MUNI
PED

IMAp01, IMAk01 – podzim 2021
Dělitelnost v oboru přirozených čísel

Mgr. Helena Durnová, Ph.D.
RNDr. Petra Bušková, Ph.D.

Relace dělitelnosti

– Definice 1:

Říkáme, že celé číslo ***b* dělí** celé číslo ***a*** (nebo ***b* je dělitelem *a*** nebo ***a* je dělitelné *b*** nebo ***a* je násobkem *b***), právě když existuje celé číslo *x*, pro které platí $a = b \cdot x$.

Symbolicky: $b|a \iff (\exists x \in \boldsymbol{Z})(a = b \cdot x)$

MUNI
PED

Relace dělitelnosti

- Jestliže k celým číslům *a, b* neexistuje takové celé číslo *x, že* $a = b \cdot x$, říkáme, že ***b* nedělí *a***, značíme $b \nmid a$.
- Platí-li, že $a = b \cdot x$, pak čísla *b, x* jsou dělitelé čísla *a* a nazývají se **sdružení dělitelé čísla *a***.
- Dělitelé čísla *a* patřící do množiny přirozených čísel se nazývají **přirození dělitelé čísla *a***.

MUNI
PED

Relace dělitelnosti

- Každé celé číslo $A \neq 0; 1; -1$ má alespoň 4 celočíselné dělitele, a to čísla $1; A; -1; -A$. Tyto dělitele nazýváme **samozřejmými děliteli čísla A**. Ostatní dělitele (pokud existují) nazýváme nesamozřejmými děliteli čísla A.

- Čísla 1 a -1 mají právě dva celočíselné dělitele, a to 1 a -1.

- Číslo 0 má nekonečně mnoho dělitelů, a to každé celé číslo.

Relace dělitelnosti

– **Příklad 1**

Rozeberme si dělitele čísla 10

– Celočíselných dělitelů čísla 10 je osm, jsou to čísla

$1; 2; 5; 10; -1; -2; -5; -10.$

– Dvojice sdružených dělitelů čísla 10 jsou:

$$1; 10 \quad 2; 5 \quad -1; -10 \quad -2; -5$$

– Samozřejmí dělitelé čísla 10 jsou čísla

$$1; 10; -1; -10$$

– Přirození dělitelé čísla 10 jsou čísla

$$1; 2; 5; 10$$

Relace dělitelnosti

– Věta 1:

Pro libovolná celá čísla a, b, c platí:

– jestliže $b|a$ a zároveň $b|c$, pak také $b|(a+c)$ a $b|(a-c)$
  symbolicky $(b|a \;\wedge\; b|c) \Longrightarrow (b|(a+c) \wedge \; b|(a-c))$

– jestliže $b|a$, pak také $(-b)|a$, symbolicky $b|a \;\Longrightarrow (-b)|a$

– jestliže $b|a$, pak také $b|(-a)$, symbolicky $b|a \;\Longrightarrow b|(-a)$

MUNI PED

- Důkaz věty 1:

- Předpokládejme, že pro libovolná celá čísla a, b, c platí $b|a$ a $b|c$. Podle definice 1 to znamená, že existují celá čísla x_1, x_2 taková, že $a = b \cdot x_1, \;\; c = b \cdot x_2$. Po úpravě dostáváme

$$a + c = b \cdot (x_1 + x_2)$$

$$a - c = b \cdot (x_1 - x_2)$$

Protože součet a rozdíl celých čísel x_1, x_2 je zase celé číslo, platí

$$b|(a + c), \qquad b|(a - c)$$

- Plyne z možnosti zapsat $-b = (-1) \cdot b$.
- Plyne z možnosti zapsat $-a = (-1) \cdot a$.

MUNI PED

Relace dělitelnosti

Definice 2

Celé číslo dělitelné dvěma se nazývá **sudé číslo**.

Celé číslo, které není dělitelné dvěma (dává při dělení dvěma zbytek 1), se nazývá **liché číslo**.

Relace dělitelnosti - příklady

Příklad 2

Dokažte, že

a) součet libovolného sudého čísla a libovolného lichého čísla je liché číslo;

b) součin libovolných dvou lichých čísel je liché číslo;

c) součin libovolného sudého čísla s libovolným lichým číslem je sudé číslo.

