Zobrazení z množiny do množiny, typy zobrazení

*Nechť **R** je relace z množiny A do množiny B splňující vlastnosti: Ke každému prvku $a \in A$ existuje nejvýše jeden prvek $b \in B$ takový, že $[a, b] \in$ **R.** Tato relace se nazývá **zobrazení z množiny A do množiny B.** Značíme R: A → B.*

Nechť **R** je zobrazení z množiny A do množiny B.

- Jestliže $[a,b] \in$ **R**, pak prvek $a \in A$ nazýváme **vzorem** prvku $b \in B$ v zobrazení **R**; prvek $b \in B$ nazýváme **obrazem** prvku $a \in A$ v zobrazení **R**.
- Množina $O_1(\mathbf{R}) = \{a \in A$: existuje $b \in B$ takové, že $[a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **definiční obor** zobrazení **R**. Platí $O_1(\mathbf{R}) \subset A$.
- Množina $O_2(\mathbf{R}) = \{b \in B$: existuje $a \in A$ takové, že $[a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **obor hodnot** zobrazení **R**. Platí $O_2(\mathbf{R}) \subset B$.

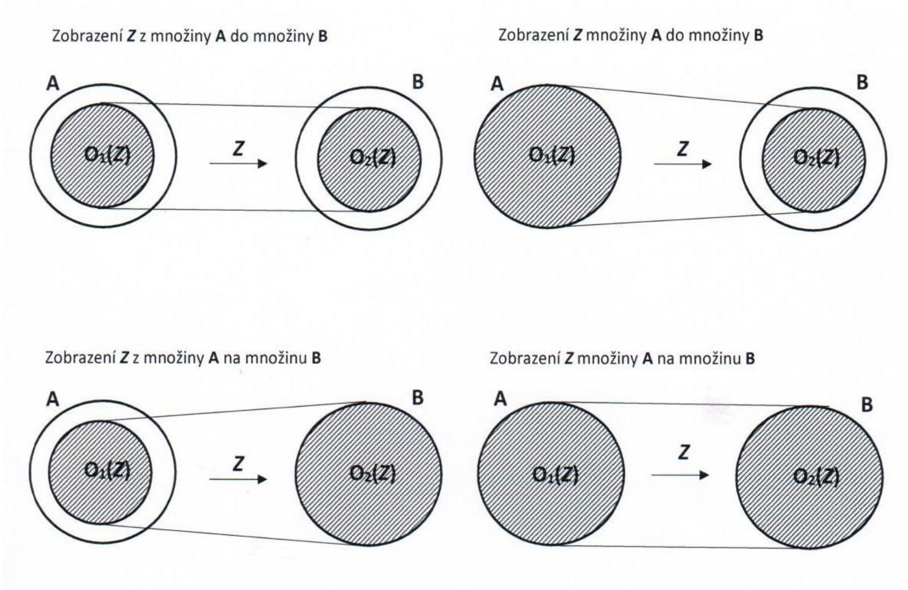
  Rozlišujeme následující **typy zobrazení R**:

- I) Je–li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se **R** **<u>zobrazení množiny A do množiny B</u>**.

- II) Je–li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se **R** **<u>zobrazení z množiny A na množinu B</u>**.

- III) Je–li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se **R** **<u>zobrazení množiny A na množinu B</u>**.

- IV) Je–li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se **R** **<u>zobrazení z množiny A do množiny B</u>**.



*Zobrazení Z z množiny A do množiny B se nazývá **prosté** zobrazení právě tehdy, když relace Z^{-1} je zobrazení z množiny B do množiny A.*

Uzlový graf prostého zobrazení Z z množiny A do množiny B je charakteristický tím, že do každého bodu, který znázorňuje prvek $y \in B$, směřuje nejvýše jedna šipka. Můžeme tedy říci, že platí následující věta: Zobrazení Z z množiny A do množiny B je prosté právě tehdy, když pro každé $y \in B$ platí, že je obrazem nejvýše jednoho prvku $x \in A$ v zobrazení Z.

*V praxi používáme pro rozlišení prostého zobrazení následující tvrzení: Zobrazení Z z množiny A do množiny B je prosté právě tehdy, když **každé dva různé vzory mají různé obrazy.***

Př. 1: Jsou dány množiny $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{u, v\}$. Nechť R_1, R_2, R_3, R_4 jsou binární relace z množiny A do množiny B definované takto:

a) $R_1 = \{[a, v], [b, v], [c, u]\}$, b) $R_2 = \{[a, u], [b, v]\}$,

c) $R_3 = \{[a, v], [b, v], [c, v]\}$, d) $R_4 = \{[a, u], [b, u]\}$.

Rozhodněte, zda tyto relace jsou zobrazení z množiny A do množiny B. Pokud ano, určete typ zobrazení.

a) R_1 je zobrazení množiny A na množinu B, není prosté.

b) R_2 je prosté zobrazení z množiny A na množinu B.

c) R_3 je zobrazení množiny A do množiny B, není prosté.

d) R_4 je zobrazení z množiny A do množiny B, není prosté.

