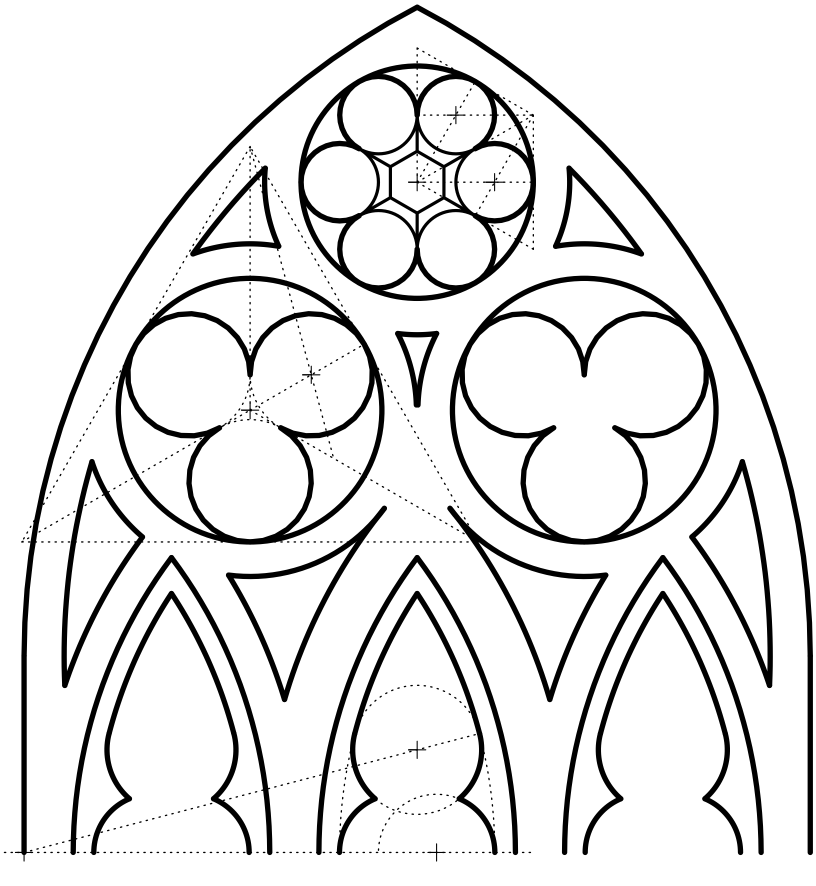
Sbírka úloh z ELEMENTÁRNÍ GEOMETRIE pro studium učitelství 1. stupně základní školy

Leni Lvovská Jakub Novák



Obsah

Přehled užitých symbolů

pojem	**symbol**
základní množina, prostor	$\mathcal{Z}$
body	$A, B, C, \ldots$
přímky	$a, b, c, \ldots$
roviny	$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$
úsečka AB	AB
orientovaná úsečka AB	$\overrightarrow{AB}$
polopřímka AB	$\mapsto AB$
opačná polopřímka k polopřímce AB	$\leftarrow\!\!\!\shortmid AB$
přímka AB	$\leftrightarrow AB$
polorovina ABC, resp. pM	$\mapsto ABC$, $\mapsto pM$
opačná polorovina k polorovině ABC, resp. pM	$\leftarrow\!\!\!\shortmid ABC$, $\leftarrow\!\!\!\shortmid pM$
rovina ABC	$\leftrightarrow ABC$
bod A leží v útvaru $\mathcal{U}$	$A \in \mathcal{U}$
přímka a leží v rovině α	$a \subset \alpha$
útvary $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$	
nemají žádný společný bod	$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$
mají společný jediný bod X	$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{X\}$, $X \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$
mají společný vícebodový útvar $\mathcal{V}$	$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \mathcal{V}$
útvary $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$ jsou shodné	$\mathcal{U}_1 \cong \mathcal{U}_2$
velikost úsečky AB	$\lvert AB \rvert$
střed úsečky AB	S_{AB}
osa úsečky AB	o_{AB}
grafický součet úseček AB a CD	$AB + CD$
grafický rozdíl úseček AB a CD	$AB - CD$
k-násobek úsečky AB	$k \cdot AB$
bod B leží mezi body A a C	$B \mu AC$
trojúhelník ABC	$\triangle ABC$
kružnice k se středem v bodě S a poloměrem r	$k(S, r)$
konvexní úhel AVC	$\sphericalangle AVC$
nekonvexní úhel AVC	$\circledless AVC$
grafický součet úhlů AVB a CWD	$\sphericalangle AVB + \sphericalangle CWD$
grafický rozdíl úhlů AVB a CWD	$\sphericalangle AVB - \sphericalangle CWD$
k-násobek úhlu AVB	$k \cdot \sphericalangle AVB$
velikost (ne)konvexního úhlu AVB	$\lvert \sphericalangle AVB \rvert$, $\lvert \circledless AVB \rvert$
vzdálenost dvou útvarů $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$	$d(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$
přímky p a q jsou rovnoběžné	$p \parallel q$
přímky p a q jsou kolmé	$p \perp q$
osová souměrnost daná osou o	$\mathcal{O}(o)$
středová souměrnost daná středem S	$\mathcal{S}(S)$
otočení kolem bodu M o orientovaný úhel velikosti α	$\mathcal{R}(M, \alpha)$
posunutí o orientovanou úsečku AB	$\mathcal{T}\left(\overrightarrow{AB}\right)$
zobrazení $\mathcal{F}$ zobrazí útvar $\mathcal{U}$ na $\mathcal{U}'$	$\mathcal{F} \colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$
složené zobrazení „$\mathcal{F}$ po $\mathcal{G}$“	$\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$

Je užitečné mít na paměti, že geometrie je uměním správného vyvozování ze špatně nakreslených obrázků.

Henri Poincaré (1854–1912), úvod k článku *Analysis situs*

Úvod

Tato sbírka slouží jako zdroj úloh k procvičení látky probírané v základním dvousemestrálním kurzu geometrie pro Učitelství 1. stupně ZŠ na Pedagogické fakultě Masarykovy univerzity. Potřebná teorie je z větší části vyložena ve skriptech [1] (resp. jejich starší verzi [2]). K uvedeným skriptům byla vydána sbírka [3], kterou tato publikace aktualizuje a rozšiřuje. Doplněny byly úlohy v kapitolách 5, 7, 8 a 9 a také úlohy spojující látku se světem kolem nás. Při výběru doplňujících úloh jsme se inspirovali zejména sbírkami [4] a [5], resp. úlohami ve středoškolských učebnicích matematiky z nakladatelství Prometheus [6] a [7], kde lze také dostudovat teorii chybějící v již zmiňovaných skriptech [1].

V některých úlohách se pracuje s magnetickou stavebnicí Geomag. V případě, že ji nemáte, lze tyto úlohy demonstrovat např. pomocí špejlí a kuliček modelíny.

Sbírka obsahuje také řešení většiny úloh, které může pomoci při domácím samostudiu. Chybí pouze řešení úloh otevřených, úloh typu „udejte příklad“ a také některých jednoduchých konstrukcí. Řešení úloh v historické první kapitole lze porovnat s informacemi ve specializovaných publikacích, např. [8]. U konstrukčních úloh šesté a osmé kapitoly je uveden pouze stručný návod k provedení konstrukce nebo klíčová myšlenka; podrobný rozbor, konstrukce a její popis je ponechán na čtenáři.

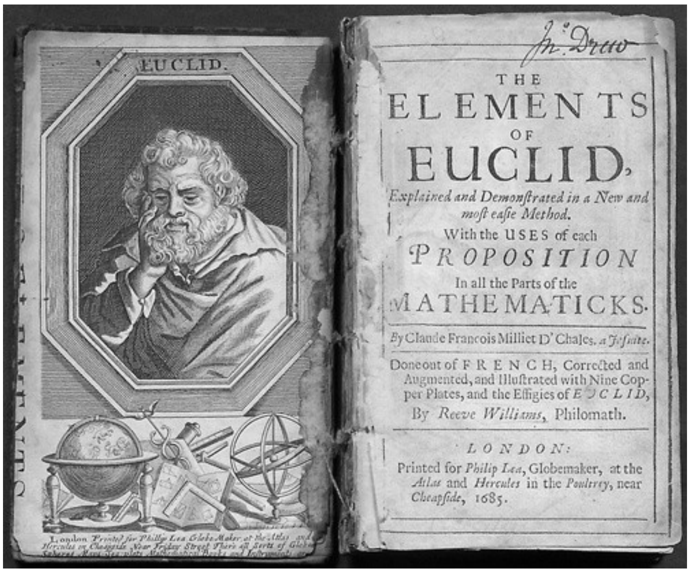
Věříme, že úlohy v této publikaci poslouží svému účelu a pomohou provést své řešitele netriviálním, ale krásným světem elementární geometrie.

Autoři

1 Historický vývoj a axiomatická stavba geometrie

Cvičení 1.1. Jakým způsobem se geometrie v dávné minulosti začínala vytvářet? (Formulujte odpověď v několika větách.)

Cvičení 1.2. Proč je spis, který nese jméno *Základy (Elementa)* a jehož autorství se připisuje Eukleidovi, z hlediska geometrie a matematiky tak významný?



Obrázek 1: Úvodní strana Eukleidových *Základů* ze 17. století

Cvičení 1.3. Jakou úlohu sehrál tzv. pátý Eukleidův postulát v historii matematiky? (Formulujte odpověď v několika větách.)

Cvičení 1.4. Čím se zabývá tzv. syntetická nebo též elementární geometrie? Jmenujte alespoň další dva podobory geometrie a stručně uveďte, čím se zabývají.

Cvičení 1.5. Přiřaďte ke jménům významných matematiků správně jejich charakteristiku spjatou s geometrií:

1. René Descartes (1596–1650),
2. Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855),
3. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866),
4. David Hilbert (1862–1943).

a) Německý matematik a fyzik. Zabýval se zejména geometrií, matematickou analýzou, teorií čísel, astronomií, elektrostatikou, geodézií a optikou. Silně ovlivnil většinu z těchto oborů vědění. Stál také u zrodu neeukleidovské geometrie.

b) Jeho spis *La Géométrie* bývá často považován za počátek analytické geometrie jako vědy.

c) Německý matematik, který ve svém díle *Základy geometrie* vybudoval disciplínu v současnosti nazývanou eukleidovská geometrie, vytvořil tzv. Systém axiomů eukleidovské geometrie.

d) Německý matematik, který zásadním způsobem přispěl k rozvoji matematické analýzy a diferenciální geometrie. Na jeho myšlenkách byla dále rozvinuta také algebraická geometrie či teorie komplexních ploch, které se staly základem diferenciální geometrie na varietách a topologie.

Cvičení 1.6. Vysvětlete, co je to axiomatický pojem (někdy také primitivní pojem) a uveďte příklad takového pojmu v syntetické geometrii.

Cvičení 1.7. Vysvětlete rozdíl mezi axiomem a matematickou větou. Uveďte příklad axiomu a matematické věty.

Cvičení 1.8. Zapište symbolicky následující tvrzení:

a) Každá rovina inciduje aspoň s jedním bodem.
b) Každá přímka inciduje alespoň se dvěma různými body.
c) Každé dva navzájem různé body incidují s jedinou přímkou.
d) Existuje aspoň jedna čtveřice bodů, která neinciduje s žádnou rovinou.

Cvičení 1.9. Zařaďte axiomy do správné kategorie dle Hilbertova systému: incidence (I), uspořádání (U), rovnoběžnosti (R), spojitosti (S), shodnosti (Sh).

a) Je-li dána přímka a bod, který na této přímce neleží, existuje v rovině určené touto dvojicí jediná přímka, která prochází zadaným bodem a nemá se zadanou přímkou žádný společný bod.
b) Ze tří různých bodů na přímce leží nejvýše jeden mezi zbývajícími dvěma.
c) Každými dvěma různými body prochází jediná přímka.
d) Jestliže pro libovolné tři úsečky AB, CD a EF platí, že $AB \cong CD$ a $CD \cong EF$, pak i $AB \cong EF$.
e) Na každé přímce leží alespoň dva různé body.

2 Polohové vlastnosti bodů, přímek a rovin

Cvičení 2.1. Vyšetřete všechny možné vzájemné polohy tří různých přímek ležících v jedné rovině. Polohy znázorněte náčrtkem a symbolicky je popište.

Cvičení 2.2. Které geometrické útvary mohou vzniknout jako průnik dvou polopřímek, které jsou částí téže přímky? Znázorněte náčrtkem a popište.

Cvičení 2.3. Narýsujte úsečku AB. Na přímce AB vyznačte bod C tak, aby bod A ležel mezi body C a B, dále bod D tak, aby B ležel mezi A a D, a bod P, který neleží na úsečce AB, ale leží na polopřímce AD.

Cvičení 2.4. Narýsujte úsečku KL. Zvolte bod D mezi body KL, vyznačte bod R tak, aby bod K ležel mezi body R a L, bod S tak, aby L ležel mezi K a S, a bod T tak, aby bod S ležel mezi body L, T. Nyní rozhodněte, který z výroků je pravdivý:

a) $S \in \mapsto KL$ b) $\mapsto RS \cap \mapsto KL = KL$
c) $\mapsto RD \cap ST = \emptyset$ d) $R \in \leftrightarrow KL$

Cvičení 2.5. Je dána přímka p a bod A, který na ní neleží. Zakreslete bod M, který náleží polorovině pA, bod P, který leží současně v obou polorovinách určených přímkou p, a bod N, který leží v opačné polorovině k polorovině pA.