Příklad 3

Určete vlastnosti relace „dělitelnost celých čísel“ a tvrzení zdůvodněte.

Příklad 4

Jsou dána čísla *a, b*, pro která platí, že *a* je dělitelné osmi a *b* je dělitelné šesti. Dokažte, že jejich součin je dělitelný číslem 24.

Relace dělitelnosti - příklady

Příklad 5

Dokažte, že

a) součet tří po sobě jdoucích celých čísel, z nichž prostřední je sudé, je dělitelný šesti;

b) součet každých tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 (počínaje 2^1) je dělitelný 7;

c) druhá mocnina každého lichého čísla zmenšená o 1 je dělitelná 8.

Výsledky příkladů 2-5

Příklad 2:

a) 2n+(2m+1)=2(n+m)+1

b) (2n+1)(2m+1)=4mn+2n+2m+1=2(2mn+n+m)+1

c) 2n(2m+1)=4mn+2n=2(2mn+n)

Příklad 3: reflexivní, tranzitivní

Příklad 4: a=8k, b=6l, a.b=8k.6l=24(2kl)

Příklad 5:

a) (n-1)+n+(n+1)=3n, dle zadání je 2|n

b) $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n(1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^n$

Znaky dělitelnost

- Uvedeme zde věty, na základě nichž rozhodujeme o dělitelnosti čísla jiným číslem aniž bychom dělení provedli.

- Pro zjednodušení zápisu ve všech větách uvažujme přirozená čísla zapsaná v desítkové soustavě. Na základě předchozí prezentace lze věty o dělitelnosti rozšířit i na celá čísla.

MUNI
PED

- Přirozené číslo *a* je dělitelné **dvěma (pěti, deseti)** právě tehdy, když je dvěma (pěti, deseti) dělitelné číslo zapsané jeho cifrou nultého řádu.
- Přirozené číslo *a* je dělitelné **čtyřmi** právě tehdy, když je čtyřmi dělitelné číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím.
- Přirozené číslo *a* je dělitelné **osmi** právě tehdy, když je osmi dělitelné číslo zapsané jeho posledním trojčíslím.
- Přirozené číslo *a* je dělitelné **třemi (devíti)** právě tehdy, když je třemi (devíti) dělitelný jeho ciferný součet (tj. součet všech čísel zapsaných jednotlivými ciframi v zápisu čísla *a*).
- Přirozené číslo *a* je dělitelné **jedenácti** právě tehdy, když je jedenácti dělitelný součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi sudého řádu zmenšený o součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi lichého řádu v zápisu čísla *a*.

Znaky dělitelnosti

– Všechny znaky dělitelnosti ze 3. slidu plynou z obecnějších vět:

– Dělíme-li přirozené číslo *a* **dvěma (pěti, deseti)**, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme dvěma (pěti, deseti) číslo zapsané cifrou nultého řádu v zápisu čísla *a*.
– Dělíme-li přirozené číslo *a* **čtyřmi**, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme čtyřmi číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím (u jednociferných čísel doplníme před cifru nulu).
– Dělíme-li přirozené číslo *a* **osmi**, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme osmi číslo zapsané jeho posledním trojčíslím (u méně než trojciferných čísel doplníme před cifry nuly).
– Dělíme-li přirozené číslo *a* **třemi (devíti)**, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme třemi (devíti) jeho ciferný součet.
– Dělíme-li přirozené číslo *a* **jedenácti**, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme jedenácti součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi sudého řádu zmenšený o součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi lichého řádu v zápisu čísla *a*.

Příklady

Příklad 6

Rozhodněte, zda je číslo 4 356 dělitelné čísly 2; 3; 4; 5; 8; 9 a 11. Pokud není některým z čísel dělitelné, určete zbytek po dělení.

Příklad 7

V číslech 437*; 32* a 4*54 nahraďte symbol * takovou cifrou, aby vzniklé číslo bylo dělitelné

a) čtyřmi;

b) osmi;

c) devíti;

d) jedenácti.