Př. 2: Jsou dány množiny A = {x, y, z}, B = {a, b}. Rozhodněte, zda dané relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení z A do B.

a) $\mathbf{R_1}$ = {[x,a], [y,b], [z,a], [z,b]},

b) $\mathbf{R_2}$ = {[x,a], [z,b]},

c) $\mathbf{R_3}$ = {[x,a], [y,a], [z,a]}.

$\mathbf{R_1}$ není zobrazení.

$\mathbf{R_2}$ je prosté zobrazení z množiny A na množinu B.

$\mathbf{R_3}$ je zobrazení celé množiny A na množinu B, není prosté (nemůže být).

Př. 3: Jsou dány množiny A = {x, y, a, c}, B = {c, x, b, z}.

a) Rozhodněte, o jaký typ zadaných zobrazení se jedná.

R = {[x, z], [c, c], [y, c]}, S = {[x, z], [y, z], [a, z], [c, x]}.

b) Zapište výčtem prvků jednu binární relaci z množiny A do množiny B, která není zobrazením.

c) Zapište výčtem prvků

1) jedno zobrazení $\mathbf{R_1}$ z množiny A do množiny B,

2) jedno zobrazení $\mathbf{R_2}$ množiny A do množiny B,

3) jedno zobrazení $\mathbf{R_3}$ množiny A na množinu B,

4) jedno zobrazení $\mathbf{R_4}$ z množiny A na množinu B.

Řešení: a) R je zobrazení z množiny A do množiny B, není prosté.

S je zobrazení množiny A do množiny B, není prosté.

b) T = {[x, z], [x, b], [a, z], [c, x]}.

c) $\mathbf{R_1}$ = {[x, z]}, je prosté.

$\mathbf{R_2}$ = {[x, z], [y, z], [a, z], [c, z]}, není prosté.

$\mathbf{R_3}$ = {[x, c], [y, b], [a, z], [c, x]}, je prosté.

$\mathbf{R_4}$ neexistuje.

*Prosté zobrazení množiny A na množinu B nazýváme **bijektivní zobrazení** nebo také **vzájemně jednoznačné zobrazení**.*

Př. 4: Jsou dány množiny A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d}. Rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná a zda je toto zobrazení prosté:

a) $\mathbf{R_1}$ = {[1,a], [2,c], [3,d]},

b) $\mathbf{R_2}$ = {[1,a], [2,c], [3,d], [4,a]},

c) $\mathbf{R_3}$ = {[2,a], [1,c], [3,b], [4,d]}. Vzájemně jednoznačné zobrazení.

a) Prosté zobrazení z množiny A do množiny B.

b) Zobrazení množiny A do množiny B, není prosté.

c) Prosté zobrazení množiny A na množinu B.

***Permutací** konečné množiny A nazýváme každé prosté zobrazení množiny A na množinu A (vzájemně jednoznačné zobrazení).*

Př. 5: Zapište všechny permutace tříprvkové množiny A = {1, 2, 3}.

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

***Definice:** Nechť **R** je zobrazení z množiny M do množiny N a **S** je zobrazení z množiny N do množiny K. Pak relace **R** ○ **S** je zobrazení a nazývá se **složené zobrazení** ze zobrazení **R** a **S**.*

Př. 6: Jsou dána zobrazení R, S v množině A = {1, 2, 3, 4} takto:

R = {[1, 3], [4, 2], [2, 3], [3, 1]},

S = {[1, 1], [4, 2], [2, 1], [3, 4]}.

Určete složené relace R ○ S, S ○ R.

Řešení: R ○ S = {[1, 4], [4, 1], [2, 4], [3, 1]},

S ○ R = {[1, 3], [4, 3], [2, 3], [3, 2]}. Vidíme, že R ○ S ≠ S ○ R.

Složení dvou zobrazení je vždy zobrazení, složení dvou permutací je permutace.

Př. 7: Složte permutace b ○ c, f ○ d, e ○ b z předchozího příkladu.

b ○ c = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ = d , f ○ d = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ = b, e ○ b = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ = c.

Povšimněte si, že platí e ○ d = d ○ e = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, což je identická permutace. Obě permutace d, e jsou navzájem inverzní.

Řekneme, že množiny A, B jsou ***ekvivalentní*** *právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Značíme A ~ B.*

Př. 8*:* Jsou dány množiny A = {a, b, c}, B = {x, y}, C = {1, 2, 3}. Rozhodněte, které množiny jsou ekvivalentní.

Ř: Množiny A, B nejsou ekvivalentní (neexistuje prosté zobrazení množiny A na množinu B). Množiny A, C jsou ekvivalentní (existuje prosté zobrazení množiny A na množinu C, například R = {[a,3],[b,1],[c,2]}), tj. **A ~ C**.