Cvičení 2.6. Jsou dány tři různé body A, B, C.

a) Kolik úseček, polopřímek a přímek je určeno těmito body? Jak závisí tyto počty na poloze daných bodů?

b) Které geometrické útvary mohou být průnikem dvou z těchto úseček (polopřímek, přímek)?

Znázorněte a proveďte diskuzi.

Cvičení 2.7. Nechť bod R leží mezi body P, Q. Vyberte z polopřímek PR, PQ, RP, RQ, QR, QP dvojice, které:

a) splývají, b) jsou opačné,
c) jedna je částí druhé, d) jejich průnikem je úsečka.

Cvičení 2.8. Určete, které útvary mohou vzniknout průnikem:

a) úsečky a poloroviny, b) polopřímky a poloroviny,
c) přímky a poloroviny, d) dvou polorovin.

Předpokládejte, že všechny útvary leží v jediné rovině. Všechny případy znázorněte obrázkem a popište.

Cvičení 2.9. Kolik různých přímek je určeno n body, které leží v jedné rovině a žádné tři neleží na jedné přímce?

Cvičení 2.10. V rovině je dáno n přímek, z nichž každé dvě se protínají a žádné tři neprocházejí týmž bodem. Kolik existuje průsečíků?

Cvičení 2.11. Uvnitř jedné poloroviny určené přímkou p zvolte body A, B a uvnitř poloroviny opačné zvolte body C, D tak, aby přímky AB a CD byly s přímkou p různoběžné. Na přímce AB zvolte bod M, na přímce CD zvolte bod N. Jak je nutno zvolit body M, N, aby úsečka MN obsahovala bod přímky p?

Cvičení 2.12. Sestrojte libovolné tři úsečky AB, CD a EF tak, aby platilo $|AB| > |CD| > |EF|$, a dále sestrojte libovolnou přímku p, která neprochází žádným z šesti zmíněných bodů. Přenášením úseček sestrojte na přímce p úsečku $KL = CD + EF$, úsečku $MN = AB - CD$ a úsečku $OP = 3 \cdot EF$.

Najděte způsob, jak přenést úsečky bez použití kružítka (např. pro druháky nebo třeťáky).

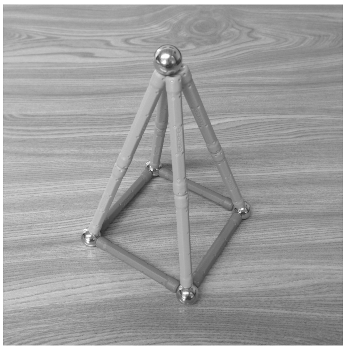
Cvičení 2.13. Sestrojte model kvádru $ABCDEFGH$ (pomocí stavebnice GeoMag nebo pomocí špejlí a plastelíny, viz obrázek 2).

Obrázek 2: Model kvádru postavený ze stavebnice Geomag

a) Určete všechny přímky incidentní s hranami kvádru, které jsou s přímkou BC
   i. rovnoběžné, ii. různoběžné, iii. mimoběžné.

b) Uveďte příklad trojice rovin, která tvoří svazek rovin, a zapište symbolicky průnik těchto tří rovin.

Cvičení 2.14. Sestrojte model pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ (pomocí stavebnice GeoMag nebo pomocí špejlí a plastelíny, viz obrázek 3).



Obrázek 3: Model jehlanu postavený ze stavebnice Geomag

a) Určete všechny přímky určené body A, B, C, D, V, které jsou s přímkou BC
   i. rovnoběžné, ii. různoběžné, iii. mimoběžné.

b) Uveďte příklad trojice rovin, která tvoří trs rovin, a zapište průnik těchto tří rovin.

3 Konvexní a nekonvexní množiny, úhel

Cvičení 3.1. Jak poznáme, kdy je geometrický útvar konvexní a kdy nekonvexní? Roztřiďte geometrické útvary na konvexní a nekonvexní: úsečka, přímka, polorovina, kružnice, trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, kruh s otvorem, krychle.

Cvičení 3.2. Narýsujte libovolné (nikoliv navzájem opačné) různé polopřímky SC a SD. Jednou barvou vyznačte konvexní úhel CSD a druhou nekonvexní úhel CSD. Vyznačte bod $E \in \sphericalangle CSD$ a bod $F \in \measuredangle CSD$. Dokážete vyznačit bod H, který je bodem úhlu $\sphericalangle CSD$ i úhlu $\measuredangle CSD$?

Cvičení 3.3. Narýsujte $\sphericalangle ADB$ a vyznačte uvnitř něj bod H. Narýsujte ještě polopřímku DH. Zapište všechny takto vyznačené konvexní úhly.

Cvičení 3.4. Narýsujte tři polopřímky se společným počátkem S. Na každé z polopřímek vyznačte jeden z bodů A, B, C. Obloučky vyznačte všechny takto narýsované úhly a zapište je.

Cvičení 3.5. Úhloměrem narýsujte úhel ABC o velikosti 40° a úhel DEF o velikosti 160°. Sestrojte úhel $\sphericalangle ABC + \sphericalangle DEF$, úhel $5 \cdot \sphericalangle ABC$ a úhel $\sphericalangle DEF - \sphericalangle ABC$.

Cvičení 3.6. S úhloměrem narýsujte úhel ABC o velikosti 210° a dále sestrojte libovolné body X, Y, Z takové, že neleží v jedné přímce. Přeneste úhel ABC k polopřímce XY tak, aby obě jeho ramena ležela v polorovině XYZ.

Cvičení 3.7. Načrtněte dva konvexní rovinné útvary takové, že jejich

a) sjednocení je množina konvexní,
b) sjednocení je množina nekonvexní,
c) průnik je množina konvexní,
d) průnik je množina nekonvexní.

Cvičení 3.8. Načrtněte dva nekonvexní rovinné útvary takové, že jejich

a) sjednocení je množina konvexní,
b) sjednocení je množina nekonvexní,
c) průnik je množina konvexní,
d) průnik je množina nekonvexní.

Cvičení 3.9. Načrtněte a rozhodněte, zda se jedná o konvexní bodovou množinu:

a) trojúhelník ABC bez svých vrcholů,
b) trojúhelník KLM bez jednoho vnitřního bodu jedné své strany,
c) sjednocení vnitřku libovolného trojúhelníka a dvou různých bodů jeho obvodu,
d) rozdíl konvexního úhlu AVB a jeho ramene VA,
e) rozdíl čtverce $ABCD$ a sjednocení dvou jeho stran,
f) sjednocení vnitřku čtverce $ABCD$ a dvou jeho stran,
g) kružnice,
h) kruh.

Cvičení 3.10. Vyšetřete, které geometrické útvary mohou vzniknout jako průnik dvojice konvexních úhlů (nikoliv úhly plné nebo nulové). Všechny případy znázorněte a popište.

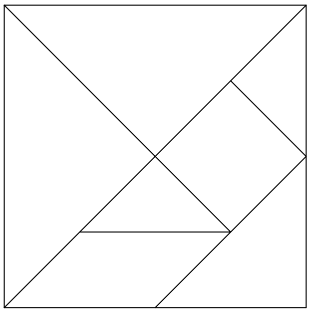
Cvičení 3.11. Zvolte různoběžné přímky p, q, jejich průsečík označte V. Na přímce p zvolte bod P, na přímce q, bod Q. Každý ze čtyř konvexních úhlů určených různoběžkami p, q definujte pomocí průniků polorovin pQ, qP nebo polorovin k nim opačných. Zapište symbolickým zápisem.

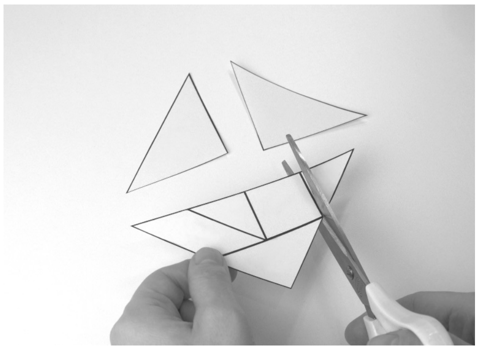
Cvičení 3.12. Načrtněte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S a v náčrtku vyznačte dvojice úhlů:

a) styčných (nikoliv vedlejších),
b) vedlejších,
c) vrcholových,
d) souhlasných,
e) střídavých,
f) přilehlých.

4 Trojúhelník, čtyřúhelník, mnohoúhelník, kružnice

Cvičení 4.1. Tangram je nejstarší známý hlavolam na světě, pochází ze staré Číny. Je to čtverec rozdělený promyšleným způsobem na sedm částí, z nichž lze sestavovat různé geometrické obrazce, předměty, zvířata a lidské postavy. Vyrobte si svůj tangram ze čtverce tvrdého papíru podle přiložených obrázků:





Poté složte s využitím všech sedmi částí:

a) trojúhelník, b) rovnoběžník, c) lichoběžník.

Čínští matematici, kteří se ve 20. století tangramem zabývali, zjistili, že ze sedmi částí tangramu lze sestavit právě třináct konvexních mnohoúhelníků (viz článek [9]), a to 1 trojúhelník, 6 čtyřúhelníků, 2 pětiúhelníky a 4 šestiúhelníky. Pokud jste zvládli sestavit geometrické útvary a) – c), můžete to zkusit se zbylými deseti.

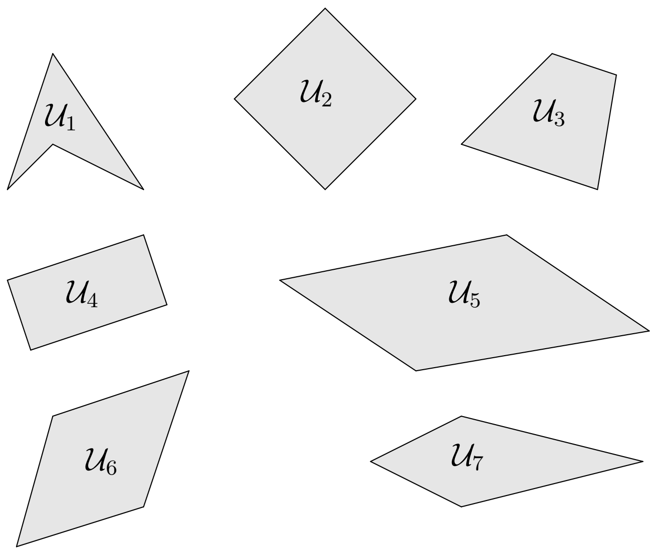
Cvičení 4.2. Vyšetřete všechny geometrické útvary, které mohou vzniknout průnikem dvou trojúhelníků. Znázorněte je a popište.

Cvičení 4.3. Vymodelujte ze stavebnice Geomag a poté narýsujte:

a) rovnostranný trojúhelník,
b) rovnoramenný trojúhelník,
c) čtverec,
d) pravidelný pětiúhelník,
e) pravidelný šestiúhelník.

Cvičení 4.4. Na obrázku 4 je sedm různých čtyřúhelníků. Přiřaďte je k jejich názvům a poté k nim doplňte jejich vlastnosti (některé vlastnosti mohou patřit i k více než jednomu čtyřúhelníku):
čtverec, obdélník, kosočtverec, (obecný) rovnoběžník, nekonvexní čtyřúhelník, deltoid, lichoběžník.

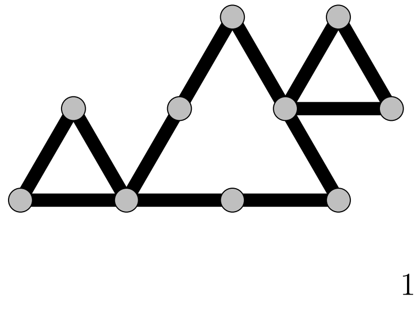
a) Protější strany jsou vždy shodné.
b) Minimálně dva vnitřní úhly jsou vždy pravé.
c) Úhlopříčky se půlí.
d) Úhlopříčky jsou shodné.
e) Lze mu opsat kružnici.
f) Lze mu vepsat kružnici.
g) Právě jedna dvojice stran jsou rovnoběžné úsečky.



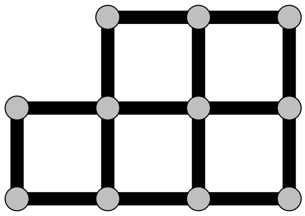
Obrázek 4: Čtyřúhelníky k úloze 4.4

Cvičení 4.5. Vymodelujte ze stavebnice Geomag následující zadání, a poté procvičte svoji představivost v rovině jejich řešením:

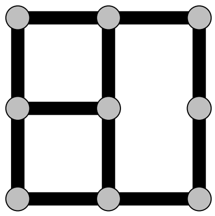
a) Přesuňte 3 shodné úsečky (tyčinky) tak, abyste vytvořili 2 velké a jeden malý trojúhelník.