Uveďte vždy všechna řešení.

Příklady

Příklad 8

O pěticiferném čísle 448** víme, že je dělitelné čísly 3 a 25. Doplňte cifry na místa hvězdiček.

Příklad 9

Z čísla 74 851 562 vyškrtněte čtyři cifry tak, aby vzniklé číslo bylo dělitelné pěti a třemi. Najděte všechny možnosti.

Příklad 10

Doplňte rodné číslo 950324/**** tak, aby bylo platné. Stačí uvést jednu možnost.

Příklad 11

Dokažte s využitím rozvinutého zápisu čísla kritérium dělitelnosti

a) čtyřmi

b) devíti

c) jedenácti

Výsledky příkladů

Příklad 6: není dělitelné pěti (zb. 1) a osmi (zb. 4)

Příklad 7:

	a)	b)	c)	d)
437*	2, 6	6	4	8
32*	0, 4, 8	0, 8	4	-
4*54	-	-	5	5

Příklad 8: 50

Příklad 9: pro dělitelnost pěti musíme škrtnout poslední dvě cifry, zbylé cifry škrtáme tak, abychom získali ciferný součet dělitelný třemi: 7485, 7515, 4815, 4515, 7815, 7455

Příklad 10: například 1000

Prvočísla a čísla složená

- Rozdělíme přirozená čísla na dvě velké podmnožiny a jednu jednoprvkovou:
  - číslo 1 bude patřit do zvláštní podmnožiny
  - prvočísla (čísla, která mají právě dva různé dělitele) tvoří jednu velkou podmnožinu
  - čísla složená (čísla s alespoň třemi různými děliteli) tvoří druhou velkou podmnožinu

  - Podmnožina prvočísel a podmnožina čísel složených mají prázdný průnik
  (tj. číslo je buď prvočíslo, nebo číslo složené).

Definice: prvočíslo, číslo složené

Definice 3:

Přirozené číslo *p*>1 nazýváme **prvočíslem**, právě když má právě dva různé přirozené dělitele (tj. čísla 1 a p).

Přirozené číslo *a*>1, které není prvočíslem (tj. má více než dva přirozené dělitele), nazýváme **složeným číslem**.

Příklady

- Číslo 13 je prvočíslo, protože má právě dva přirozené dělitele, čísla 1 a 13. Jsou to samozřejmí dělitelé čísla 13.

- Číslo 12 je složené číslo, protože má více než dva přirozené dělitele: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

- Číslo 1 podle definice není prvočíslo ani číslo složené.

Věta o existenci prvočíselného dělitele

Věta 2: Každé přirozené číslo $n > 1$ má aspoň jednoho prvočíselného dělitele.

***Důkaz**:* Číslo $n > 1$ má alespoň jednoho dělitele, který je větší než 1. Z jeho dělitelů je jeden nejmenší, označme ho p.
Tento nejmenší přirozený dělitel $p > 1$ musí být prvočíslem.
Kdyby totiž p bylo složené číslo, tj. $p = a.b$, kde $1 < a <$ p , $1 < b < p$, pak by ze vztahů $a| p$ a $p|n$ plynulo $a| n,$ což by znamenalo, že existuje dělitel $a < p$ čísla $n,$ což by bylo v rozporu s naším předpokladem, že p je nejmenší z přirozených dělitelů čísla $n.$ Číslo p je tedy prvočíslo.

MUNI PED

Jak rozhodneme, zda je dané číslo prvočíslo nebo číslo složené?

Máme-li rozhodnout o tom, zda dané číslo $a > 1$ je prvočíslem nebo složeným číslem, můžeme postupovat tak, že zjišťujeme, zda je dané číslo dělitelné prvočísly menšími než toto číslo.

Platí totiž **věta**: *Existuje-li prvočíslo menší než číslo a, které dělí číslo a, pak a je složené číslo.*

Uvedený postup je však značně zdlouhavý. Proto budeme využívat následující věty:

Věta 3. Jestliže přirozené číslo *a* není dělitelné žádným prvočíslem menším nebo rovným odmocnině z a, pak *a* je prvočíslo.

