**ZÁKLADNÍ POJMY VÝROKOVÉ LOGIKY**

**Výrok**  je každé sdělení, o němž má smysl říci, že je buď pravdivé nebo nepravdivé.

*Pozn.* Není důležité, zda o pravdivosti či nepravdivosti výroku umíme rozhodnout. Podstatné je, zda má smysl o pravdivosti uvažovat, zda má smysl položit si otázku: „Je pravda, že...?“

*Úkol 1:*

Rozhodněte, které z následujících vět jsou výroky:

1. Právě začalo pršet.
2. Na Marsu existují živé organismy.
3. Karel IV. byl v Praze r. 1348.
4. Rozvoj matematických představ.
5. Pojď k tabuli.
6. Číslo 4 je dělitelem čísla 134.
7. 100 : 5 = 20
8. 4 + x = 9

Výroky budeme dále označovat velkými tiskacími písmeny (*A, B, C, P, Q*, ...) nebo malými tiskacími písmeny (*p, q, r,* …). Tomuto označení říkáme **výrokové proměnné.**

Ve výrokové logice nás nezajímá konkrétní obsah výroků, ale jejich pravdivost (pravdivostní hodnota).

Každému výroku je možné přiřadit **pravdivostní hodnotu**:

Je-li výrok *A* pravdivý, je jeho pravdivostní hodnota 1, píšeme Ph(*A*) = 1.

Je-li výrok *A* nepravdivý, jeho pravdivostní hodnota je 0, píšeme Ph(*A*)=0.

**Negace výroku** *A* je výrok *⎤ A,* který je pravdivý v případě, že výrok *A* je nepravdivý, a který je nepravdivý v případě, že výrok *A* je pravdivý.

*Př.* A: Dnes je úterý.

*⎤* A: Dnes není úterý. (Není pravda, že je dnes úterý.)

**Složené výroky**

Z jednoduchých výroků můžeme tvořit složené výroky pomocí tzv. výrokotvorných (logických) spojek:

* „a“, „a současně“, „a zároveň“ ( **)
* „nebo“ (**)
* „buď, nebo“ (**)
* „jestliže, pak“; „*A* implikuje *B“* ( **)
* „právě tehdy, když“ ( **)

**Konjunkce výroků *a, b*** je výrok *a b*, který je pravdivý v případě, že jsou oba výroky pravdivé.

**Disjunkce (alternativa) výroků *a, b*** je výrok *a b*, který je pravdivý v případě, že je alespoň jeden z výroků *a, b* pravdivý.

**Ostrá disjunkce výroků *a, b*** je výrok *ab*, který je pravdivý v případě, že je právě jeden z výroků *a, b* pravdivý.

**­­Implikace výroků *a, b*** je výrok *a b*, který je **ne**pravdivý jen v případě, že první výrok je pravdivý a druhý výrok je nepravdivý. Ve všech ostatních případech je implikace pravdivá.

**Ekvivalence** **výroků *a, b*** je výrok *ab*, který je pravdivý v případě, že oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu.

Někdy se v běžném jazyce nevyjadřujeme přesně - je potřeba logické spojky odhalit:

*Úkol 2*:Zapište symbolicky, nebo vyslovte pomocí logických spojek:

1. Petr přijde s Evou.
2. Pokud přijde Petr, přijde i Eva.
3. Přijde Petr, ale Eva ne.
4. Ze dvojice Petr a Eva přijde nejvýš jeden.
5. Buď přijde Eva, nebo Petr.
6. Eva přijde jen tehdy, když nepřijde Petr.

**Znaky výrokové logiky**:

* Výrokové proměnné *A, B, P, Q, p, q, r, …*
* Logické spojky *,, * , *,* **
* Symbol pro negaci výroku ⎤
* Závorky (), {}, []

Znaky výrokové logiky tvoří **abecedu výrokové logiky.** Pomocí znaků výrokové logiky lze tvořit složené útvary, tzv. **výrokové formule.** Jsou to zápisy, ve kterých se objevují výrokové proměnné *a,b, p, q*, .. log. spojky, závorky a to tak, že když dosadíme za výrokové proměnné konkrétní výroky, dostaneme výrok: Např. ⎤(*a  b*)  (*⎤ a ⎤ b*).

Pak nás zajímá, jaké pravdivostní hodnoty nabývá výsledný výrok v závislosti na pravdivosti výroků *A, B*.

**Tautologie** je výroková formule, ze které vznikne pro všechny pravdivostní hodnoty výrokových proměnných, z nichž je složena, pravdivý výrok.

**Kontradikce** je výroková formule, ze které vznikne pro všechny pravdivostní hodnoty výrokových proměnných, z nichž je složena, nepravdivý výrok.

