Aritmetika 2 – jaro 2023
1. prezentace – definice, věty, důkazy

Mgr. Helena Durnová, Ph.D.
RNDr. Petra Bušková, Ph.D.
Mgr. Jan Wossala, Ph.D.

Intuitivně: co jsou a k čemu jsou matematické definice a věty?

- Stručně řečeno, **definice** jsou k tomu, abychom nemuseli vždy znovu složitě vysvětlovat, co máme na mysli, když řekneme … třeba prvočíslo.
- *Definice se dají přirovnat k učení se slovíček v cizím jazyce: nemá smysl se dohadovat, zda se ostrov anglicky řekne isle nebo ne, musíme se to naučit.*

- Naopak **věty** vyjadřují vztahy mezi definovanými objekty. Jsou to **tvrzení**, přesněji pravdivá tvrzení, o matematických objektech.
- *Hrajeme-li podle stejných pravidel, v matematice se nehádáme, spíše ten, kdo dříve pochopí, vysvětluje druhému, co objevil, co vidí, a ten druhý ještě ne.*
- *Např. rovnost vrcholových úhlů; jednoznačnost rozkladu na prvočísla, …*

MUNI PED

Formálně: co jsou a k čemu jsou matematické definice?

Matematickou definicí rozumíme gramatickou větu, kterou přesně vymezujeme význam nějakého matematického pojmu pomocí pojmů základních nebo dříve zavedených. Současně tak vymezujeme podstatné vlastnosti zaváděného pojmu, stanovujeme jeho název, případně symbolické označení.

Definice nám pomůže ujasnit si, že hovoříme skutečně o tomtéž.
Na rozdíl od definic používaných v humanitních vědách (např. definice pojmu nadané dítě, začínající učitel, …), kde zpravidla uvedeme různé definice a pak se postavíme na něčí stranu nebo na základě uvedeného řekneme, co to znamená pro nás, v matematice slouží definice k domluvě; o definici se v matematickém textu nediskutuje, nýbrž se přijímá

MUNI PED

Jaké chyby děláme v definicích?

Příliš **široká** definice – zahrnuje i objekty, které nechceme

Např. Čtverec je rovinný objekt, který má čtyři strany.
(zkuste vymyslet další příliš široké definice čtverce)

Příliš **úzká** definice – nezahrnuje všechny objekty, které chceme

Např. Kružnice je množina bodů, které mají od středu vzdálenost 5 cm.

Jaké další chyby děláme v definicích?

Nadbytečná definice – obsahuje více slov téhož významu (pleonasmus)

Např. Čtverec je čtyřúhelník, který má čtyři strany a tyto strany jsou stejně dlouhé.

Definice **kruhem** – odkazuje na pojem, který má být vysvětlen

Např. Prvočíslo je přirozené číslo, které není složené.
(nelze: číslo složené jsme definovali jako "ne-prvočíslo")

Obsah a rozsah pojmu

– **Obsah pojmu:**
– Soubor všech vlastností, které jsou pro daný pojem charakteristické

Př: vlastnosti prvočísla, soudělných čísel, ...

– **Rozsah pojmu:**
– Soubor všech prvků, které mají charakteristické vlastnosti uvedené v definici daného pojmu

Př: prvočísla jsou 2, 3, 5, 7, atd., ale ne 1, ne –3, ne –7, ….

MUNI PED

Definice implicitní a explicitní

- Pojmy definujeme přímo (explicitně), jiné nepřímo (implicitně)

- Příklady implicitních definic:
- Např. Každé číslo lze v desítkové soustavě zapsat pomocí číslic 0-9 a mocnin čísla 10; v tomto vyjádření nazýváme počet číslic *řád soustavy* (zde desítková; známe i binární, čtyřkovou, ….), číslici u i-té mocniny deseti nazýváme číslicí i-tého řádu atp.
- Jsou to ty definice, které "nejsou na první pohled poznat".