Důkaz věty 3

Provedeme nepřímý důkaz, tj. přímý důkaz věty obměněné)

Věta obměněná k větě 3: Není-li *a* prvočíslo, pak je dělitelné aspoň jedním prvočíslem *p* menším než odmocnina z *a.*

Tedy předpokládejme, že číslo *a* není prvočíslo, pak podle věty 2. existuje prvočíslo *p*, které je nejmenším dělitelem čísla *a*. Můžeme psát: $a = q \,.\, p$ a současně $p < a$; současně platí také: *p je* menší nebo rovno *q .* Je tedy *a* větší nebo rovno p^2 a odtud plyne, že *p* musí být menší nebo rovno odmocnině z *a.*

MUNI PED

Jak zjistit, zda dané číslo je prvočíslo

Příklad: *Zjistěte, zda 173 je prvočíslo nebo složené číslo.*

Řešení: Odmocnina ze 173 je menší než 14 (druhá mocnina 14 je 196), proto budeme zjišťovat, zda číslo 173 je dělitelné některým z prvočísel 2, 3, 5, 7, 11, 13.
Číslo 173 není dělitelné žádným z těchto prvočísel, proto je prvočíslem.

Prvočíselný rozklad

Příklady

Příklad 12

Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou čísla 437, 593, 1007, 2771, 3012 prvočísla, nebo čísla složená.

Příklad 13

Najděte alespoň tři prvočísla větší než 120 a zároveň menší než 150.

Příklad 14

Najděte největší prvočíslo, kterým je dělitelné číslo

a) 1326

b) 2406

c) 4380

Příklady

Příklad 15

Rozložte na součin prvočinitelů číslo

a) 500

b) 2024

c) 1326

Příklad 16

Najděte alespoň tři přirozená čísla, která jsou dělitelná

a) všemi jednocifernými prvočísly,

b) všemi přirozenými čísly od jedné do deseti.

Určete v obou případech nejmenší přirozené číslo, které podmínkám vyhovuje.

Výsledky příkladů

Příklad 12: prvočíslem je pouze 593

Příklad 13: 127, 131, 137, 139, 149

Příklad 14: a) 17, b) 401, c) 73

Příklad 15: $500 = 2^2 \cdot 5^3,\ 2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23,\ \ 1326 = 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17$

Příklad 16:

a) nejmenší 210, další 420, 630

b) nejmenší 5040, další 10 080, 20 160

MUNI PED

Největší společný dělitel

Jak už název napovídá, největší společný dělitel dvou přirozených čísel je ten největší ze všech společných dělitelů.
Např. čísla 50 a 60 mají následující společné dělitele: 1, 2, 5, 10
Největší z těchto společných dělitelů je číslo 10. Formálně řečeno:

Definice 4: Společný dělitel přirozených čísel *a, b* je každé přirozené číslo *d*, pro které platí $d \mid a$ a $d \mid b$.

Definice 5: Největší společný dělitel přirozených čísel *a, b* je ten ze společných dělitelů, který je dělitelný všemi společnými děliteli. Označujeme **D(*a*,*b*)**.

MUNI PED

Hledání největšího společného dělitele

Největšího společného dělitele dvou přirozených čísel lze najít třemi způsoby:

(a) využitím definice;

(b) pomocí tzv. Eukleidova algoritmu;

(c) pomocí rozkladu na součin prvočinitelů.

Hledání s využitím definice lze použít u malých čísel, u větších je spíše neobratné.

Hledání pomocí rozkladu na prvočísla se učí na ZŠ.

Eukleidův algoritmu nabízí silný nástroj pro hledání největšího společného dělitele.

Příklad

<u>Příklad:</u> *Určete množinu všech společných dělitelů čísel 24 a 30 a největší společný dělitel čísel 24 a 30.*

Řešení: Číslo 24 je dělitelné čísly 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Číslo 30 je dělitelné čísly 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Množina všech společných dělitelů čísel 24 a 30 je průnik těchto dvou množin, tj. množina {1, 2, 3, 6}

Největší společný dělitel D(24,30) = 6.