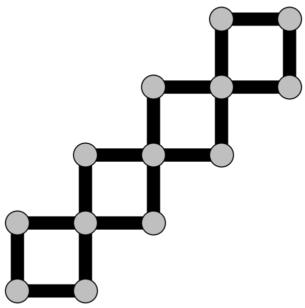
b) Odstraňte 3 shodné úsečky (tyčinky) tak, abyste vytvořili 3 čtverce.



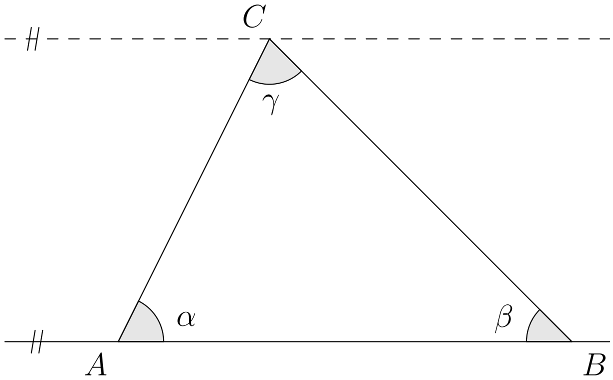
c) Odeberte jednu úsečku (tyčinku) tak, abyste získali 2 čtverce.



d) Přesuňte 4 shodné úsečky (tyčinky) tak, abyste vytvořili opět čtyři čtverce, ale takové, které nejsou všechny stejně velké.



Cvičení 4.6. Z obrázku ukažte, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku ABC je přímý úhel. Platí tvrzení pro libovolný trojúhelník? Proč?



Cvičení 4.7. Dokažte větu o těžnicích trojúhelníku:
Těžnice libovolného trojúhelníku se protínají v jednom bodě, zvaném těžiště trojúhelníku. Těžiště dělí každou těžnici na dvě úsečky, z nichž ta, která obsahuje vrchol trojúhelníka, je dvojnásobkem druhé.

Cvičení 4.8. Je-li v rovnoramenném trojúhelníku ABC úhel při základně AB roven trojnásobku úhlu při vrcholu C a rozdělí-li se úhel $\sphericalangle BAC$ při základně na tři shodné úhly (tak, že M, N jsou takové body strany BC, pro něž platí $\sphericalangle NAB \cong \sphericalangle MAN \cong \sphericalangle CAM$), pak platí $AB \cong AN \cong BM$, $AM \cong CM$. Dokažte.

Cvičení 4.9. Přímka p protíná kružnici $k(S, r)$ v bodech C a D. Zvolme bod $A \in p$ tak, že A leží vně kružnice k a platí $AC < AD$ a $|AC| = r$. Dokažte, že

$$\sphericalangle ASC = \frac{1}{3} \sphericalangle BSD,$$

kde bod B je průsečík přímky AS s kružnicí k takový, že S leží mezi body A, B.

Cvičení 4.10. Uvnitř trojúhelníku ABC zvolte bod S. Dokažte, že součet úseček SA, SB, SC je větší než poloviční součet stran daného trojúhelníku, tj. že

$$SA + SB + SC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA).$$

Cvičení 4.11. Splývá-li těžnice trojúhelníka s jeho výškou, je tento trojúhelník rovnoramenný. Dokažte.

Cvičení 4.12. Přímka o je osou úsečky AB. Bod X je libovolný vnitřní bod poloroviny oA. Dokažte, že platí $AX < BX$.

Cvičení 4.13. Bod U je vnitřním bodem trojúhelníku ABC. Dokažte, že platí: $|\sphericalangle AUB| > |\sphericalangle ACB|$, $|\sphericalangle BUC| > |\sphericalangle BAC|$ a $|\sphericalangle AUC| > |\sphericalangle ABC|$.

Cvičení 4.14. Určete velikost vnitřních úhlů trojúhelníka $A_1B_1C_1$, jehož vrcholy jsou průsečíky os vnějších úhlů daného trojúhelníka ABC.

Cvičení 4.15. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC a bod D, který je středem jeho základny AB. Bodem D jsou vedeny kolmice k ramenům AC, BC trojúhelníka ABC. Jejich paty jsou označeny M, N. Dokažte, že $\triangle DMC \cong \triangle DNC$.

Cvičení 4.16. Dokažte, že dva trojúhelníky jsou shodné, když se shodují ve dvou stranách a v těžnici k jedné z nich.

Cvičení 4.17. Nad stranami ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou vně sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ABH a ACK. Dokažte shodnost úseček CH a BK.

Cvičení 4.18. Je dán trojúhelník ABC. Jeho vrcholy jsou vedeny rovnoběžky s protilehlými stranami. Dokažte, že průsečíky těchto přímek určí trojúhelník, který je sjednocením čtyř trojúhelníků shodných s trojúhelníkem ABC.

Cvičení 4.19. Největší strana konvexního čtyřúhelníka $ABCD$ je AB, nejmenší CD. Dokažte, že $|\sphericalangle ABC| < |\sphericalangle ADC|$.

Cvičení 4.20. Na úhlopříčce AC čtverce $ABCD$ je dán bod E tak, že $AE \cong$ $\cong AB$. Kolmice na přímku AC vedená bodem E protíná stranu BC v bodě F. Dokažte, že $BF \cong EF \cong EC$.

Cvičení 4.21. Čtyřúhelník, jemuž lze opsat i vepsat kružnici, tj. čtyřúhelník, který je současně tětivový i tečnový, nazýváme *dvojstředový*. Dovedete určit alespoň jeden dvojstředový čtyřúhelník, který není čtvercem?

Cvičení 4.22. Určete hranici, vnitřek a vnějšek kruhu, kružnice, poloroviny, roviny

a) vzhledem k rovině, ve které leží;
b) vzhledem k prostoru, ve kterém leží.

Cvičení 4.23. Je přímka p uzavřeným, nebo otevřeným útvarem vzhledem k rovině, ve které leží?

5 Vzdálenosti, měření velikosti úhlů, obsahy

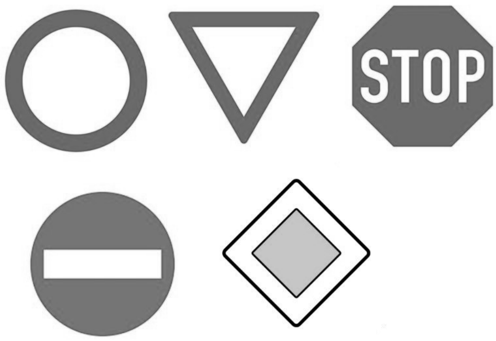
Cvičení 5.1. Bez náčrtku nebo rýsování určete průnik dvou zadaných objektů.

a) kružnice $k(S, 6\,\text{cm})$ a přímka p, kde $d(S, p) = 4\,\text{cm}$,
b) dvě kružnice $k(S, 2\,\text{cm})$ a $l(Q, 4\,\text{cm})$, kde $|QS| = 6\,\text{cm}$,
c) obdélník $ABCD$ a přímka SC, kde S je střed obdélníku,
d) dvě kružnice $k(S, 1\,\text{cm})$ a $l(Q, 5\,\text{cm})$, kde $|QS| = 3\,\text{cm}$,
e) dvě kružnice $k(S, 4\,\text{cm})$ a $l(Q, 3\,\text{cm})$, kde $Q \in k$.

Cvičení 5.2. Sestrojte čtverec, je-li dána jeho úhlopříčka AC. Vyberte tvrzení, která jsou nepravdivá:

a) Ve čtverci jsou všechny vnitřní úhly shodné.
b) Ve čtverci je právě jeden úhel pravý.
c) Dvě strany ve čtverci musí být vodorovné.
d) Ve čtverci musí být sousední strany na sebe kolmé.
e) Úhel mezi úhlopříčkou a přilehlou stranou čtverce má velikost 45°.
f) Úhlopříčky ve čtverci svírají úhel velikosti 60°.

Cvičení 5.3. Na obrázku je několik dobře známých dopravních značek. Zodpovězte následující otázky:



a) Které rovinné útvary můžeme ve značkách vidět? Zopakujte si konstrukce těchto útvarů.
b) Sestrojte pomocí pravítka a kružítka středy obou kružnic na první značce. Jaký je mezi těmito dvěma kružnicemi vztah?
c) Určete obsah trojúhelníka, který tvoří druhou značku, jestliže jeho strana má délku 900 mm.
d) První značka má průměr 700 mm. Strana trojúhelníka na druhé značce má délku 900 mm. Na kterou z těchto značek potřebujeme více plechu za předpokladu, že obě značky mají stejnou tloušťku?

Cvičení 5.4. Do kružnice k se středem S je vepsán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Určete velikost vnitřních úhlů v trojúhelníku ABS. Této informace využijte a narýsujte s využitím úhloměru pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, pro který platí $|AB| = 3\,\mathrm{cm}$.

Cvičení 5.5. V trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle BAC| = 50°$, $|\sphericalangle ABC| = 60°$, osa $\sphericalangle ABC$ protíná stranu AC v bodě D. Seřaďte úsečky AB, BC, CD, AD, AC, BD podle velikosti.

Cvičení 5.6. Převeďte na stupně, minuty a vteřiny velikosti úhlů:
a) 28,5° b) 30,25° c) 58,625° d) 15,135°

Cvičení 5.7. Převeďte stupňovou míru na obloukovou:
a) 90° b) 360° c) 45° d) 135° e) 60° f) 1°

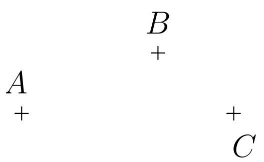
Cvičení 5.8. Převeďte obloukovou míru na stupňovou:
a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{3\pi}{2}$ rad c) $\frac{5\pi}{6}$ rad d) $\frac{5\pi}{3}$ rad e) $\frac{11\pi}{6}$ rad f) 1 rad

Cvičení 5.9. Kolik úhlů o velikostech 1 rad se vejde do plného úhlu?

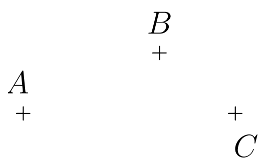
Cvičení 5.10. Je dán kruh o poloměru 10 cm. Kolik centimetrů měří oblouk, kterému přísluší středový úhel velikosti 2°? A kolik centimetrů měří oblouk, kterému přísluší středový úhel velikosti 2 rad?

Cvičení 5.11. Znázorněte úsečkou vzdálenost útvarů:

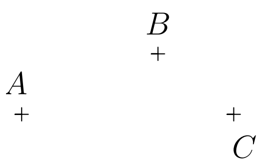
a) úsečka AB a bod C



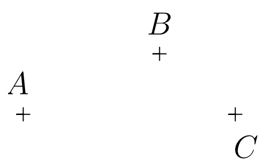
b) přímka AB a bod C



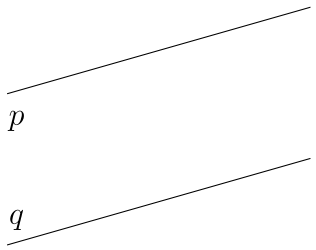
c) polopřímka AB a bod C



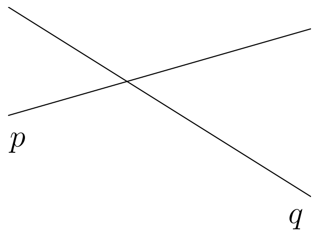
d) polopřímka BA a bod C



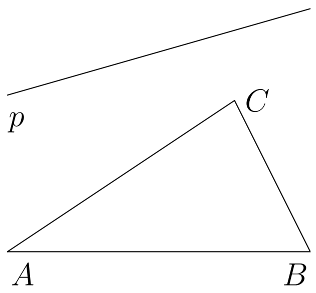
e) rovnoběžné přímky p a q



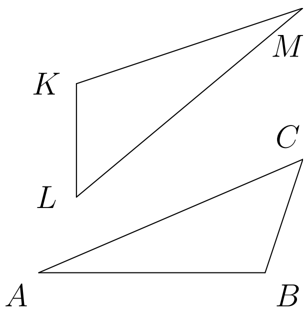
f) různoběžné přímky p a q



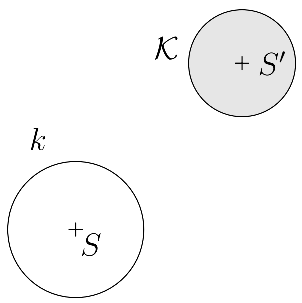
g) přímka p a trojúhelník ABC



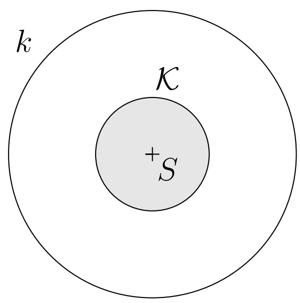
h) trojúhelníky ABC a KLM



i) kružnice $k(S, r)$ a kruh $\mathcal{K}(S', r')$



j) kružnice $k(S, r)$ a kruh $\mathcal{K}(S, r')$



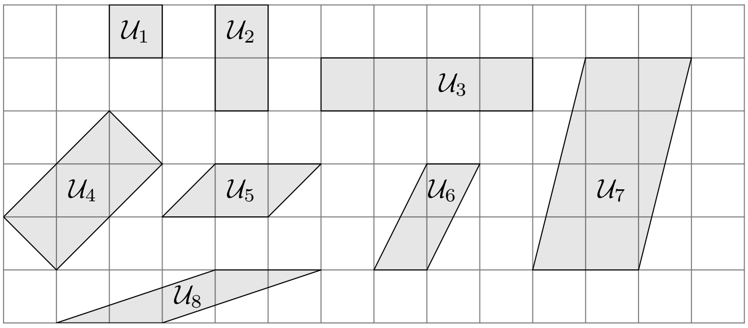
Cvičení 5.12. Leží-li bod X na ose daného konvexního úhlu AVB, pak má od jeho ramen stejné vzdálenosti. Dokažte.