Oficiální matematická terminologie a značení

(z předmluvy ke *Slovníku školské matematiky*)

"Matematik často střídá označení podle toho, o kterém problémovém okruhu pojednává a z jakého hlediska. Nelze proto např. vyhovět přání některých školských pracovníků, aby se závazně stanovilo, jakými písmeny se mají označovat množiny a jakými jejich prvky. Jde-li třeba v geometrii o množinu bodů, označí se prvky velkými písmeny, pracujeme-li s množinou úhlů, použijí se pro prvky písmena řecké abecedy apod. *Pokus o důslednost by nás zavedl do slepé uličky*."

– Česká terminologická komise pro matematiku, v Praze v září 1981

(Matematici chtěli terminologii sjednotit. Jejich cílem bylo také pokud možno používat slova, která se běžně nepoužívají, aby bylo hned jasné, že jde o pojem matematický.)

MUNI PED

Hra: co je to, když se řekne….

- *Zlomek*
- *Množina*
- *Číslo*
- *Rovnice*
- *Rovnost*
- *Nerovnost*
- *Bod*

Formálně: co jsou a k čemu jsou matematické věty?

Matematickou větou rozumíme pravdivý výrok s matematickým obsahem. Její pravdivost lze dokázat. Někdy se matematické větě též říká **matematická poučka** nebo **teorém**.

Větou (matematickou větou) formulujeme "zjevnou pravdu", například to, že jediné sudé prvočíslo je 2, relace rovnosti je symetrická i antisymetrická současně. Pokud dva lidé zacházejí se stejnými pojmy, na jejichž významu se dohodli pomocí matematických definic (konvence), o pravdivosti matematické věty se nemohou hádat, pouze se o ní přesvědčit.
K přesvědčení nepřesvědčeného slouží **důkaz**: krok po kroku ukážeme, že to, co vidíme, je jasná pravda :-)

MUNI PED

Hra: které matematické věty jsou ekvivalence a které implikace (zejména z aritmetiky)

- *Pravidla pro dělitelnost: 2, 3, 4, 5, 6, ….*
- *Číslo dělitelné 9 je vždy dělitelné 3*
- *Dává-li číslo k po dělení 4 zbytek 1, pak dává zbytek 1 po dělení 4 i jeho druhá mocnina*
- *…*
- *Implikace s existenčním kvantifikátorem* $\exists x \in D\colon\ q(x) \Longrightarrow\ p(x)$
- *Implikace se všeobecným kvantifikátorem* $\forall x \in D\colon\ q(x) \Longrightarrow\ p(x)$
- *Obrácená věta (nemusí být pravdivá)* $q(x) \Longrightarrow\ p(x)$
- *Obměněná věta* $\neg q(x) \Longrightarrow\ \neg p(x)$

MUNI PED

Formálně: co jsou a k čemu jsou matematické důkazy?

- **Důkaz**: je prostředek k zviditelnění zřejmého. Probíhá krok po kroku a jeho forma závisí na tom, kdo komu důkaz říká
- 1. studující učiteli na písemce: jde jen o kontrolu, zda studující správně pochopil obsah definic (Př.: Dokažte, že neexistuje číslo, které je současně prvočíslo i číslo složené).
- 2. učitel studujícímu (např. ve skriptech, na přednášce, …): snaha osvětlit problém, rozdělit myšlenkový postup na menší kroky
- 3. matematik matematikovi: důkaz "jednou provždy"
- Formálně: přímý, nepřímý, sporem, matematickou indukcí

MUNI
PED

Důkazy matematických vět

- **Důkaz přímý:** z předpokladu přímo (s určitým mezikrokem) dojdeme k důsledku
- Dokažte, že součin dvou lichých čísel je lichý.
- **Důkaz nepřímý:** důkaz věty obměněné
- Dokažte, že je-li n^2 liché číslo, je také n liché číslo.
- **Důkaz sporem:** uvažujeme opačný závěr (důsledek) a dojdeme ke sporu s předpokladem (vychází z negace implikace pomocí konjunkce)
- Dokažte, že je číslo $\sqrt{2}$ iracionální.
- **Důkaz matematickou indukcí:** dokážeme pro $n = 1$, poté předpokládáme platnost pro $n = k$ a dokážeme pro $n = k + 1$
- Dokažte, že pro každé přirozené n platí $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)$