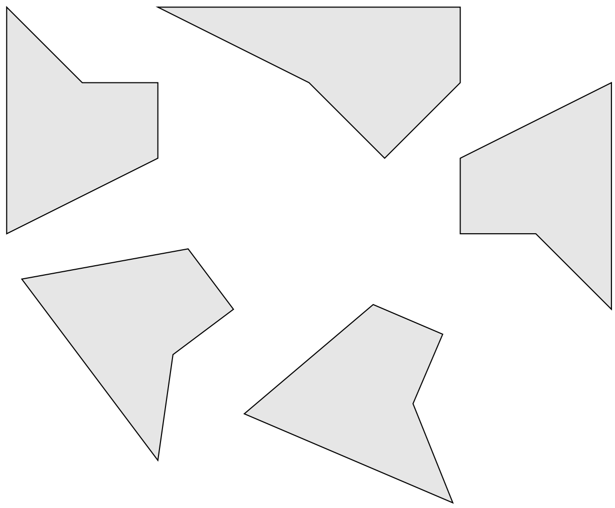
Shodnosti

Co znamená, když řekneme, že jsou dva útvary shodné? Z minulého semestru víme, že např. pro dvojici trojúhelníků známe čtyři kritéria (která?), podle kterých můžeme o shodnosti rozhodnout. Jak bychom však rozhodli o shodnosti pětiúhelníků na obrázku 1? Podle nějakého obdobného kritéria typu *sssss*?



Obrázek 1: Jeden z pětiúhelníků není shodný se zbylými. Který? A proč?

Obecná definice shodnosti útvarů vychází v podstatě z intuitivního chápání shodnosti na 1. stupni ZŠ. Dva útvary jsou v tomto chápání shodné, pokud se dají manipulacemi (posunováním nebo otáčením, popř. překlápěním) ztotožnit. Naše cesta k přesné definici shodnosti bude proto následující: nejprve vymezíme druhy manipulací, které můžeme s útvarem provádět bez toho, abychom jej změnili, a následně řekneme, že jsou dva útvary shodné, právě když s nimi provádíme tyto manipulace.

Řečeným manipulacím budeme říkat shodná zobrazení nebo také shodnosti. Pro úplnost dodejme, že všechny naše úvahy o shodnostech se budou týkat bodů a útvarů v rovině, tj. základním prostorem $\mathcal{Z}$ bude v této kapitole myšlena pouze rovina.

Definice. *Geometrické zobrazení* je předpis, který přiřazuje každému bodu $X \in \mathcal{Z}$ bod $X' \in \mathcal{Z}$. Bod X nazýváme *vzor bodu X' v daném zobrazení*, bod X' nazýváme *obraz bodu X v daném zobrazení*.

Poznámka. Obecná zobrazení značíme $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ atd. Zápis $\mathcal{F}\colon X \to X'$ čteme „zobrazení $\mathcal{F}$ zobrazí bod X na bod X'“, což znamená, že X je vzor bodu X', resp. X' je obraz bodu X, v zobrazení $\mathcal{F}$. Obecněji pak zápis

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$$

čteme jako „zobrazení $\mathcal{F}$ zobrazí útvar $\mathcal{U}$ na útvar $\mathcal{U}'$“. Termíny „vzor“ a „obraz“ mají podobný význam jako v případě zobrazení bodů.

Definice. *Shodné zobrazení* je geometrické zobrazení $\mathcal{F}$ takové, že pro každé dva body $X, Y \in \mathcal{Z}$ platí
$$|XY| = |X'Y'|\,,$$
kde X' a Y' jsou obrazy bodů X a Y v zobrazení $\mathcal{F}$.

Nyní můžeme vyslovit definici shodných útvarů.

Definice. Dva útvary $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ jsou *shodné*, jestliže existuje shodné zobrazení, které zobrazí útvar $\mathcal{U}$ na útvar $\mathcal{V}$.