Cvičení 5.13. Délky základen lichoběžníka jsou rovny 5 cm a 7 cm, jeho obsah je roven 36 cm^2. Rozdělme lichoběžník jednou z úhlopříček na 2 trojúhelníky. Určete obsahy těchto trojúhelníků. Jak se změní výsledek, jestliže rozdělíme lichoběžník druhou z úhlopříček?

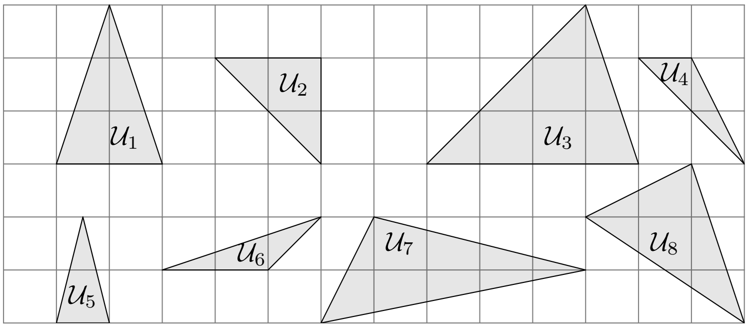
Cvičení 5.14. V lichoběžníku $ABCD$ se základnou AB určete velikosti všech jeho vnitřních úhlů, platí-li $|\sphericalangle DAB| = 38°$ a $|\sphericalangle BCD| = 5 \cdot |\sphericalangle ABC|$.

Cvičení 5.15. Určete přibližnou délku rovníku naší domovské planety, předpokládáme-li, že je Země koulí o poloměru 6 378 km.

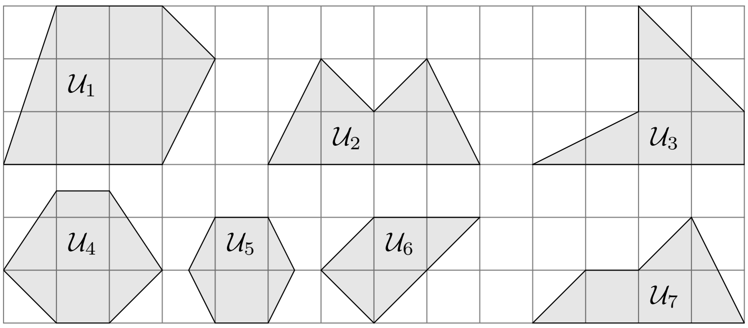
Cvičení 5.16. Určete obsahy čtyřúhelníků ve čtvercové síti o rozměru 1 j.



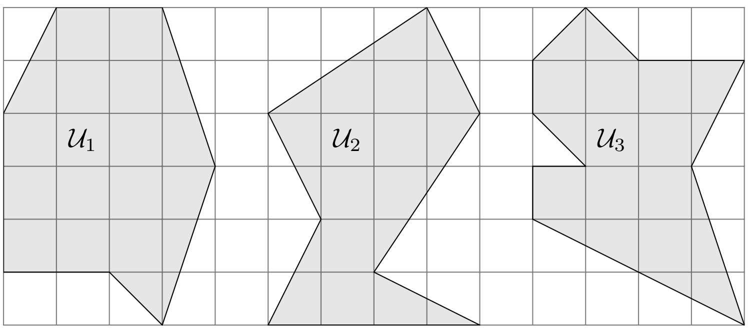
Cvičení 5.17. Určete obsahy trojúhelníků ve čtvercové síti o rozměru 1 j.



Cvičení 5.18. Určete obsahy mnohoúhelníků ve čtvercové síti o rozměru 1 j.



Cvičení 5.19. Určete obsahy mnohoúhelníků ve čtvercové síti o rozměru 1 j.



6 Konstrukce rovinných útvarů

Cvičení 6.1. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S, r_1)$, $k_2(S, r_2)$. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají kružnic k_1, k_2.

Cvičení 6.2. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které

a) mají daný poloměr r a procházejí dvěma různými body A,B;
b) mají daný poloměr r a dotýkají se dané přímky p;
c) se dotýkají dvou daných rovnoběžek a, b;
d) se dotýkají dvou daných různoběžek a, b;
e) se dotýkají dané přímky p v daném bodě A;
f) se dotýkají dané kružnice k v daném bodě A;
g) mají daný poloměr r a mají s danou kružnicí $k(S, r_1)$ vnější dotyk.

Modelujte tyto úlohy v programu GeoGebra.

Cvičení 6.3. Je dána kružnice $k(S, r)$ a na ní bod A. Vyšetřete množinu středů všech tětiv kružnice k, které procházejí bodem A. Modelujte úlohu v programu GeoGebra.

Cvičení 6.4. Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod N, který náleží vnější oblasti této kružnice. Vyšetřete množinu středů všech tětiv kružnice k, které leží na sečnách procházejících bodem N.
Modelujte úlohu v programu GeoGebra.

Cvičení 6.5. Sestrojte pravidelný

a) osmiúhelník,
b) dvanáctiúhelník,
c) šestnáctiúhelník.

Modelujte úlohu v programu GeoGebra.

Cvičení 6.6. Je dána kružnice k bez vyznačeného středu. Tento střed sestrojte.

Cvičení 6.7. Je dána úsečka AB. Sestrojte úsečku KL, pro kterou platí $|KL| = \frac{2}{5} \cdot |AB|$.

Cvičení 6.8. Je dána úsečka AB.

a) Sestrojte množinu všech vrcholů V konvexního úhlu AVB, pro který platí $|\sphericalangle AVB| = 40°$ (tzv. *ekvigonálu úsečky* AB).

b) Sestrojte množinu všech vrcholů V konvexního úhlu AVB, pro který platí $|\sphericalangle AVB| = 160°$.

c) Sestrojte $\triangle ABC$, je-li $|AB| = 6\,\text{cm}$, $\gamma = 60°$, $v_c = 4\,\text{cm}$.

Úmluva: V konstrukčních úlohách s trojúhelníkem ABC označujeme prvky trojúhelníka standardním způsobem, např. a označuje stranu proti vrcholu A, α je vnitřní úhel při vrcholu A, v_a je výška na stranu a, t_a je těžnice procházející středem strany a. Poloměr kružnice opsané trojúhelníku označujeme r_o, poloměr kružnice vepsané r_v.

Cvičení 6.9. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány tři nezávislé údaje:

a) $c = 6{,}5\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$, $t_c = 4\,\mathrm{cm}$
b) $\alpha = 120°$, $c = 7\,\mathrm{cm}$, $t_c = 6\,\mathrm{cm}$
c) $a = 7\,\mathrm{cm}$, $v_a = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$
d) $a = 7\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 80°$, $v_b = 5{,}5\,\mathrm{cm}$
e) $b = 6\,\mathrm{cm}$, $v_a = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $c = 5{,}5\,\mathrm{cm}$
f) $r_v = 2\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 70°$, $v_b = 7\,\mathrm{cm}$
g) $b = 8\,\mathrm{cm}$, $\gamma = 40°$, $v_c = 4\,\mathrm{cm}$
h) $v_a = 4\,\mathrm{cm}$, $\gamma = 65°$, $v_b = 5\,\mathrm{cm}$
i) $c = 8\,\mathrm{cm}$, $v_a = 4\,\mathrm{cm}$, $v_b = 5\,\mathrm{cm}$
j) $a = 6\,\mathrm{cm}$, $v_a = 8\,\mathrm{cm}$, $v_b = 5\,\mathrm{cm}$
k) $\gamma = 40°$, $v_a = 3\,\mathrm{cm}$, $v_c = 4{,}5\,\mathrm{cm}$
l) $r_o = 4\,\mathrm{cm}$, $t_c = 6\,\mathrm{cm}$, $v_c = 5{,}5\,\mathrm{cm}$
m) $a = 7\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$, $t_c = 4{,}5\,\mathrm{cm}$
n) $\alpha = 80°$, $\beta = 35°$, $r_v = 2\,\mathrm{cm}$
o) $\alpha = 30°$, $\beta = 40°$, $r_o = 4{,}5\,\mathrm{cm}$
p) $b = 5\,\mathrm{cm}$, $\beta = 45°$, $v_b = 4{,}5\,\mathrm{cm}$
q) $a = 7\,\mathrm{cm}$, $\beta = 80°$, $r_v = 1{,}5\,\mathrm{cm}$
r) $c = 8\,\mathrm{cm}$, $t_a = 6\,\mathrm{cm}$, $t_b = 7{,}5\,\mathrm{cm}$
s) $b = 6\,\mathrm{cm}$, $\beta = 60°$, $t_a = 4\,\mathrm{cm}$
t) $a = 6\,\mathrm{cm}$, $t_a = 5\,\mathrm{cm}$, $t_b = 4\,\mathrm{cm}$
u) $a = 5\,\mathrm{cm}$, $v_a = 5\,\mathrm{cm}$, $t_b = 4{,}5\,\mathrm{cm}$
v) $t_a = 6\,\mathrm{cm}$, $t_b = 6{,}5\,\mathrm{cm}$, $t_c = 7\,\mathrm{cm}$
w) $t_a = 6{,}5\,\mathrm{cm}$, $v_a = 4\,\mathrm{cm}$, $v_b = 2{,}5\,\mathrm{cm}$

Cvičení 6.10. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány tři nezávislé údaje:

a) $a + b = 14\,\mathrm{cm}$, $\gamma = 30°$, $v_a = 3\,\mathrm{cm}$
b) $a - b = 2\,\mathrm{cm}$, $\gamma = 45°$, $c = 4{,}5\,\mathrm{cm}$
c) $a + b + c = 14{,}5\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$
d) $a = 5{,}5\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$, $\alpha - \beta = 25°$
e) $a + b + c = 15\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 100°$, $v_c = 3{,}5\,\mathrm{cm}$

Cvičení 6.11. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno: $|AB| = 5\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle DAB| = 65°$ a $|AC| = 7\,\mathrm{cm}$.

Cvičení 6.12. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno: $|AC| = 4\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 8\,\mathrm{cm}$ a výška na stranu AB rovnoběžníku má velikost $3\,\mathrm{cm}$.

Cvičení 6.13. Sestrojte rovnoběžník $PQRS$, je-li zadáno $|PR| = 5\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle RPS| = 50°$ a vzdálenost rovnoběžných stran PQ a RS je rovna $4\,\mathrm{cm}$.

Cvičení 6.14. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno $|AC| = 9\,\mathrm{cm}$ a velikost úhlu DAB je $30°$.

Cvičení 6.15. Sestrojte obdélník $KLMN$, je-li dáno $|KL| = 60\,\mathrm{mm}$ a velikost úhlu KSL je $120°$, kde S je průsečík uhlopříček.

Cvičení 6.16. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD, jsou-li dány velikosti všech jeho stran: $|AB| = 7\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 3\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 3\,\mathrm{cm}$, $|AD| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$.

Cvičení 6.17. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, je-li zadáno: $|AC| = 4\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 10\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle DAB| = 125°$ a $|\sphericalangle AEB| = 75°$, kde E je průsečík úhlopříček.

Cvičení 6.18. Sestrojte různoběžník $ABCD$, je-li dáno: $|AB| = 55\,\mathrm{mm}$, $|BC| = 30\,\mathrm{mm}$, $|AC| = 45\,\mathrm{mm}$, $|BD| = 70\,\mathrm{mm}$ a velikost úhlu AEB je rovna $120°$, kde E je průsečík úhlopříček.

Cvičení 6.19. Sestrojte kružnici k, je-li dána její tečna t s bodem dotyku T a další tečna q. Úlohu řešte pro rovnoběžné i různoběžné tečny.

Cvičení 6.20. Sestrojte kružnici k, která se dotýká dané kružnice m v daném bodě T a

a) má střed na dané přímce p,
b) prochází daným bodem M,
c) dotýká se dané přímky q.

Cvičení 6.21. Je dána kružnice k a mimo ni dva různé body K, L. Sestrojte kosočtverec $KLMN$ tak, aby jeden jeho vrchol ležel na kružnici k.

Cvičení 6.22. Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem A a dotýká se dané přímky t v bodě T.

Cvičení 6.23. Sestrojte kružnici, která má střed na dané kružnici m a dotýká se dvou daných

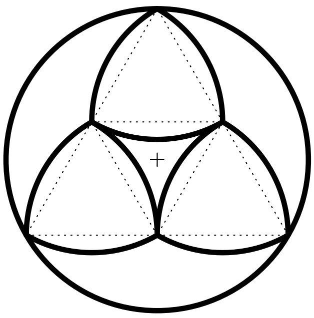
a) rovnoběžných přímek a, b;

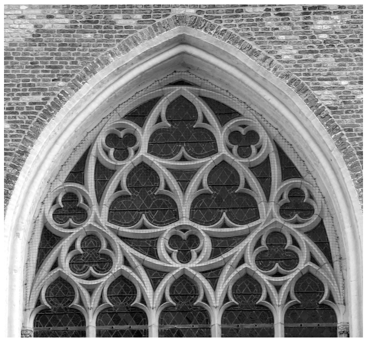
b) různoběžných přímek c, d.