Toto číslo je dělitelné všemi menšími společnými děliteli, tj. platí:

$1 \mid 6$, $2 \mid 6$, $3 \mid 6$, $6 \mid 6$

MUNI PED

Věta (Eukleidův algoritmus)

Věta 5. Jestliže přirozené číslo *a* dává při dělení nenulovým přirozeným číslem *b* nenulový zbytek *z*, tzn. $a = b \cdot q + z$ (přičemž $z < b$), pak platí, že **množina všech společných dělitelů čísel *a, b* je množinou všech společných dělitelů čísel *b, z***.
Dále platí: Největší společný dělitel čísel *a, b* je roven největšímu společnému děliteli čísel b, z, tj. $D(a,b) = D(b,z)$.

Tím převádíme úkol určit D(a,b) na určení D(*b,z*). To je výhodné, neboť čísla *b* a z jsou menší než čísla *a, b*. **Důkaz** je uveden v ZEA, s. 189.
*Na větě 5. je založen postup výpočtu největšího společného dělitele dvou přirozených čísel nazývaný **Eukleidův algoritmus.***

Eukleidův algoritmus (řešený příklad)

<u>Příklad:</u> Zjistěte D (268, 80), tj. největšího společného dělitele čísel 268 a 80, pomocí Eukleidova algoritmu.

Řešení:	268 : 80 = 3 neboli	268 = 80 . 3 + 28	(zbytek 28)
D (80, 28):	80 : 28 = 2	80 = 28 . 2 + 24	(zbytek 24)
D (28, 24):	28 : 24 = 1	28 = 24. 1 + 4	(zbytek 4)
D (24, 4):	24 : 4 = 6	24 = 6 . 4	(zbytek 0)

Největší společný dělitel čísel 268 a 80 je číslo 4, tj. poslední nenulový zbytek při postupném dělení.

Rozšíření definice (největšího) společného dělitele na tři a více čísel

Definice 3 (společný dělitel dvou čísel) a Definici 4 (největší společný dělitel dvou čísel D (a, b)) lze rozšířit na libovolný konečný počet přirozených čísel.

Příklad: Hledáme společné dělitele čísel 12, 27 a 36.
Společnými děliteli čísel 12 a 27 jsou čísla 1 a 3; D (12, 27) = 3.
Společnými děliteli čísel 27 a 36 jsou číslo 1, 3 a 9; D (27, 36) = 9.
Společnými děliteli čísel 12 a 36 jsou číslo 1, 2, 3, 4, 6 a 12;
D (12, 36) = 12. Tedy D (12, 27, 36) = 3.

MUNI PED

Čísla soudělná a nesoudělná

Libovolná dvě čísla mají vždy alespoň jednoho společného dělitele. Tím je číslo 1. Pokud jiného společného dělitele nemají, nazývají se **nesoudělná**; v opačném případě se nazývají **soudělná**.

Formálně:

Definice 6. Přirozená čísla *a, b* se nazývají **nesoudělná**, právě když je jejich největší společný dělitel roven 1.

Stručně píšeme: $D(a,b) = 1$

Definice 7. Přirozená čísla *a, b* se nazývají **soudělná**, právě když je jejich největší společný dělitel větší než 1. Stručně: $D(a,b) > 1$.

Příklady: čísla soudělná a nesoudělná

Podobně jako Definice 3 a 4 lze Definice 5 a 6 rozšířit na libovolný konečný počet přirozených čísel.

Příklady:

Čísla 4, 7, 6, 9 jsou nesoudělná, protože D(4,7,6,9) = 1

Čísla 8, 12, 32 jsou soudělná, protože D(8, 12, 32) = 4

MUNI PED

Příklady

Příklad 17

Určete všechny přirozené společné dělitele čísel:

a) 60, 36

b) 48, 72, 0

c) 24, -132, 54

Příklad 18

K číslu $a = 51$ najděte číslo b tak, aby $D(a,b) = 17$.

Příklad 19

Najděte dvě přirozená čísla, jejichž součet je 432 a největší společný dělitel je 36.

Příklady

Příklad 20

Největší společný dělitel dvou přirozených čísel je 24. Jedno z nich je dvojnásobkem druhého. Která jsou to čísla?