Uveďme příklady. Na 1. stupni ZŠ se žáci více seznamují s osovou a středovou souměrností, méně často (a spíše okrajově) s posunutím a otočením. Všechna tato zobrazení jsou skutečně shodnosti (dokazovat to však nebudeme), a pro svůj význam je zařazujeme do skupiny tzv. *základních shodností.* Pojďme se na tuto skupinu podívat blíže a její jednotlivé zástupce přesně definujme. Uvedené definice přitom v podstatě přímo popisují způsob, jak zkonstruovat obraz libovolného daného bodu v rovině.

Osová souměrnost

Definice. V rovině je dána přímka o. *Osová souměrnost* (nebo také *osová symetrie* či *zrcadlení*) $\mathcal{O}$ daná přímkou o je zobrazení, které zobrazí

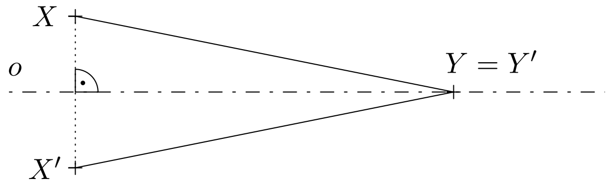
a) libovolný bod $X \in o$ na bod X;

b) libovolný bod $X \notin o$ na takový bod X' různý od X, aby $XX' \perp o$ a střed úsečky XX' ležel na přímce o.

Přímku o nazveme *osou* osové souměrnosti $\mathcal{O}$.

Osovou souměrnost $\mathcal{O}$ zadanou osou o budeme značit $\mathcal{O}(o)$. Obecně budeme za značku shodnosti do závorek psát vždy její zadávající prvky. Bývá zvykem, že se osa značí čerchovanou čarou (viz obrázek 2, kde vidíme také zobrazení úsečky XY).

Úkol. *Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a přímku o tak, aby tato přímka protínala hranici trojúhelníku ve dvou bodech různých od bodů A, B, C. Sestrojte obraz trojúhelníka ABC v osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$. Můžete nejdříve zkusit jednodušší variantu, kdy přímka o nemá s trojúhelníkem žádný společný bod.*



Obrázek 2: Zobrazení $\mathcal{O}(O)\colon XY \to X'Y'$

Středová souměrnost

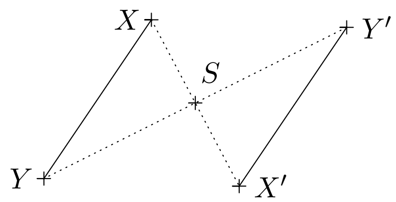
Definice. V rovině je dán bod S. *Středová souměrnost* (nebo také *středová symetrie*) $\mathcal{S}$ daná bodem S je zobrazení, které zobrazí

a) bod S na bod S;

b) libovolný bod $X \neq S$ na takový bod X' různý od X, aby byl bod S středem úsečky XX'.

Bod S nazveme *středem* středové souměrnosti $\mathcal{S}$.

Středovou souměrnost $\mathcal{S}$ zadanou středem S budeme značit $\mathcal{S}(S)$.



Obrázek 3: Zobrazení $\mathcal{S}(S)\colon XY \to X'Y'$

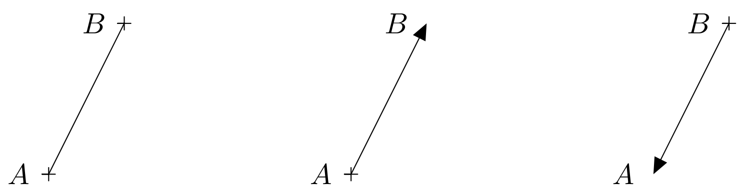
Úkol. *Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a zvolte bod S tak, aby byl vnitřním bodem tohoto trojúhelníku. Sestrojte obraz trojúhelníka ABC ve středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$. Můžete také nejdříve zkusit jednodušší variantu, kdy je bod S vnějším bodem trojúhelníku.*

Posunutí

Abychom mohli nějaký rovinný útvar intuitivně posunout, musíme znát vzdálenost, o kterou útvar posuneme, a také směr, ve kterém útvar posuneme. Obojí lze vystihnout následujícím pojmem.