Cvičení 6.24. Sestrojte kružnici o poloměru $r = 2\,\text{cm}$, která se vně dotýká dané kružnice $m(O, 3\,\text{cm})$ a prochází daným bodem M, $|SM| = 6\,\text{cm}$.

Cvičení 6.25. Sestrojte kružnici, která se dotýká dvou soustředných kružnic k_1, k_2 a prochází bodem P, který je vnitřním bodem mezikruží určeného kružnicemi k_1, k_2.

Cvičení 6.26. Sestrojte síť křivek, podle které byl vytvořen prvek v kružbě gotického okna.





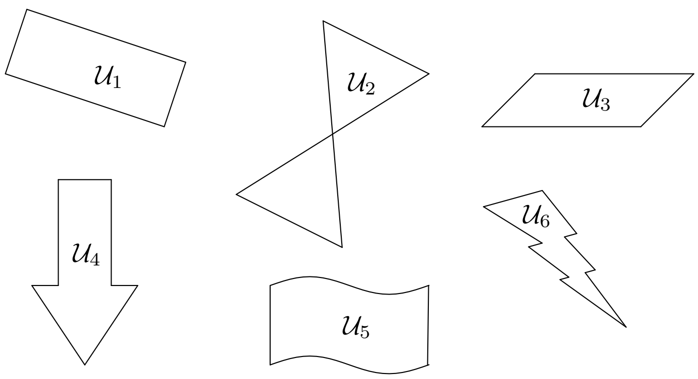
7 Shodnosti v rovině

Cvičení 7.1. Uvedené shodnosti v rovině rozdělte na shodnosti přímé a nepřímé: osová souměrnost, středová souměrnost, otočení, posunutí, posunutá osová souměrnost, identita.

Cvičení 7.2. Která z velkých tiskacích písmen abecedy A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z lze zakreslit tak, že jsou osově souměrná? Rozdělte písmena do skupin podle počtu os souměrnosti. Která z písmen lze zakreslit tak, aby byla středově souměrná?

Cvičení 7.3. Na obrázku je nakresleno šest rovinných útvarů:

a) Které z útvarů na obrázku níže jsou osově souměrné?
b) U osově souměrných útvarů určete všechny jejich osy souměrnosti.
c) Načrtněte rovinný útvar, který má právě čtyři osy souměrnosti.
d) Načrtněte rovinný útvar, který má nekonečně mnoho os souměrnosti.



Cvičení 7.4. Sestrojte obraz úsečky AB v osové souměrnosti s osou o, která:

a) protíná úsečku AB v bodě různém od bodů A a B,
b) protíná úsečku AB ve středu a je na ni kolmá,
c) je rovnoběžná s úsečkou AB,
d) protíná úsečku AB v bodě B a není kolmá k úsečce AB.

Cvičení 7.5. Ve středové souměrnosti určené bodem S sestrojte obraz úsečky AB, kde střed souměrnosti

a) neleží na přímce AB,
b) je totožný s bodem A,
c) leží na úsečce AB, $S \neq A \neq B$.

Cvičení 7.6. Sestrojte obraz kružnice k v osové souměrnosti s osou o, která:

a) prochází středem S kružnice k,
b) je vnější přímkou kružnice k,
c) je sečnou kružnice k, ale neprochází jejím středem.

Cvičení 7.7. Je dán obecný čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojte čtyřúhelník $A'B'C'D'$ k němu osově souměrný tak, aby v této souměrnosti platilo $A' = S_{BC}$.

Cvičení 7.8. Určete, které z následujících útvarů jsou osově nebo středově souměrné:

a) úsečka,
b) polopřímka,
c) obdélník,
d) kružnice,
e) čtverec,
f) kosočtverec,
g) kosodélník,
h) trojúhelník, jehož strany mají různou velikost,
i) rovnostranný trojúhelník,
j) rovnoramenný trojúhelník.

U osově souměrných útvarů určete počet a polohu os souměrnosti, u středově souměrných střed souměrnosti.

Cvičení 7.9. Narýsujte úhel AVB o velikosti 45°. Sestrojte jeho obraz ve středové souměrnosti se středem

a) V, b) A, c) $S \notin \sphericalangle AVB$.

Cvičení 7.10. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$, který je obrazem trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti:

a) se středem v bodě S, který je střed strany AC,
b) která zobrazí bod A na bod B.

Cvičení 7.11. Jsou dány dvě kolmé přímky k a l. Sestrojte jejich obrazy ve středové souměrnosti se středem S, jestliže:

a) S je průsečík přímek k a l,
b) S leží na přímce k, ale ne na přímce l.

Cvičení 7.12. V otočení určeném bodem S a orientovaným úhlem velikosti +45° sestrojte obraz úsečky AB, která prochází bodem S.

Cvičení 7.13. V otočení určeném bodem M a orientovaným úhlem velikosti $+60^\circ$ sestrojte obraz přímky p, která neprochází středem otáčení.

Cvičení 7.14. V otočení určeném bodem R a orientovaným úhlem velikosti -60° sestrojte obraz kružnice $k(S, r)$, kde $|RS| < r$.

Cvičení 7.15. Jsou dány dvě kolmé přímky a a b. Určete posunutí $\mathcal{T}$, které zobrazí přímky a a b na přímky a' a b' tak, aby průsečíky přímek a, b, a' a b' byly vrcholy

a) čtverce,
b) obdélníka.

Cvičení 7.16. Jsou dány tři různé body A, B, C, které neleží v přímce. V posunutí určeném orientovanou úsečkou AB sestrojte obraz:

a) úsečky AC,
b) přímky BC,
c) přímky AB.

Cvičení 7.17. Je dán čtverec $ABCD$, $a = 5\,\mathrm{cm}$. Označme S průsečík úhlopříček čtverce. Sestrojte kružnici k, která je určena bodem S a poloměrem $2\,\mathrm{cm}$, a dále sestrojte bod X, který leží na polopřímce AS a pro který platí $|AX| = 8\,\mathrm{cm}$. Obrazec otočte kolem bodu A o orientovaný úhel velikosti $+45^\circ$.

Cvičení 7.18. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ a jeho obraz $A'B'C'D'E'F'$ v posunutí určeném orientovanou úsečkou SD, kde S je střed souměrnosti šestiúhelníku $ABCDEF$. Jaký útvar vznikne sjednocením šestiúhelníku $ABCDEF$ a šestiúhelníku $A'B'C'D'E'F'$?

Cvičení 7.19. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, $|AB| = 2|CD|$, $AB \parallel CD$, S je střed úsečky AB. Určete shodné zobrazení, které zobrazí:

a) $\triangle ASD$ na $\triangle BSC$,
b) $\triangle ASD$ na $\triangle SBC$,
c) $\triangle SCD$ na $\triangle DAS$,
d) $\triangle DCS$ na $\triangle DCS$.

Cvičení 7.20. Je dán pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$. Určete shodné zobrazení, které zobrazí:

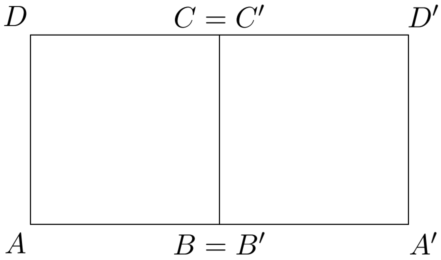
a) $\triangle ADE$ na $\triangle BGF$,
b) $\triangle ACD$ na $\triangle EGH$,
c) $\triangle ACD$ na $\triangle DEG$,
d) $\triangle ACD$ na $\triangle GED$.

Cvičení 7.21. Pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ zobrazte:

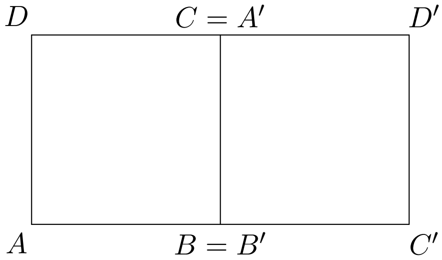
a) ve středové souměrnosti se středem D,
b) v osové souměrnosti s osou AC,
c) v posunutí určeném orientovanou úsečkou CE,
d) v otočení o orientovaný úhel velikosti -60° okolo bodu C.

Cvičení 7.22. Určete zobrazení, které zobrazí čtverec $ABCD$ na čtverec $A'B'C'D'$. U každého zobrazení zapište i jeho určující prvky.

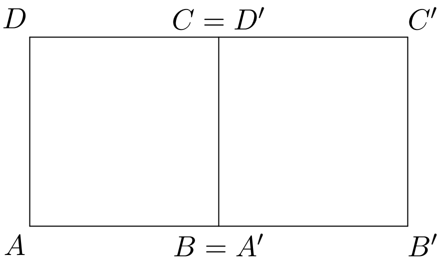
a)



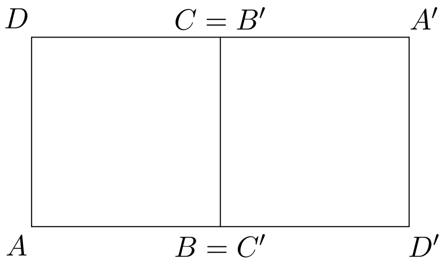
b)



c)



d)



Cvičení 7.23. Doplňte korektně následující tvrzení:

a) Složením dvou posunutí je . . . .
b) Složením dvou středových souměrností je . . . .
c) Složením dvou otočení se stejným středem je . . . .
d) Složením dvou osových souměrností se stejnou osou je . . . .
e) Složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami je . . . .
f) Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami je . . . .

Cvičení 7.24. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a body S_1, S_2, S_3 jsou po řadě středy jeho stran AB, BC, AC. Určete obraz trojúhelníka ABC v zobrazení $\mathcal{F} = \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_3$, kde $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ jsou středové souměrnosti se středy po řadě v bodech S_1, S_2, S_3. Určete výsledné zobrazení $\mathcal{F}$.

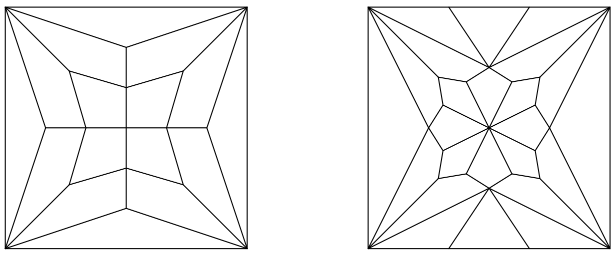
Cvičení 7.25. Čtverec $ABCD$ zobrazte nejdříve v posunutí $\mathcal{T}(\overrightarrow{CD})$ a výsledný obraz $A'B'C'D'$ potom v otočení $\mathcal{R}$ se středem otáčení D o orientovaný úhel velikosti $+90^\circ$. Určete výsledné složené zobrazení $\mathcal{F} = \mathcal{R} \circ \mathcal{T}$.

Cvičení 7.26. Kosočtverec $ABCD$, kde $|\sphericalangle DAB| = 60°$, zobrazte nejdříve v osové souměrnosti $\mathcal{O}$ s osou DC a výsledný obraz $A'B'C'D'$ potom v otočení $\mathcal{R}$ se středem otáčení C o orientovaný úhel velikosti $-60°$. Určete výsledné složené zobrazení $\mathcal{F} = \mathcal{R} \circ \mathcal{O}$.

Cvičení 7.27. Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby $|AB| = |BD|$ a rozdělte jej úhlopříčkou BD na dva shodné rovnostranné trojúhelníky. Určete všechna shodná zobrazení, která zobrazí jeden z těchto trojúhelníků na druhý (v libovolném pořadí vrcholů).

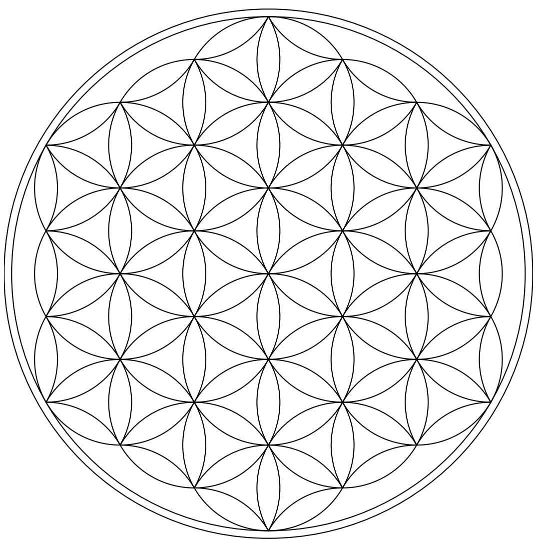
Cvičení 7.28. Na obou obrázcích klenby najděte všechny osy souměrnosti a vyznačte střed souměrnosti. Obarvěte obrázky tak, aby měly

a) 1 osu souměrnosti, b) 2 osy, c) 3 osy, d) 4 osy souměrnosti.