Množina M je ***vlastní podmnožinou*** *množiny N právě tehdy, když M je podmnožinou N a současně M ≠ N.*

Řekneme, že množina A je ***konečná*** *právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A.*

Řekneme, že množina B je ***nekonečná*** *právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B, která je ekvivalentní s množinou B.*

Př. 9: Uvažujme množinu ℕ všech přirozených čísel a množinu S všech kladných sudých čísel. Zjistěte, zda jsou ekvivalentní.

Řešení: Připomeneme, že ℕ = {1, 2, 3, 4, 5,…}, S = {2, 4, 6, 8 , 10,…}.
Uvažujme relaci R = {[x,y] ϵ ℕ × S; y = 2x}.

Relace R je prosté zobrazení množiny ℕ na množinu S, neboť
ke každému x ϵ ℕ existuje právě jedno y ϵ S takové, že [x,y] ϵ R,
ke každému y ϵ S existuje právě jedno x ϵ ℕ takové, že [x,y] ϵ R.

Tedy ℕ ~ S.

Množina ℕ všech přirozených čísel je nekonečná, neboť je ekvivalentní s množinou S všech kladných sudých čísel, přičemž S je vlastní podmnožinou množiny ℕ.

Nechť A, B jsou ***konečné*** *množiny. Pak platí:* $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$, *tedy dvě konečné množiny jsou ekvivalentní, právě když mají stejný počet prvků.*

Př. 10: Jsou dány množiny M = $\{1,2,3,4\}$ a N = $\{a,b,c,d\}$.
a) Definujte výčtem prvků relaci R z množiny M do N, která není zobrazením.
b) Definujte relaci Z, která je zobrazením z množiny N do M a určete jeho typ.
c) Zapište výčtem prvků relaci R•Z a rozhodněte, zda je tato relace zobrazením. Pokud ano, určete, zda je prosté.
d) Zapište dvě různé bijekce množiny N na množinu M.
e) Na množině N definujte dvě různé permutace P_1, P_2 a určete permutace P_1•P_2 a P_2•P_1.

Řešení: a) R = {[2, b], [2, c], [3, a]}.

b) Z_1 = {[c, 4]}. Prosté zobrazení z N do M.
Z_2 = {[a, 4], [b, 4], [c, 1], [d, 1]}. Zobrazení celé N do M, není prosté.

c) R•Z_1 = {[2, 4]}. Prosté zobrazení z M do M.
R•Z_2 = {[2, 4], [2, 1], [3, 4]}. Není zobrazení.

d) B_1 ={[a, 4], [b, 3], [c, 2], [d, 1]}, B_2 ={[a, 2], [b, 4], [c, 3], [d, 1]}. Platí A ~ B.

e) $P_1 = \{[a, b], [b, c], [c, d], [d, a]\}$, $P_2 = \{[a, c], [b, d], [c, b], [d, a]\}$.

Jinak zapsáno $P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$.

$P_1 \bullet P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & a & c \end{pmatrix}$, $P_2 \bullet P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & b \end{pmatrix}$.

Př. 11: Je dána množina M = $\{1,2,3\}$. V množině M jsou dány relace R, T, U, V takto:

R = $\{[x, y] \in M \times M;\ \ x \neq y \ \Rightarrow\ x + y = 5\}$,

T = $\{[x, y] \in M \times M;\ \ x \neq 2 \ \vee\ y = x + 1\}$,

U = $\{[x, y] \in M \times M;\ \ x < 3 \ \wedge\ y = x + 1\}$,

V = $\{[1,3], [2,1], [3,2]\}$.

a) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z relací R, T, U, V zobrazení v množině M. Pokud ano, určete přesně jejich typ. Je některá z těchto relací permutací na množině M?

b) Zapište relace R^{-1}, V^{-1}, V•V, U•V, R•U, R•(V•U). Je některá z těchto relací zobrazením v množině M? Pokud ano, určete přesně typ.

Řešení: a) R = {[2, 3], [3, 2], [1, 1], [2, 2], [3, 3]}. Není zobrazení.

T = {[1, 1], [1, 2], [1, 3], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [2, 3]}. Není zobrazení.

U = {[1, 2], [2, 3]}. Prosté zobrazení z M do M.

V = {[1, 3], [2, 1], [3, 2]}. Permutace množiny M.

b) R^{-1} = {[3, 2], [2, 3], [1, 1], [2, 2], [3, 3]}. Není zobrazení.

V^{-1} = {[3, 1], [1, 2], [2, 3]}. Permutace množiny M.

V•V = {[1, 2], [2, 3], [3, 1]}. Permutace množiny M.

U•V = {[1, 1], [2, 2]}. Prosté zobrazení z M do M.

R•U = {[3, 3], [1, 2], [2, 3]}. Zobrazení celé M do M, není prosté.

V•U = {[2, 2], [3, 3]}. Prosté zobrazení z M do M.

R•(V•U) = {[2, 3], [3, 2], [2, 2], [3, 3]}. Není zobrazení.