Definice. *Orientovaná úsečka* je libovolná úsečka, jejíž jeden koncový bod prohlásíme za *počáteční* a druhý za *koncový.*

Zvolíme-li libovolnou úsečku AB, můžeme z ní vytvořit dvě orientované úsečky: prohlášením A za počáteční bod a B za koncový bod vznikne orientovaná úsečka AB (značíme $\overrightarrow{AB}$) a naopak prohlášením B za počáteční bod a A za koncový bod vznikne orientovaná úsečka BA (značíme $\overrightarrow{BA}$).

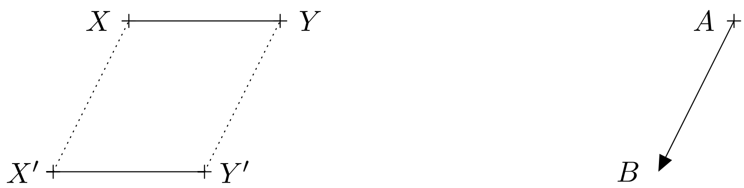


Obrázek 4: Úsečka AB a dvojice odvozených orientovaných úseček

Nyní již máme k dispozici vše, co potřebujeme pro definici posunutí.

Definice. V rovině je dána orientovaná úsečka AB. *Posunutí* (nebo také *translace*) $\mathcal{T}$ dané orientovanou úsečkou AB je zobrazení, které zobrazí bod X na X' takový, že orientované úsečky XX' a AB jsou shodné, tj. mají stejnou velikost a stejný směr.[1]

Posunutí $\mathcal{T}$ dané orientovanou úsečkou AB (je možné říct i „posunutí o orientovanou úsečku AB“) budeme značit $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{AB}\right)$. Zřídka se v učebních textech pro první stupeň můžeme setkat se spojením „posunutí o vektor AB“, kde pojem *vektor* můžeme na ZŠ ztotožnit s orientovanou úsečkou.



Obrázek 5: Zobrazení $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{AB}\right) : XY \to X'Y'$

Úkol. *Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a zvolte orientovanou úsečku XY tak, aby protínala hranici trojúhelníku ve dvou bodech různých od vrcholů trojúhelníku. Sestrojte obraz trojúhelníka ABC v posunutí $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{XY}\right)$.*

[1]Pojem *směr* zde budeme chápat intuitivně, jeho přesné vymezení by bylo příliš technické.

Otočení

Abychom mohli nějaký rovinný útvar intuitivně otočit, musíme znát bod, kolem kterého útvar otočíme, velikost úhlu, o který útvar otočíme, a také směr, ve kterém útvar otočíme. V definici vystihneme první dva parametry, třetí vyřešíme v následující poznámce.

Definice. V rovině je dán bod S a velikost úhlu α. *Otočení* (nebo také *rotace*) $\mathcal{R}$ dané bodem S a velikostí φ je zobrazení, které zobrazí

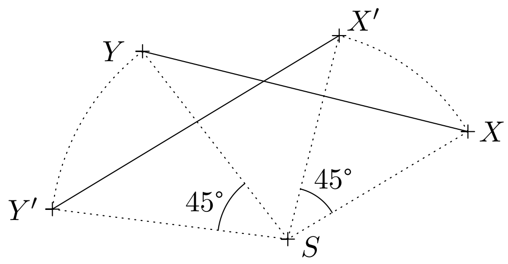
a) bod S na bod S;

b) libovolný bod $X \neq S$ na takový bod X', pro který platí $|XS| = |X'S|$ a $\alpha = |\sphericalangle XSX'|$.