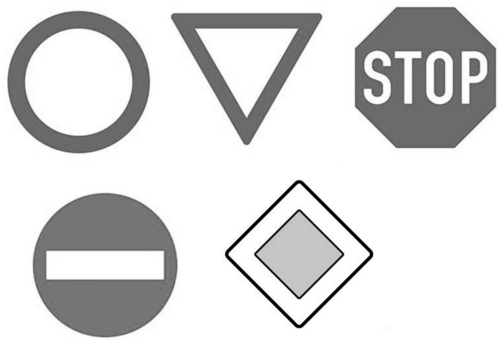


Cvičení 7.29. Na obrázku je mandala známá jako *Květ života*.

a) Najděte všechny osy souměrnosti.
b) Vybarvěte mandalu tak, aby se počet os souměrnosti změnil na 2.
c) Lze vybarvit mandalu tak, aby byla středově souměrná, ale nebyla osově souměrná? Zdůvodněte.



Cvičení 7.30. Jsou následující dopravní značky osově nebo středově souměrné? Kolik mají případně os souměrnosti?



Cvičení 7.31. Dokažte, že jsou platná následující tvrzení o shodnostech:

a) Jestliže má shodné zobrazení dva různé samodružné body A a B, pak je každý bod na této přímce samodružný.

b) Jestliže má shodné zobrazení tři různé samodružné body, které neleží na jedné přímce, pak se jedná o identitu.

8 Konstrukční úlohy využívající shodnosti

Cvičení 8.1. Je dán bod S ležící uvnitř daného trojúhelníku ABC. Sestrojte příčku XY trojúhelníka ABC, která je bodem S půlena.

Cvičení 8.2. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základen $a = 8\,\mathrm{cm}$, $c = 4\,\mathrm{cm}$ a obou jeho úhlopříček $e = 6\,\mathrm{cm}$, $f = 8\,\mathrm{cm}$.

Cvičení 8.3. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 5 cm a na jeho straně AB leží bod K tak, že $|KA| = 5\,\mathrm{mm}$. Vepište čtverci rovnostranný trojúhelník KLM tak, aby $L \in BC$, $M \in CD$.

Cvičení 8.4. Je dána přímka a a bod $A \in a$, dále je dána přímka s, kde $s \neq a$ a $A \notin s$. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem $S \in s$ a stranou $AB \subset a$.

Cvičení 8.5. Je dána kružnice $k(S, 3\,\mathrm{cm})$ a bod A tak, že $|SA| = 1{,}5\,\mathrm{cm}$. Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k, které mají délku 5,5 cm a které procházejí bodem A.

Cvičení 8.6. Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod A, který na této kružnici neleží. Určete množinu všech bodů X takových, že bod A je středem úsečky XY, kde Y leží na kružnici k.

Cvičení 8.7. Je dán čtverec $ABCD$, přímka p a bod S, který na přímce p neleží. Sestrojte úsečku XY tak, aby bod S byl jejím středem, bod X ležel na přímce p a bod Y náležel hranici čtverce $ABCD$.

Cvičení 8.8. Jsou dány dvě různoběžné přímky a, b a úsečka MN. Sestrojte čtverec $ABCD$ o straně AB tak, aby strana AB byla rovnoběžná s úsečkou MN, aby $|AB| = |MN|$ a bod A ležel na přímce a, bod B ležel na přímce b.

Cvičení 8.9. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k(S, 2\,\mathrm{cm})$, $l(S, 3\,\mathrm{cm})$ a bod A tak, že $|SA| = 2{,}3\,\mathrm{cm}$. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC, pro které platí $B \in k$, $C \in l$.

Cvičení 8.10. Je dána přímka p a dvě kružnice k, l v různých polorovinách určených přímkou p. Sestrojte úsečku XY kolmou k přímce p tak, aby bod X ležel na kružnici k, bod Y na kružnici l a přímka p procházela středem úsečky XY.

Cvičení 8.11. Jsou dány dvě různoběžné přímky a, b a bod A, který neleží na žádné z nich. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod B ležel na přímce a, bod D ležel na přímce b.

Cvičení 8.12. Je dána přímka p a body A, B ve stejné polorovině určené přímkou p. Určete na přímce p bod X tak, aby vzdálenost $|AX| + |XB|$ byla minimální.

Cvičení 8.13. Jsou dány dvě kružnice k, l, které se protínají ve dvou různých bodech. Veďte jedním z průsečíků kružnic takovou přímku, která vytíná na obou kružnicích shodné tětivy (uvažujte kružnice s různými poloměry).

Cvičení 8.14. Je dána přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k(S, 4\,\mathrm{cm})$, $l(O, 2\,\mathrm{cm})$, kde $d(S, p) = 6\,\mathrm{cm}$ a $d(O, p) = 3\,\mathrm{cm}$. Sestrojte všechny přímky rovnoběžné s přímkou p, na nichž kružnice k, l vytínají stejně dlouhé tětivy.

Cvičení 8.15. Je daná přímka p, kružnice k a trojúhelník ABC. Sestrojte všechny úsečky XY tak, že X leží na kružnici k, Y na hranici trojúhelníka ABC, úsečka XY je kolmá na p a střed úsečky XY leží na přímce p.

Cvičení 8.16. Jsou dány dvě kružnice k_1 a k_2, které se protínají ve dvou různých bodech Q a R. Sestrojte trojúhelník RST takový, že $S \in k_1$, $T \in k_2$ a úsečka RQ je těžnice tohoto trojúhelníku.

Cvičení 8.17. Je dána kružnice $k(S, 4\,\mathrm{cm})$ a úsečka XY délky $6\,\mathrm{cm}$. Sestrojte všechny tětivy AB kružnice k, které jsou shodné a rovnoběžné s úsečkou XY.

Cvičení 8.18. Jsou dány tři rovnoběžky a, b, c a bod $C \in c$. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC, pro které platí $A \in a$ a $B \in b$.

Cvičení 8.19. Jsou dány přímky a, b, o, kde $a \parallel o$ a $a \nparallel b$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, pro který platí $A \in a$, $B \in b$ a jehož těžnice t_c je částí přímky o.

Cvičení 8.20. Jsou dány dvě rovnoběžky a, b, které jsou od sebe vzdálené $4\,\mathrm{cm}$, a bod M, který neleží ani na jedné z řečených přímek. Sestrojte všechny přímky, které prochází bodem M a které protínají přímky a a b v bodech A a B a platí $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$.

Cvičení 8.21. Jsou dány tři různé body M, N, S, které neleží v přímce. Sestrojte čtverec $ABCD$ se středem S, kde bod M leží na přímce AB a bod N leží na přímce CD.

Cvičení 8.22. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S, 4\,\mathrm{cm})$ a $k_2(S, 3\,\mathrm{cm})$ a bod A, kde $|SA| = 2\,\mathrm{cm}$. Sestrojte všechny čtverce $ABCD$, pro které platí $B \in k_1$ a $D \in k_2$.

Cvičení 8.23. Je dána kružnice $k(S, 3\,\mathrm{cm})$ a bod M, kde $|SM| = 5\,\mathrm{cm}$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník, jehož vepsaná kružnice je kružnice k a kde bod M leží na přímce obsahující jednu stranu tohoto trojúhelníku.

9 Geometrie v prostoru

Cvičení 9.1. Načrtněte ve volném rovnoběžném promítání průmět krychle v pravém nadhledu, levém nadhledu, pravém podhledu a levém podhledu.

Cvičení 9.2. Sestrojte ve volném rovnoběžném promítání průmět

a) krychle $ABCDEFGH$ s délkou hrany 5 cm,
b) pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ s délkou hrany podstavy 4 cm a výškou 6 cm,
c) pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$ s délkou hrany podstavy 3 cm a výškou 6 cm,
d) pravidelného trojbokého hranolu $ABCDEF$ s délkou hrany podstavy 4 cm a výškou 6 cm,
e) pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ s délkou hrany podstavy 5 cm.

Cvičení 9.3. Proč se čtyřnohá stolička může viklat, ale trojnohá ne?

Cvičení 9.4. V krychli $ABCDEFGH$ nalezněte všechny přímky, které procházejí bodem E a jiným vrcholem krychle a jsou s přímkou BC

a) rovnoběžné, b) různoběžné, c) mimoběžné.

Cvičení 9.5. Načrtněte průmět pravidelného pětibokého hranolu $ABCDEA'B'C'D'E'$ a napište alespoň tři dvojice přímek incidentních s hranami hranolu, které jsou

a) rovnoběžné, b) různoběžné, c) mimoběžné.

Cvičení 9.6. V krychli $ABCDEFGH$ označme K, L, M, N po řadě středy stěn $ABCD$, $BCFG$, $EFGH$, $ADHE$. Určete vzájemnou polohu

a) přímky KL a roviny CDH, b) přímky LN a roviny ABG,
c) přímky LM a roviny BCE, d) přímky KN a roviny EFG.

Cvičení 9.7. Načrtněte si pět průmětů krychle. V každém průmětu znázorněte jinou polohu tří různých rovin v prostoru. Zapište také symbolicky.

Cvičení 9.8. V krychli $ABCDEFGH$ označme K, L, M, N po řadě středy hran EF, BF, FG a DH. Dokažte rovnoběžnost rovin

a) KLM a BEG, b) ACN a ELG.

Cvičení 9.9. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou

a) $S_{AB}FC$, b) $S_{AE}BD$, c) $S_{BC}S_{CH}G$,
d) $S_{CG}AB$, e) $S_{AE}S_{CG}B$, f) $S_{BF}AH$,
g) $S_{BF}S_{EF}C$, h) $S_{BC}S_{EH}S_{GH}$.

Cvičení 9.10. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM, kde

a) K leží na opačné polopřímce k polopřímce EF, $L \in S_{AB}B$ a $M = D$;
b) K je vnitřní bod úsečky BS_{BD}, C je vnitřní bod úsečky LD a M je vnitřní bod úsečky BF;
c) H je vnitřní bod úsečky KG, L je vnitřní bod stěny $ADHE$ a F je vnitřní bod úsečky MG;
d) $K = S_{AE}$, $B \in LF$ a $M \in GS_{GC}$.

Cvičení 9.11. Sestrojte řez pravidelného šestibokého hranolu $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ rovinou zadanou body B, D' a $S_{AA'}$.

Cvičení 9.12. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou KLM, kde

a) K je střed hrany AB, L je střed hrany BC a M je střed hrany BV;
b) K je střed hrany DV, $L \in CV$ a platí $|CL| = 3 \cdot |LV|$ a M je střed hrany BC;
c) K je střed hrany AV, $L \in CV$ a platí $|CL| = 2 \cdot |LV|$ a $M \in BV$ a platí $|BM| = 4 \cdot |VM|$.

Cvičení 9.13. Sestrojte řez pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$ rovinou BFK, kde K je střed hrany EV.

Cvičení 9.14. Sestrojte v průmětu krychle $ABCDEFGH$ průsečnici rovin
a) AFH a ACE; b) $AS_{BF}G$ a FHS_{BC}; c) $S_{AB}CH$ a BES_{CG}.

Cvičení 9.15. Sestrojte v průmětu pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ průsečnici rovin $S_{AV}KL$ a XYS_{CV}, kde

- $K \in BV$, $|VK| = 4 \cdot |KB|$,
- $L \in BC$, $|BC| = 3 \cdot |LC|$,
- $X \in AV$, $|XV| = 3 \cdot |XA|$,
- $Y \in AB$, $|AY| = 2 \cdot |YB|$.

Cvičení 9.16. Sestrojte v průmětu krychle $ABCDEFGH$ průsečík přímky DF s rovinou ACH. Úlohu vyřešte dvakrát, pro každý případ volte různé roviny procházející přímkou DF.

Cvičení 9.17. Sestrojte v průmětu krychle $ABCDEFGH$ průsečík přímky $S_{AE}S_{GH}$ s rovinou AHS_{BF}.

Cvičení 9.18. Sestrojte v průmětu pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ průsečík přímky KS_{DV} s rovinou BCV, kde K je bod, který leží na polopřímce AB a platí $|AK| = \frac{3}{2} \cdot |AB|$.

Cvičení 9.19. Sestrojte průnik přímky KL s krychlí $ABCDEFGH$, jestliže:

a) K leží na polopřímce BA a platí $|KB| = \frac{3}{2} \cdot |AB|$, L leží na polopřímce HG a platí $|LH| = \frac{3}{2} \cdot |HG|$;
b) K leží na polopřímce CB a platí $|KC| = \frac{3}{2} \cdot |BC|$, L leží na polopřímce EH a platí $|LE| = \frac{3}{2} \cdot |EH|$.

Cvičení 9.20. Sestrojte skutečnou velikost řezu krychle $ABCDEFGH$ rovinou

a) $CS_{AB}S_{BF}$, b) $S_{CG}S_{AE}S_{GH}$, c) AHS_{FG}.

