Aritmetika 2 – písemná práce – varianta A

1. Vlaky z Brna do Kuřimi jezdí v odpolední špičce každých 12 minut, zatímco vlaky z Brna do Adamova každých 15 minut. Pokud ve 14:00 odjíždí současně vlaky do Kuřimi i do Adamova, kolikrát odjedou současně do 18:00? [3 body]

14:00 Adamov, Tišnov
14:12 Tišnov
14:15 Adamov
14:24 Tišnov
14:30 Adamov
14:36 Tišnov
14:45 Adamov
14:48 Tišnov
15:00 Adamov, Tišnov

současně: 14:00, 15:00, 16:00, 17:00, 18:00 – pětkrát

nsn(12; 15) = 60, tedy každou celou hodinu tudíž vlaky odjíždí současně.

2. Maruška sbírá květiny s pěti okvětními lístky, Anička se šesti okvětními lístky. Když spočítaly všechny okvětní lístky na všech květech, které posbíraly, zjistily, že jich je 92. Kolik mohlo být květů s pěti okvětními lístky a kolik se šesti okvětními lístky? Uveďte všechny řešení.
Zdenda a Petr sbírali postavičky draků, Zdenda sbíral zásadně draky pětihlavé a Petr draky
Úlohu řešte redukční metodou pomocí neurčité rovnice. [5 bodů]

Maruščiných květů ... m ... po 5
Aniččiných květů ... a ... po 6
okvětních lístků ... 92

$5m + 6a = 92$

$5m = 92 - 6a$

$m = \frac{90}{5} + \frac{2}{5} - \frac{5a}{5} - \frac{a}{5} = 18 - a + \underbrace{\frac{2-a}{5}}_{t}$

$5t = 2 - a$ ... dosadíme: $m = 18 - 2 + 5t + t$

$\underline{a = 2 - 5t}$ $\quad\quad m = 16 + 6t$

řešení – dvojice $[m, a]$: $[16; 2]$; $[10; 7]$; $[4; 12]$ $(t = 0; -1; -2)$

3. Určete, jaký dává výraz $(3x - 17x^4 + 1)^4 - 29x^2$ zbytek po dělení sedmi, jestliže platí $x \equiv 3\ (mod\ 7)$, tedy x dává po dělení 7 zbytek 3. [2 body]

$x \equiv 3 (mod\ 7)$ lze zapsat i takto: $x = 7k + 3$, kde $k \in \mathbb{Z}$

tedy: $3x - 17x^4 + 1 = 3 \cdot 7k + 9 + 17 \cdot 7t + 4 \cdot 17 + 1 = 7[\dots] + 78 = 7u + 1$

$x^4 = (7k+3)^4 = [\text{nějaký násobek } 7] + 3^4 =$ $[3^4 = 81 = 77 + 4]$

$= [\text{nějaký jiný násobek } 7] + 4 = 7t + 4$

$x^2 = (7k+3)^2 = [\text{nějaký násobek } 7] + 9 = \dots = 7s + 2$

$(3x - 17x^4 + 1)^4 - 29x^2 = (7u+1)^4 - 29(7s+2) = 7v + 1 - 7w - 58 =$

$= 7(v - w) - 57 = 7(v - w) - 63 + 6 = 7(v - w - 9) + \underline{6}$

Daný výraz dává po dělení 7 zbytek 6

4. Určete počet všech devítimístných telefonních čísel, které začínají trojčíslím 603, v nichž se vyskytuje každá číslice nejvýše jednou a která jsou dělitelná čtyřmi. [3 body]

dělitelné 4 – na konci dvojčíslí složené ze dvou cifer
z cifer 1, 2, 4, 5, 7, 8 dělitelné čtyřmi:
2 na konci ... 12, 52, 72
4 na konci ... 24, 84
8 na konci ... 28, 48
} 7 možností

zbylé 4 číslice – permutace, tedy

$7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 24 = \underline{168 \text{ čísel}}$

5. Kolika způsoby můžeme ze 11 dívek a 13 chlapců dětí vybrat trojici, která bude zastupovat třídu na školní akci? Kolika způsoby můžeme takovou trojici vybrat, chceme-li, aby v trojici byla alespoň jedna dívka? Kolika způsoby můžeme takovou trojici vybrat tak, aby v ní byly nejvýše dvě dívky? [4 body]

Všechny děti: 24; trojice: $\binom{24}{3}$

aspoň 1 dívka: $\underbrace{\binom{11}{1}\cdot\binom{13}{2}}_{1 \text{ dívka}} + \underbrace{\binom{11}{2}\binom{13}{1}}_{2 \text{ dívky}} + \underbrace{\binom{11}{3}}_{3 \text{ dívky}}$

nejvýše 2 dívky: $\underbrace{\binom{13}{3}}_{\text{žádná dívka}} + \underbrace{\binom{11}{1}\binom{13}{2}}_{1 \text{ dívka}} + \underbrace{\binom{11}{2}\cdot\binom{13}{1}}_{2 \text{ dívky}}$

6. Na stůl jsme položili šest pastelek (žlutá, červená, modrá, zelená, hnědá, černá) Jaká je pravděpodobnost, že červená a černá leží vedle sebe? 3 body]

Všechny možnosti: $6! = 720$ [0,5 bodu]

černá a červená vedle sebe

- červená vlevo, černá vpravo: $5! = 120$ [0,5 b]
- červená vpravo, černá vlevo: $5! = 120$ [0,5 b]

celkem: $120 + 120 = 240$ [0,5 b]

pravděpodobnost: příznivé ku možným

$$P(čč) = \frac{240}{720} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \quad (\text{cca } 33\,\%)$$

[1 bod]