá a antireflexivní.

Binární relaci R v množině M nazýváme **relací ekvivalence** na M**,** právě když je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
Každá relace ekvivalence na množině M vytváří **rozklad** této množiny, což je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že průnik každých dvou tříd je prázdná množina a sjednocení všech tříd rozkladu tvoří množinu M.
Jinak lze také říci, že říci, že **rozklad** množiny M je systém neprázdných podmnožin (tzv. tříd rozkladu) množiny M takových, že každý prvek množiny M patří právě do jedné z těchto tříd.

Základy algebry a aritmetiky IMA02, jaro 2024 kombinované
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

Cvičení

Příklad 1. Rozhodněte, jaké vlastnosti mají následující binární relace v množině $M = \{a, b, c, d\}$.
$R_1 = \{[c,b], [b,c], [a,a], [b,b], [c,c], [d,d]\}$
$R_2 = \{[a,b], [c,d], [a,a], [b,b]\}$
$R_3 = \{[a,b], [d,c],[b,d],[a,c], [a,d], [b,c]\}$
$R_4 = \{[c,b], [b,c],[b,a]\}$
$R_5 = \{[a,a], [b,b], [c,c], [c,b], [b,c],[b,a],[a,b],[a,c], [c,a], [d,d]\}$
$R_6 = \{[c,a], [d,b]\}$
$R_7 = \{[a,a]\}$

Příklad 2: Je dána množina A, jejímiž prvky jsou vybraní žáci z 3. třídy. Jejich jména a další údaje o nich jsou uvedeny níže v tabulce. Tvořte relace v množině A pomocí slovního zadání, zapište je pak výčtem prvků a určete jejich vlastnosti.

Jméno	**Datum narození**	**Váha**	**Výška**	**Domácí mazlíček**
Kája	6. 7. 2010	35 kg	136 cm	Pes
Adéla	15. 4. 2010	27 kg	132 cm	Kočka
Tomáš	3. 3. 2010	41 kg	146 cm	had
Petra	7. 3. 2010	31 kg	134 cm	Pes
Marek	6. 3. 2010	30 kg	141 cm	Kočka

Základy algebry a aritmetiky IMA02, jaro 2024 kombinované
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.