Bod S nazveme *středem* rotace $\mathcal{R}$.

Poznámka. Pokud není úhel AVB nulový, přímý nebo plný, jsou takové rotace vždy dvě různé. Proto opatříme velikost úhlu znaménkem + nebo − podle toho, „na jakou stranu" otáčíme. Běžná dohoda je taková, že kladné znaménko označuje rotaci proti směru hodinových ručiček, zatímco záporné rotaci po směru hodinových ručiček. Velikost úhlu opatřená znaménkem se označuje jako *orientovaná velikost úhlu.*

Rotaci $\mathcal{R}$ danou bodem S a orientovanou velikostí úhlu α (je možné říct i „rotaci kolem bodu S o α") budeme značit $\mathcal{R}(S, \alpha)$.



Obrázek 6: Zobrazení $\mathcal{R}(S, +45°) : XY \to X'Y'$

Úkol. *Narýsujte libovolný trojúhelník ABC a otočte jej kolem jeho těžiště o* $-30°$.

Identita

Definice. *Identita* $\mathcal{I}$ je zobrazení, které zobrazí každý bod roviny sám na sebe.

Intuitivně je identita zobrazení, které s rovinou „nic nedělá". Může se tedy zdát, že je takové zobrazení zbytečné definovat, význam identity však vyjde najevo později u skládání zobrazení.

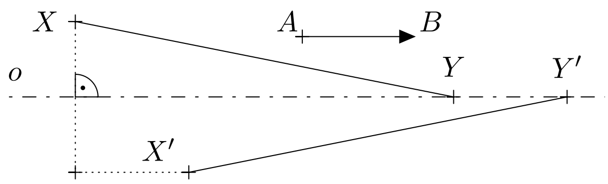
Posunutá souměrnost

Na základní škole se můžeme ještě potkat s následujícím zobrazením, které vzniká tzv. složením osové souměrnosti s posunutím ve směru osy. O složených zobrazeních budeme obecně mluvit později, prakticky to však znamená, že nejprve body či útvary zobrazíme v osové souměrnosti a poté jejich obrazy posuneme ve směru osy.

Definice. V rovině je dána přímka o a orientovaná úsečka AB, kde $\overrightarrow{AB} \parallel o$. *Posunutá souměrnost* $\mathcal{O}_t$ daná přímkou o a $\overrightarrow{AB}$ je zobrazení, které zobrazí každý bod X na takový bod X', který sestrojíme podle následujícího pravidla:

$$\mathcal{O}(o)\colon X \to X_0, \qquad \mathcal{T}\left(\overrightarrow{AB}\right) : X_0 \to X'.$$

Posunutou souměrnost $\mathcal{O}_t$ danou přímkou o a orientovanou úsečkou AB budeme značit $\mathcal{O}_t\left(o, \overrightarrow{AB}\right)$. Přímce o podobně jako u osové souměrnosti budeme říkat *osa*.



Obrázek 7: Zobrazení $\mathcal{O}_t\left(o, \overrightarrow{AB}\right) : XY \to X'Y'$

Některé další vlastnosti shodností

1. Středová souměrnost $\mathcal{S}(S)$ a rotace $\mathcal{R}(S, 180^\circ)$ jsou totožná zobrazení. Je proto užitečné vnímat středovou souměrnost jen jako speciální případ rotace.

2. Obdobně se dá říci, že je identita totožná s libovolnou rotací o 0° nebo 360°.

3. Důležitým prvkem geometrických zobrazení jsou tzv. *samodružné body*, což jsou body, které se v konkrétním zobrazení zobrazí samy na sebe. Můžeme obdobně mluvit také o *samodružných útvarech*, kde rozlišujeme *silnou samodružnost* (každý bod útvaru je samodružný) a *slabou samodružnost* (každý bod útvaru se zobrazí na bod, který také leží v útvaru).