IMA02 Základy algebry a aritmetiky – dálkaři - jaro 2024

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

ZÁKLADNÍ POJMY VÝROKOVÉ LOGIKY

Výrok je každé sdělení, o němž má smysl říci, že je buď pravdivé nebo nepravdivé.

Pozn. Není důležité, zda o pravdivosti či nepravdivosti výroku umíme rozhodnout. Podstatné je, zda má smysl o pravdivosti uvažovat, zda má smysl položit si otázku: „Je pravda, že...?“

Úkol 1:
Rozhodněte, které z následujících vět jsou výroky:

1. Právě začalo pršet.
2. Na Marsu existují živé organismy.
3. Karel IV. byl v Praze r. 1348.
4. Rozvoj matematických představ.
5. Pojď k tabuli.
6. Číslo 4 je dělitelem čísla 134.
7. $100 : 5 = 20$
8. $4 + x = 9$

Výroky budeme dále označovat velkými tiskacími písmeny (*A, B, C, P, Q*, ...) nebo malými tiskacími písmeny (*p, q, r, …*). Tomuto označení říkáme **výrokové proměnné.**

Ve výrokové logice nás nezajímá konkrétní obsah výroků, ale jejich pravdivost (pravdivostní hodnota).

Každému výroku je možné přiřadit **pravdivostní hodnotu**:

Je-li výrok A pravdivý, je jeho pravdivostní hodnota 1, píšeme $\mathrm{Ph}(A) = 1$.
Je-li výrok A nepravdivý, jeho pravdivostní hodnota je 0, píšeme $\mathrm{Ph}(A)=0$.

Negace výroku A je výrok $\neg A$, který je pravdivý v případě, že výrok A je nepravdivý, a který je nepravdivý v případě, že výrok A je pravdivý.

Př. A: Dnes je úterý.
$\neg$A: Dnes není úterý. (Není pravda, že je dnes úterý.)

Složené výroky

Z jednoduchých výroků můžeme tvořit složené výroky pomocí tzv. výrokotvorných (logických) spojek:

- „a“, „a současně“, „a zároveň“ ($\wedge$)
- „nebo“ ($\vee$)
- „buď, nebo“ ($\underline{\vee}$)
- „jestliže, pak“; „A implikuje B“ ($\Rightarrow$)
- „právě tehdy, když“ ($\Leftrightarrow$)

IMA02 Základy algebry a aritmetiky – dálkaři - jaro 2024

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

Konjunkce výroků *A, B* je výrok $A \wedge B$, který je pravdivý v případě, že jsou oba výroky pravdivé.

Disjunkce (alternativa) výroků *A, B* je výrok $A \vee B$, který je pravdivý v případě, že je alespoň jeden z výroků *A, B* pravdivý.

Ostrá disjunkce výroků *A, B* je výrok $A \underline{\vee} B$, který je pravdivý v případě, že je právě jeden z výroků *A, B* pravdivý.

Implikace výroků *A, B* je výrok $A \Rightarrow B$, který je **ne**pravdivý jen v případě, že první výrok je pravdivý a druhý výrok je nepravdivý. Ve všech ostatních případech je implikace pravdivá.

Ekvivalence výroků *A, B* je výrok $A \Leftrightarrow B$, který je pravdivý v případě, že oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu.

Někdy se v běžném jazyce nevyjadřujeme přesně - je potřeba logické spojky odhalit:

Úkol 2: Zapište symbolicky, nebo vyslovte pomocí logických spojek:

a) Petr přijde s Evou.

b) Pokud přijde Petr, přijde i Eva.

c) Přijde Petr, ale Eva ne.

d) Ze dvojice Petr a Eva přijde nejvýš jeden.

e) Buď přijde Eva, nebo Petr.

f) Eva přijde jen tehdy, když nepřijde Petr.

Znaky výrokové logiky:

- Výrokové proměnné *A, B, P, Q, p, q, r, ...*
- Logické spojky $\wedge, \vee, \underline{\vee}, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- Symbol pro negaci výroku $\neg$
- Závorky (), {}, []

Znaky výrokové logiky tvoří **abecedu výrokové logiky.** Pomocí znaků výrokové logiky lze tvořit složené útvary, tzv. **výrokové formule.** Jsou to zápisy, ve kterých se objevují výrokové proměnné *A,B, P, Q*, .. log. spojky, závorky a to tak, že když dosadíme za výrokové proměnné konkrétní výroky, dostaneme výrok: Např. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.
Pak nás zajímá, jaké pravdivostní hodnoty nabývá výsledný výrok v závislosti na pravdivosti výroků *A, B*.

IMA02 Základy algebry a aritmetiky – dálkaři - jaro 2024

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

Tautologie je výroková formule, ze které vznikne pro všechny pravdivostní hodnoty výrokových proměnných, z nichž je složena, pravdivý výrok.

Kontradikce je výroková formule, ze které vznikne pro všechny pravdivostní hodnoty výrokových proměnných, z nichž je složena, nepravdivý výrok.

Splnitelná formule je výroková formule, ze které vznikne pro některé pravdivostní hodnoty výrokových proměnných, z nichž je složena, pravdivý výrok, pro jiné nepravdivý výrok**.**

Výroková formule A je **logicky ekvivalentní** s výrokovou formulí B, jestliže výroková formule $A \Leftrightarrow B$ je tautologií.