Příklad 21

Určete pomocí rozkladu na prvočinitele i pomocí Eukleidova algoritmu:

a) D(455, 273)

b) D(360, 504)

c) D(90, 108, 84)

d) D(568, 426, 355)

Výsledky příkladů

Příklad 17: a) 1, 2, 3, 4, 6, 12, b) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, c) 1, 2, 3, 6

Příklad 18: 51= 17.3, proto b musí být násobek 17,ale ne násobek 3, tomu vyhovuje např. 17, 34, 170 atd.

Příklad 19: 36 a 396, 180 a 252

Příklad 20: 24 a 48

Příklad 21: a) 91, b) 72, c) 6, d) 71

Nejmenší společný násobek

Podobně jako u největšího společného dělitele, i zde je pojem intuitivní. Ze všech společných násobků dvou čísel (kterých je ovšem nekonečně mnoho) vybíráme právě ten nejmenší.

Např. čísla 15 a 6 mají následující násobky:

15 -> 15; **30**; 45; **60**; 75; **90**; 105; 120; 135; 150; 165; 180 …

6 -> 6; 12; 18; 24; **30**; 36; 42; 48; 54; **60**; 66; 72; 78; 84; **90**; 96 …

Nejmenší společný násobek čísel 6 a 15 je číslo 30. Dalšími společnými násobky jsou čísla 60, 90, 120, 150 … Je vidět, že nejmenší společný násobek dělí všechny společné násobky daných dvou čísel.

Definice n(a,b)

Definice 8:
Společný násobek přirozených čísel *a, b* je každé přirozené číslo *m*, které je dělitelné oběma čísly *a, b*, tedy $a|m$ a $b|m$.

Definice 9:
Nejmenší společný násobek přirozených čísel *a, b* je ten ze společných násobků, který je dělitelem všech společných násobků čísel *a, b*. Označujeme **n(*a,b*)**

Nejmenší společný násobek

- V množině přirozených čísel platí, že n(a,b) je nejmenší číslo ze společných násobků čísel a, b.
- Definice 8 i 9 lze rozšířit na libovolný počet přirozených čísel a_1, a_2, … , a_n.

Věta 6:
Pro každá dvě přirozená čísla a, b platí $a \cdot b = \mathrm{n}(a,b) \cdot \mathrm{D}(a,b)$.

Pozor, Větu 6 nelze rozšířit na libovolný počet přirozených čísel!

Hledání n(*a*,*b*)

– Nejmenší společný násobek čísel *a, b* můžeme určit třemi způsoby:

a) využitím definice, tj. vypsáním násobků obou čísel a nalezením nejmenšího společného násobku,

b) využitím vztahu $a \cdot b = \mathrm{n}(a, b) \cdot \mathrm{D}(a, b)$,

c) pomocí rozkladu na součin prvočinitelů – n(*a*,*b*) musí obsahovat všechna prvočísla vyskytující se v rozkladu čísel *a, b,* a to v nejvyšší mocnině, ve které se vyskytují.

Příklad

Najděte nejmenší společný násobek čísel 24 a 36.

Řešení:

a) podle definice:

Násobky čísla 24: 24, 48, **72**, 96, 120, **144**, 168, 192, **216**, …

Násobky čísla 36: 36, **72**, 108, **144**, 180, **216**, 252, 288, 324, …

Nejmenší společný násobek **n(*a*,*b*)=72**.

b) využitím vztahu $a \cdot b = \mathrm{n}(a,b) \cdot \mathrm{D}(a,b)$

Libovolným způsobem určíme, že D(*a*,*b*)=12 (platí $24 = 2 \cdot 12,\ 36 = 3 \cdot 12$).

$$24 \cdot 36 = \mathrm{n}(a,b) \cdot 12$$

MUNI PED

Příklady

Příklad 22

Nalezněte alespoň tři přirozené společné násobky čísel

a) 5, 12

b) 17, 0

c) - 6, 8, 17

Příklad 23

Určete všechny společné násobky čísel 60 a 144, které jsou větší než 1000 a menší než 2000.