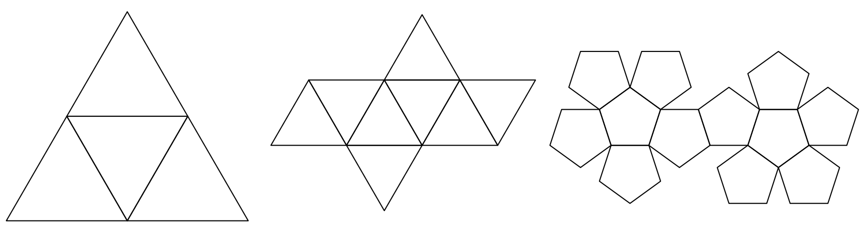
Cvičení 9.21. Sestrojte sítě následujících těles:

a) krychle s hranou délky 3 cm,
b) kvádru s hranami délek 3 cm, 4 cm a 5 cm,
c) pravidelného trojbokého hranolu s podstavnou hranou délky 3 cm s výškou 5 cm,
d) pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou délky 3 cm s výškou 5 cm,
e) rotačního válce s poloměrem 2 cm a výškou 5 cm,
f) rotačního kužele s poloměrem 2 cm a výškou 4 cm.

Cvičení 9.22. Zvolme v průmětu krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky 3 cm bod K na hraně DH takový, že $|KD| = 3 \cdot |KH|$. Spojte body B a K nejkratší možnou lomenou čárou, jejíž dílčí úsečky leží ve stěnách $ABFE$, $EFGH$ a $CDHG$.

Cvičení 9.23. Kolik různých sítí krychle existuje? Za dvě různé sítě považujte ty, mezi kterými neexistuje shodnost.

Cvičení 9.24. Sítě kterých těles jsou na obrázku 5 znázorněny? Všechna tři tělesa patří do skupiny „pravidelných“ těles – jaké označení se pro tuto skupinu běžně používá a která další tělesa do ní řadíme?



Obrázek 5: Sítě neznámých těles

Řešení úloh

1 Historický vývoj a axiomatická stavba geometrie

1.5 1b), 2a), 3d), 4c).

1.6 Axiomatický pojem je pojem bez definice, jeho chápání je intuitivní (např. bod).

1.7 Axiom je tvrzení, jehož platnost předpokládáme bez důkazu, platnost věty musíme dokázat.

1.8 a) $\forall \alpha \in \mathcal{Z}\colon \exists A \in \mathcal{Z}, A \in \alpha$;
b) $\forall p \in \mathcal{Z}\colon \exists A, B \in \mathcal{Z}, A \neq B, (A \in p) \wedge (B \in p)$;
c) $\forall A, B \in \mathcal{Z}, A \neq B\colon \exists!\, p \in \mathcal{Z}, (A \in p) \wedge (B \in p)$;
d) $\exists A, B, C, D \in Z\colon \forall \alpha \in \mathcal{Z}, (A \notin \alpha) \vee (B \notin \alpha) \vee (C \notin \alpha) \vee (D \notin \alpha)$.

1.9 a) R, b) U, c) I, d) Sh, e) I.

2 Polohové vlastnosti bodů, přímek a rovin

2.1 Pro tři přímky a, b, c v jedné rovině nastávají tyto možnosti:

a) všechny přímky jsou navzájem rovnoběžné,
$a \cap b = \emptyset \wedge b \cap c = \emptyset \wedge a \cap c = \emptyset$;
b) dvě přímky jsou rovnoběžné, třetí je s nimi různoběžná,
$a \cap b = \emptyset \wedge a \cap c = \{A\} \wedge b \cap c = \{B\}$;
c) všechny tři přímky se protínají v jediném bodě,
$a \cap b \cap c = \{X\}$;
d) přímky jsou po dvou různoběžné a protínají se v navzájem různých bodech,
$a \cap b = \{K\} \wedge b \cap c = \{L\} \wedge a \cap c = \{M\}$.

2.2 Označme jednu z dvojice polopřímek $\mapsto AB$, druhou $\mapsto CD$. Potom je:

a) průnikem bod, jestliže $A = C$ a polopřímky jsou navzájem opačné;
b) průnikem úsečka, jestliže $A \neq C$ a $A \in \mapsto CD$ a $C \in \mapsto AB$;
c) průnikem polopřímka, jestliže $\mapsto AB \subseteq \mapsto CD$ nebo $\mapsto CD \subseteq \mapsto AB$.

2.3 Na přímce AB jsou body v pořadí C, A, B, D, P, nebo C, A, B, P, D.

2.4 Na přímce KL jsou body v pořadí R, K, D, L, S, T. Pravdivé jsou výroky a) a d).

2.5 Bod P leží na přímce p, body M a N jsou v navzájem opačných polorovinách, kde A a M leží ve stejné polorovině.

2.6 a) Je potřeba rozlišit, zda tyto body leží ve stejné přímce, nebo nikoliv. Pokud ano, jsou jimi určeny tři úsečky, šest polopřímek a jedna přímka. Pokud ne, jsou jimi určeny tři úsečky, dvanáct polopřímek a tři přímky.
b) Jestliže body leží v jedné přímce, může být průnikem dvou ze tří možných úseček bod, nebo úsečka, a průnikem dvou ze šesti možných polopřímek, bod, úsečka, nebo polopřímka.

Jestliže body v jedné přímce neleží, může být průnikem dvou ze tří možných úseček pouze bod. Totéž platí pro přímky. Průnikem dvou ze dvanácti možných polopřímek může být jako v minulém případě bod, úsečka, nebo polopřímka.

2.7 a) $\mapsto PR = \mapsto PQ$ a $\mapsto QR = \mapsto QP$;
b) polopřímky RP a RQ;
c) $\mapsto RQ \subset \mapsto PQ$, resp. $\mapsto RQ \subset \mapsto PR$, a $\mapsto RP \subset \mapsto QR$, resp. $\mapsto RP \subset \mapsto QP$;
d) průnikem je úsečka PQ: polopřímky PQ a QP, PR a QP, PQ a QR, PR a QR;
průnikem je úsečka PR: polopřímky PR a RP, PQ a RP;
průnikem je úsečka QR: polopřímky QR a RQ, QP a RQ.

2.8 a) bod a úsečka;
b) bod, úsečka a polopřímka;
c) polopřímka a přímka;
d) přímka, rovinný pás, úhel, polorovina.

2.9 Pro jeden bod úloha nemá smysl. Načrtněme si danou situaci pro nějaký konečný počet bodů: pro dva body bude přímka jedna, pro tři budou právě tři přímky, čtyři body určí šest přímek, pět bodů deset přímek atd. Nyní tedy můžeme provést následující úvahu: v n-tém kroku z každého bodu vedeme přímku do $(n-1)$ bodů, ale tímto způsobem je započítána každá přímka dvakrát. Výsledek je tedy $\frac{n(n-1)}{2}$.

2.10 Obdobnou úvahou jako v předchozí úloze dostáváme opět výsledek $\frac{n(n-1)}{2}$.

2.11 Body M a N musí ležet v opačných polorovinách určených přímkou p.

2.12 Místo kružítka lze použít přenášení např. pomocí proužku papíru nebo špejle.

2.13 Kvádr je označený standardním způsobem, tj. $ABCD$ je dolní podstava, $EFGH$ horní podstava a AE, BF, CG a DH jsou svislé hrany kvádru.

a) i. rovnoběžné: $\leftrightarrow AD$, $\leftrightarrow FG$, $\leftrightarrow EH$, $\leftrightarrow BC$;
ii. různoběžné: $\leftrightarrow AB$, $\leftrightarrow FB$, $\leftrightarrow DC$, $\leftrightarrow CG$;
iii. mimoběžné $\leftrightarrow AE$, $\leftrightarrow EF$, $\leftrightarrow DH$, $\leftrightarrow GH$.
b) Svazek rovin tvoří např. roviny $\leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow ABE$ a $\leftrightarrow ABG$:
$\leftrightarrow ABC \cap \leftrightarrow ABE \cap \leftrightarrow ABG = \leftrightarrow AB$.

2.14 a) i. rovnoběžné: $\leftrightarrow AD$, $\leftrightarrow BC$;
ii. různoběžné: $\leftrightarrow AB$, $\leftrightarrow BV$, $\leftrightarrow CV$, $\leftrightarrow CD$, $\leftrightarrow AC$, $\leftrightarrow BD$;
iii. mimoběžné $\leftrightarrow AV$, $\leftrightarrow DV$.
b) Trs rovin tvoří např. roviny $\leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow ABV$ a $\leftrightarrow BCV$:
$\leftrightarrow ABC \cap \leftrightarrow ABV \cap \leftrightarrow BCV = \{B\}$.

3 Konvexní a nekonvexní množiny, úhel

3.1 V konvexním útvaru leží s každými dvěma jeho body i celá úsečka určená těmito body. V nekonvexním útvaru najdeme dvojici bodů určujících úsečku, která uvnitř útvaru neleží celá.

Konvexní: úsečka, přímka, polorovina, trojúhelník, krychle.
Nekonvexní: kružnice, kruh s otvorem.

3.2 Bod H leží na některé z polopřímek SC nebo SD.

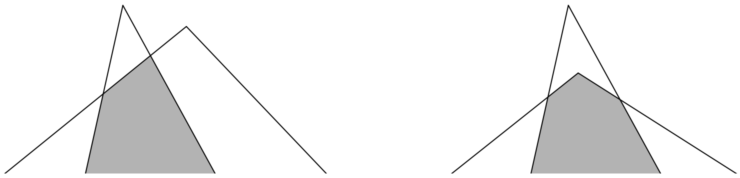
3.3 $\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle HDA$, $\sphericalangle HDB$.

3.4 $\sphericalangle ASB$, $\sphericalangle ASC$, $\sphericalangle BSC$, $\measuredangle ASB$, $\measuredangle ASC$, $\measuredangle BSC$.

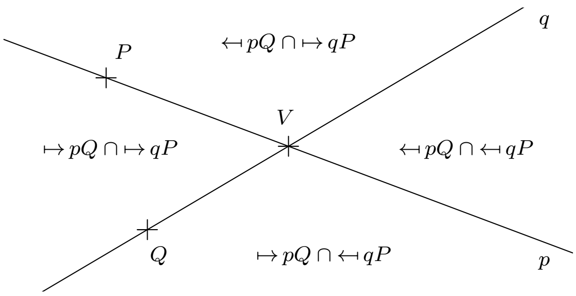
3.7 d) neexistuje.

3.9 a) ano; b) ne; c) pokud leží body na různých stranách, tak ano, jinak ne; d) ano; e) ano; f) pokud strany sousedí, tak ano, jinak ne; g) ne; h) ano.

3.10 Bod, úsečka, polopřímka, konvexní úhel, trojúhelník, konvexní čtyřúhelník, neomezené útvary podobné následujícím:



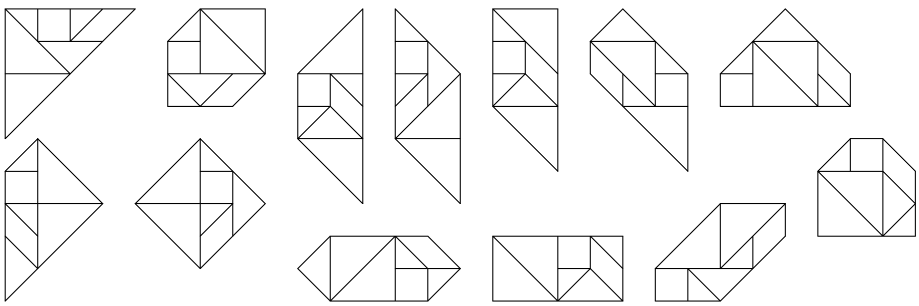
3.11 Viz obrázek níže.



3.12 Např.: a) $\sphericalangle ABS$ a $\sphericalangle CBS$; b) $\sphericalangle ASC$ a $\sphericalangle ASF$; c) $\sphericalangle ASB$ a $\sphericalangle DSE$; d) $\sphericalangle SAB$ a $\sphericalangle DSC$; e) $\sphericalangle SAB$ a $\sphericalangle ASF$; f) $\sphericalangle SAB$ a $\sphericalangle SBA$.

4 Trojúhelník, čtyřúhelník, mnohoúhelník, kružnice

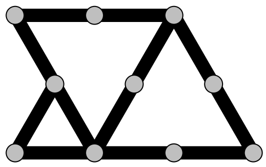
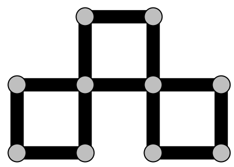
4.1 Všech 13 sestavitelných konvexních mnohoúhelníků lze vidět na obrázku níže:

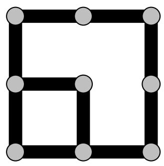
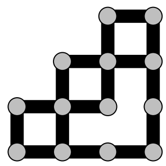


4.2 Bod, úsečka, trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník.

4.4 $\mathcal{U}_1$: nekonvexní čtyřúhelník
$\mathcal{U}_2$: čtverec, a), b), c), d), e), f)
$\mathcal{U}_3$: lichoběžník, g)

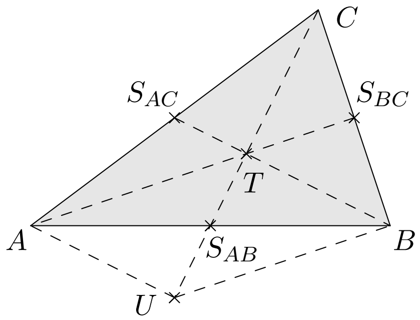
$\mathcal{U}_4$: obdélník, a), b), c), d), e)
$\mathcal{U}_5$: (obecný) rovnoběžník, a), c)
$\mathcal{U}_6$: kosočtverec, a), c), f)
$\mathcal{U}_7$: deltoid, f)

4.5 a)  b) 

c)  d) 

4.6 Tvrzení plyne ze shodnosti dvojice střídavých úhlů. Platí pro libovolný trojúhelník, neboť libovolným vrcholem trojúhelníku lze vést rovnoběžku s protější stranou trojúhelníku.