**Splnitelná formule** je výroková formule, ze které vznikne pro některé pravdivostní hodnoty výrokových proměnných, z nichž je složena, pravdivý výrok, pro jiné nepravdivý výrok**.**

Výroková formule *A* je **logicky ekvivalentní** s výrokovou formulí *B*, jestliže výroková formule *ab* je tautologií.

V logice nejpoužívanější logicky ekvivalentní výrokové formule ve skriptech (Panáčová, Beránek, 2020) najdete na str. 15.

**PRAVIDLA ODVOZOVÁNÍ**

**Úsudek** – spojení několika výroků, kdy poslední z nich (**závěr**) se odvozuje z předcházejících pravdivých (tzv. **předpokladů**).

**Z výrokové formule *p* vyplývá (plyne) výroková formule *q*** právě tehdy, když výroková formule ***p*** ** ***q***je tautologie. Zapisujeme .

Případům, kdy z pravdivosti výroku ***p*** vyplývá pravdivost výroku ***q***, říkáme **správný úsudek** nebo také **pravidlo odvozování**.

Pravidla odvozování používáme při odvozování důsledků z daných předpokladů. Za výrokové proměnné dosazujeme výroky (jednotlivé, složené nebo kvantifikované).

O správnosti těchto úsudků se můžeme přesvědčit pomocí tabulek pravdivostních hodnot příslušných formulí (musí jít o tautologie).

**ZÁKLADNÍ MNOŽINOVÉ POJMY**

**Množina** je takový souhrn objektů, že o každém objektu můžeme rozhodnout, zda do uvažovaného souhrnu objektů patří nebo nepatří.

Pro každou množinu A a pro každý objekt *a* nastane právě jedna ze dvou možností:

buď *a * A, nebo *a* A .

Množina může být určena výčtem prvků nebo pomocí charakteristické vlastnosti, tj. jako obor pravdivosti výrokové formy.

*Příklad množiny:* A = {2, 3, 5, 7} = {*x* **** ℕ; *x* je prvočíslo  *x <* 10}

**Výroková forma** *v(x)* je sdělení (výraz) obsahující proměnnou *x*; dosadíme-li za proměnnou *x* z vhodně zvolené množiny, získáme z výrokové formy výrok. **Definičním oborem** výrokové formy *v(x)* jedné proměnné *x* rozumíme množinu *D*, pro jejíž libovolný prvek po dosazení za proměnnou *x* dostaneme výrok. **Oborem pravdivosti** výrokové formy *v(x)* jedné proměnné *x* rozumíme množinu *P*, pro jejíž libovolný prvek po dosazení za proměnnou *x* dostaneme pravdivý výrok.

*Příklady výrokových forem:*

* x > 7, kde *x* **** ℕ
* „*x* je prvočíslo“, *x* **** ℕ
* 4x + 7 = 11, *x* **** ℕ

*Úkol 3*: Přečtěte zápisy a určete množiny výčtem prvků:

A = {x  ℕ; x  10}

B = {x  ℕ; x je sudé číslo menší 10}

C = {x  ℕ; x je dělitelem čísla 10 }

D = {x  ℕ; x2 = x}

E = {x  ℕ; x3 < 30  x je liché číslo}

F = {x  ℕ; x je jednociferné číslo  x = 10}

**Množina A je rovna množině B** právě tehdy, když každý prvek množiny A je též prvkem množiny B a zároveň každý prvek množiny B je též prvkem množiny A. Zapisujeme **A = B**. Tento vztah nazýváme **rovnost množin**.

**Množina A je podmnožinou (částí) množiny B**, právě tehdy, když každý prvek množiny A je též prvkem množiny B. Zapisujeme **A  B** . Tento vztah nazýváme **množinová inkluze**.

*Úkol* 3: Zapište všechny podmnožiny množiny X = {p, q, r, s}.

**Potenční systém množiny A** je množina všech podmnožin množiny A (značíme P(A)).

**Množina A se rovná množině B** (značíme **A = B**) právě tehdy, když každý prvek množiny A je prvkem množiny B a současně každý prvek množiny B je prvkem množiny A.

(Platí tedy: A = B, právě když A  B a B  A.)

**Doplněk množiny A** vzhledem k základní množině Z je množina všech prvků množiny Z, které nepatří do množiny A.

A´ = {*x* **** Z; *x * A}

**Sjednocení množin A, B** je množina prvků, které patří alespoň do jedné z množin A, B.

A  B = {*x* **** Z; *x***** A  *x***** B}

**Průnik množin A, B** je množina prvků, které patří do množiny A a současně do množiny B.

A  B = {*x* **** Z; *x***** A  *x***** B}

**Rozdíl množin A, B** je množina, která obsahuje právě ty prvky množiny A, které nepatří do množiny B.

A – B = {*x* **** Z; *x***** A  *x* ** B}

**Symetrický rozdíl množin A, B** je množina, která obsahuje ty prvky, které patří právě do jedné z množin.

A  B = {*x* **** Z; (*x***** A  *x***** B }