Příklad 24

Určete obecně

a) n(a,1)

b) n(a,a)

c) n(a,ab)

d) n(a,a+1)

Příklady

Příklad 25

Jak se změní nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel, když každé z nich vynásobíme třemi?

Příklad 25

Určete pomocí rozkladu na prvočinitele i pomocí vztahu mezi n(a,b) a D(a,b)

a) n(222, 185)

b) n(360, 504)

c) n(90, 108, 84)

d) n(156, 182, 208)

Výsledky příkladů

Příklad 22: a) 60, 120, 240, b) nelze, c) 408, 816, 1224

Příklad 23: 1440

Příklad 24: a) a, b) a, c) ab, d) a.(a+1)

Příklad 25: třikrát se zvětší

Příklad 26: a) 1110, b) 2520, c) 3780, d) 4368

Rozklad přirozeného čísla na součin prvočinitelů

Prvočíselný rozklad přirozeného čísla využíváme především k výpočtu největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku daných čísel a k určení počtu všech přirozených dělitelů daného přirozeného čísla.

Příklady - prvočíselný rozklad:

$132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$

$121 = 11 \cdot 11$

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

MUNI PED

Výpočet největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku z rozkladu daných čísel na součin prvočinitelů.

Největší společný dělitel daných přirozených čísel je součinem všech prvočinitelů, kteří se současně vyskytují v prvočíselných rozkladech všech daných čísel, a to s nejmenším s vyskytujících se exponentů.

Nejmenší společný násobek daných čísel je součinem všech různých prvočinitelů, kteří se vyskytují v rozkladech daných čísel, a to v největší mocnině.

Hledání D(a,b) a n(a,b) pomocí prvočíselného rozkladu

Příklad: *Zjistěte* D(108, 90) a n(108, 90).

Řešení: $108 = 2^2 . 3^3$ $\quad 90 = 2 . 3^2 . 5$

$D(108, 90) = 2 . 3^2 = 18$

$n(108, 90) = 2^2 . 3^3 . 5 = 540$

MUNI PED

Určení počtu dělitelů

- **Věta**: Je li

$$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$$

rozklad přirozeného čísla a > 1 na prvočinitele, pak počet dělitelů čísla a je určen vztahem

$$(e_1 + 1)(e_2 + 1) \dots (e_k + 1)$$

Všechny přirozené dělitele čísla a určíme jako všechny možné součiny prvočinitelů, přičemž každý prvočinitel, probíhá všechny mocniny od 0. po tu, ve které se vyskytují v rozkladu.

Příklad

Příklady

Příklad 27. Vypočítejte

a) D[n(84, 54), n(24, 132)]

b) n[D(84, 132), n(24, 54)]

Příklad 28. Zjistěte, zda platí: D[n(48, 72), n(48, 144)] = n [48, D(72, 144)]

Příklad 29. Určete nejmenší nenulové přirozené číslo, kterým je třeba násobit

a) číslo 1224, abychom dostali druhou mocninu přirozeného čísla

b) číslo 600, abychom dostali třetí mocninu přirozeného čísla.

Příklady

Příklad 30. Určete všechny přirozené dělitele čísel   68,   360, 504.

Příklad 31. Určete počet všech přirozených dělitelů čísel   420, 824, 687.

Příklad 32. Obdélník o rozměrech 56cm a 98cm se má rozdělit příčkami rovnoběžnými se stranami obdélníku na čtverce co možná největší. Kolik bude čtverců a jak velká bude jejich strana?

Příklad 33. V krabici jsou tužky. Víme, že je jich více než 200 a méně než 300 a že se dají svázat do svazků po 10 a po 12. Kolik je tužek krabici?

MUNI
PED

Výsledky příkladů

Příklad 27: a) 12, b) 216

Příklad 28: ano, obě strany se rovnají 144

Příklad 29: a) 34, b) 45

Příklad 30:

68: 1, 2, 4, 17, 34, 68

360: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360

504: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 56, 63, 72, 84, 126, 168, 252, 504

Příklad 31: 420 má 24 dělitelů, 824 má 8 dělitelů, 687 má 4 dělitele

Příklad 32: 28 čtverců s hranou délky 14 cm

Příklad 33: 240 tužek