V logice nejpoužívanější logicky ekvivalentní výrokové formule ve skriptech (Panáčová, Beránek, 2020) najdete na str. 15.

PRAVIDLA ODVOZOVÁNÍ

Úsudek – spojení několika výroků, kdy poslední z nich (**závěr**) se odvozuje z předcházejících pravdivých (tzv. **předpokladů**).
Z výrokové formule $\boldsymbol{p}$ vyplývá (plyne) výroková formule $\boldsymbol{q}$ právě tehdy, když výroková formule $\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$ je tautologie. Zapisujeme pak $\frac{p}{q}$.
Případům, kdy z pravdivosti výroku $\boldsymbol{p}$ vyplývá pravdivost výroku $\boldsymbol{q}$, říkáme **správný úsudek** nebo také **pravidlo odvozování**.
Pravidla odvozování používáme při odvozování důsledků z daných předpokladů. Za výrokové proměnné dosazujeme výroky (jednotlivé, složené nebo kvantifikované).
O správnosti těchto úsudků se můžeme přesvědčit pomocí tabulek pravdivostních hodnot příslušných formulí (musí jít o tautologie).

ZÁKLADNÍ MNOŽINOVÉ POJMY

Množina je takový souhrn objektů, že o každém objektu můžeme rozhodnout, zda do uvažovaného souhrnu objektů patří nebo nepatří.
Pro každou množinu A a pro každý objekt a nastane právě jedna ze dvou možností:
buď $a \in$ A, nebo $a \notin$ A .
Množina může být určena výčtem prvků nebo pomocí charakteristické vlastnosti, tj. jako obor pravdivosti výrokové formy.
Příklad množiny: A = $\{2, 3, 5, 7\} = \{x \in \mathbb{N}; x$ je prvočíslo $\wedge\ x < 10\}$

Výroková forma $v(x)$ je sdělení (výraz) obsahující proměnnou x; dosadíme-li za proměnnou x z vhodně zvolené množiny, získáme z výrokové formy výrok. **Definičním oborem** výrokové formy $v(x)$ jedné proměnné x rozumíme množinu D, pro jejíž libovolný prvek po dosazení za proměnnou x dostaneme výrok. **Oborem pravdivosti** výrokové formy $v(x)$ jedné proměnné x rozumíme množinu P, pro jejíž libovolný prvek po dosazení za proměnnou x dostaneme pravdivý výrok.

IMA02 Základy algebry a aritmetiky – dálkaři - jaro 2024

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

Příklady výrokových forem:

- $x > 7$, kde $x \in \mathbb{N}$
- „x je prvočíslo“, $x \in \mathbb{N}$
- $4x + 7 = 11$, $x \in \mathbb{N}$

Úkol 3: Přečtěte zápisy a určete množiny výčtem prvků:

$A = \{x \in \mathbb{N};\ x \leq 10\}$
$B = \{x \in \mathbb{N};$ x je sudé číslo menší 10$\}$
$C = \{x \in \mathbb{N};$ x je dělitelem čísla 10 $\}$
$D = \{x \in \mathbb{N};\ x^2 = x\}$
$E = \{x \in \mathbb{N};\ x^3 < 30 \wedge$ x je liché číslo$\}$
$F = \{x \in \mathbb{N};$ x je jednociferné číslo $\vee\ x = 10\}$

Množina A je rovna množině B právě tehdy, když každý prvek množiny A je též prvkem množiny B a zároveň každý prvek množiny B je též prvkem množiny A. Zapisujeme **A = B**. Tento vztah nazýváme **rovnost množin**.

Množina A je podmnožinou (částí) množiny B, právě tehdy, když každý prvek množiny A je též prvkem množiny B. Zapisujeme $\mathbf{A \subset B}$. Tento vztah nazýváme **množinová inkluze**.

Úkol 3: Zapište všechny podmnožiny množiny $X = \{p, q, r, s\}$.

Potenční systém množiny A je množina všech podmnožin množiny A (značíme P(A)).

Množina A se rovná množině B (značíme **A = B**) právě tehdy, když každý prvek množiny A je prvkem množiny B a současně každý prvek množiny B je prvkem množiny A.
(Platí tedy: A = B, právě když $A \subset B$ a $B \subset A$.)

Doplněk množiny A vzhledem k základní množině Z je množina všech prvků množiny Z, které nepatří do množiny A.
$A' = \{x \in Z;\ x \notin A\}$

Sjednocení množin A, B je množina prvků, které patří alespoň do jedné z množin A, B.
$A \cup B = \{x \in Z;\ x \in A \vee x \in B\}$

Průnik množin A, B je množina prvků, které patří do množiny A a současně do množiny B.
$A \cap B = \{x \in Z;\ x \in A \wedge x \in B\}$

Rozdíl množin A, B je množina, která obsahuje právě ty prvky množiny A, které nepatří do množiny B.
$A - B = \{x \in Z;\ x \in A \wedge x \notin B\}$

Symetrický rozdíl množin A, B je množina, která obsahuje ty prvky, které patří právě do jedné z množin.
$A \,\Delta\, B = \{x \in Z;\ (x \in A \,\underline{\vee}\, x \in B\ \}$