4.7 Je dán trojúhelník ABC, úsečky AS_{BC}, BS_{AC} a CS_{AB} jsou jeho těžnice. V daném trojúhelníku uvažujeme těžnice AS_{BC} a BS_{AC}, které se protínají v bodě T. Dokážeme, že bodem T prochází i třetí těžnice CS_{AB}.



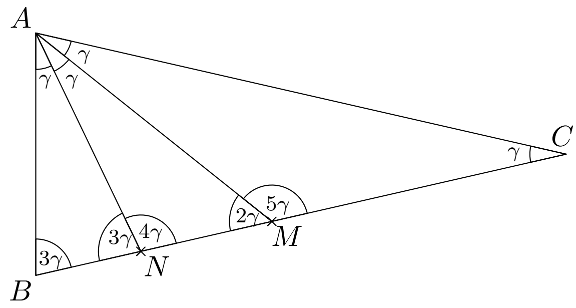
Sestrojme přímku CT a na ní bod U tak, že bod T je střed úsečky CU, tj. $CT \cong TU$. V trojúhelníku AUC je úsečka $S_{AC}T$ střední příčka, a proto $S_{AC}T \parallel AU$. Protože body S_{AC}, T, B leží na jedné přímce, jsou i úsečky BT a AU rovnoběžné. Analogicky v trojúhelníku BUC je úsečka $S_{BC}T$ střední příčka, a proto $S_{BC}T \parallel BU$, a tedy i $AT \parallel BU$. Odtud plyne, že čtyřúhelník $ATBU$ má každé dvě protější strany rovnoběžné, tj. je to rovnoběžník a jeho uhlopříčky AB a TU se půlí. Odtud plyne, že střed strany AB, bod C_1, leží na přímce CT. Tím je dokázáno, že těžnice CS_{AB} prochází bodem T. Platí tedy, že těžnice trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě.
Z vlastností středních příček $S_{AC}T$ a $S_{BC}T$ trojúhelníků AUC a BUC a z vlastností rovnoběžníku $AUBT$ dále plyne:

pro trojúhelník AUC: $S_{AC}T = \frac{1}{2}AU$, $AU \cong BT$, tj. $S_{AC}T = \frac{1}{2}BT$,
pro trojúhelník BUC: $S_{BC}T = \frac{1}{2}BU$, $BU \cong AT$, tj. $S_{BC}T = \frac{1}{2}AT$.

Tím je dokázáno, že těžiště T dělí každou z těžnic AS_{BC}, BS_{AC} na dvě části, z nichž ta, která obsahuje vrchol trojúhelníku je dvojnásobkem druhé. Opakováním stejných úvah pro jinou dvojici těžnic dokážeme uvedenou vlastnost i pro zbylou těžnici.

4.8 Označme velikost vnitřního úhlu při vrcholu C jako γ. Ze zadání vyplývá $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = 3\gamma$ a dále $|\sphericalangle CAM| = |\sphericalangle MAN| = |\sphericalangle NAB| = \gamma$. Dále ze součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC plyne, že přímý úhel má velikost 7γ.

Doplníme nyní velikosti zbývajících úhlů v trojúhelnících BAN, CAM a MAN: využijeme tvrzení o součtu vnitřních úhlů trojúhelníka (první dva trojúhelníky) a vedlejší úhly (poslední jmenovaný trojúhelník). Výsledné velikosti úhlů jsou patrné na obrázku níže.



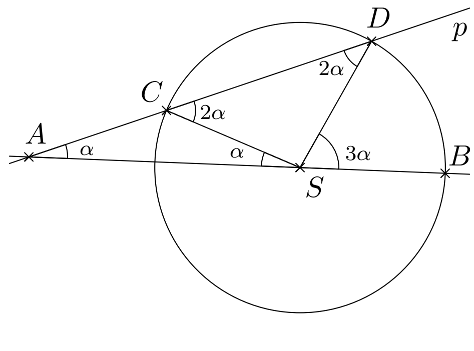
Nyní si můžeme díky velikostem úhlů všimnout, že:

$\triangle CAM$ je rovnoramenný s rameny AM a CM, tedy $AM \cong CM$;
$\triangle ABN$ je rovnoramenný s rameny AB a AN, tedy $AB \cong AN$;
$\triangle ABM$ je rovnoramenný s rameny AB a BM, tedy $AB \cong BM$.

Tím je tvrzení dokázáno.

4.9 Označme $|\sphericalangle ASC| = \alpha$. Z rovnoramennosti trojúhelníku ASC pak vyplývá, že i $|\sphericalangle SAC| = \alpha$. Protože je dále $\sphericalangle SCD$ vedlejší úhel k $\sphericalangle SCA$, ze součtu vnitřních úhlů trojúhelníka SAC dostáváme, že $|\sphericalangle SCD| = 2\alpha$. Konečně z rovnoramennosti trojúhelníka CSD plyne $|\sphericalangle CDS| = 2\alpha$.

Součtem konvexních úhlů ASC, CSD a DSB je přímý úhel. Díky součtu vnitřních úhlů v $\triangle CSD$ však musí platit $|\sphericalangle ASC| + |\sphericalangle BSD| = 4\alpha$, a proto $|\sphericalangle BSD| = 3\alpha$. Tím je tvrzení dokázáno.



4.10 Spojíme-li bod S třemi úsečkami s vrcholy trojúhelníka ABC, vzniknou tři další trojúhelníky, pro které z trojúhelníkové nerovnosti platí:

$AS + BS > AB$ pro trojúhelník ABS,
$AS + CS > AC$ pro trojúhelník ACS,
$BS + CS > BC$ pro trojúhelník BCS.

Sečtením pravých a levých stran uvedených nerovností dostáváme:

$$2 \cdot AS + 2 \cdot BS + 2 \cdot CS > AB + BC + AC,$$

z čehož plyne platnost dokazované nerovnosti.

4.11 Nechť v trojúhelníku ABC splývá těžnice t_c s výškou v_c. Označme patu kolmice P (viz obrázek 6 vlevo). Trojúhelníky APC a BPC jsou pak shodné dle věty *sus*, neboť u vrcholu P mají oba pravý úhel, $PA \cong PB$ a stranu PC mají společnou. Odtud vyplývá shodnost stran AC a BC.

4.12 Označme průsečík přímky AX s přímkou o jako Y (viz obrázek 6 vpravo). Ze shodnosti trojúhelníků ASY a BSY (dle věty *sus*) vyplývá, že úsečky AY a BY jsou shodné. Protože $AY = AX + XY$, je úsečka BY také shodná se součtem $AX + XY$.

Uvažme nyní trojúhelníkovou nerovnost v $\triangle BXY$ ve tvaru $BY < BX + XY$. Díky shodnosti úseček z minulého odstavce platí $AX + XY < BX + XY$, a proto také $AX < BX$, což bylo třeba ukázat.

Obrázek 6: K řešení úloh 4.11 a 4.12

4.13 Dokážeme zde pouze první uvedenou nerovnost, neboť důkaz ostatních dvou je obdobný. Ze zadané polohy bodu U vyplývá, že $|\sphericalangle CAB| > |\sphericalangle UAB|$ a $|\sphericalangle CBA| > |\sphericalangle UBA|$. Z věty o součtu vnitřních úhlů v trojúhelnících AUB a ACB dále plyne rovnost

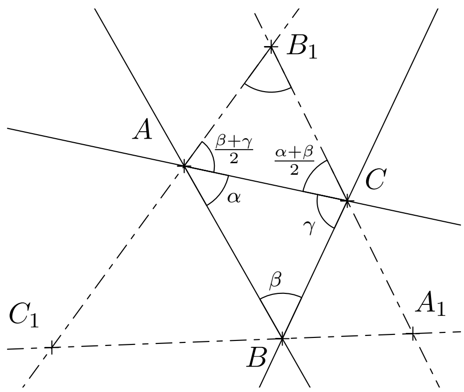
$$|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle ACB| \; = \; |\sphericalangle UAB| + |\sphericalangle UBA| + |\sphericalangle AUB|.$$

Zmenšíme-li první dva sčítance na levé straně nerovnosti dle vztahů řečených v předchozím odstavci, dostáváme nerovnost

$$|\sphericalangle UAB| + |\sphericalangle UBA| + |\sphericalangle ACB| \; < \; |\sphericalangle UAB| + |\sphericalangle UBA| + |\sphericalangle AUB|,$$

z níž vyplývá dokazovaný vztah $|\sphericalangle ACB| < |\sphericalangle AUB|$.

4.14 Odvodíme pouze velikost úhlu při vrcholu B_1, protože velikosti úhlů u zbylých dvou vrcholů odvodíme podobně. Označme α, β, γ velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC u vrcholů A, B, C. Vedlejší úhel při vrcholu A má pak velikost $\beta + \gamma$, a protože je osou vedlejšího úhlu půlen, platí $|\sphericalangle CAB_1| = \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$. Obdobně pak vedlejší úhel při vrcholu C má pak velikost $\alpha + \beta$, a proto platí $|\sphericalangle ACB_1| = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

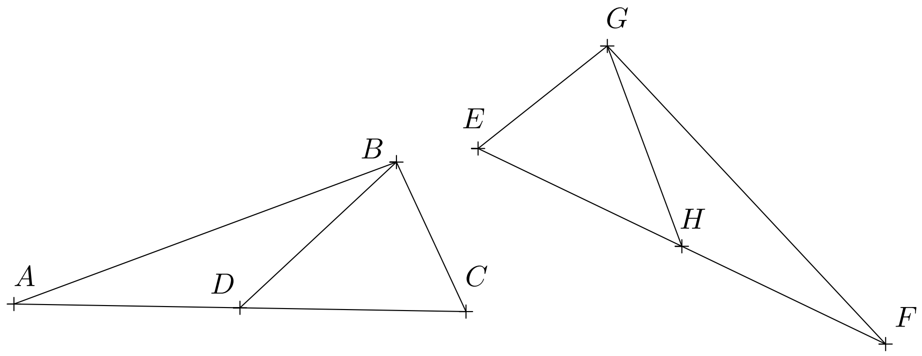


Díky tomu, že přímý úhel má velikost $\alpha + \beta + \gamma$, a dále z věty o součtu vnitřních úhlů v $\triangle ACB_1$ vyjádříme velikost úhlu AB_1C:

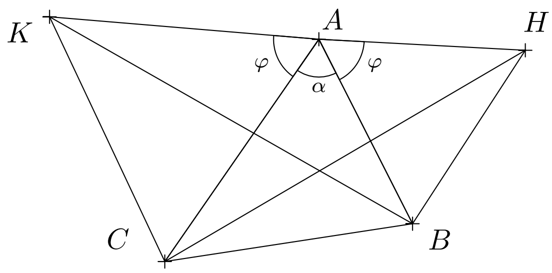
$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma) + \frac{1}{2}(\alpha+\beta) + |\sphericalangle AB_1C| = \alpha + \beta + \gamma$$
$$|\sphericalangle AB_1C| = \alpha + \beta + \gamma - \frac{1}{2}(\beta+\gamma) - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$|\sphericalangle AB_1C| = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

4.15 Trojúhelníky DMC a DNC se shodují v pravém úhlu a ve straně CD (přeponě). Dále se shodují v úhlech při vrcholu C, neboť CD je v rovnoramenném trojúhelníku osou vnitřního úhlu při vrcholu C. Tím se shodují i ve zbývajícím třetím úhlu a dle věty *usu* je $\triangle DMC \cong \triangle DNC$.

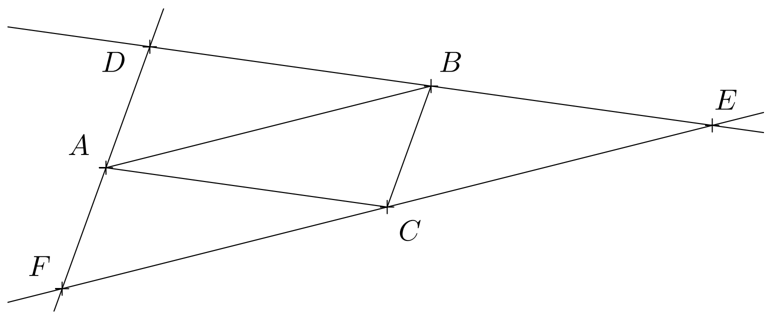
4.16 Nechť pro dva trojúhelníky ABC a EFG platí $AC \cong EF$, $AB \cong FG$ a $DB \cong HG$, kde D je střed strany AB a H je střed strany EF.
Ze shodnosti stran AC a EF plyne i shodnost jejich polovin, tedy $\triangle ABD \cong$ $\cong \triangle FGH$ podle věty *sss*. Odtud dostáváme shodnost úhlů $\sphericalangle ADB \cong FHG$ a shodné jsou proto také vedlejší úhly CDB a EHG. Tak jsou shodné trojúhelníky CBD a EGH dle věty *sus*.
Z poslední odvozené shodnosti vyplývá, že $BC \cong GE$, a tedy $\triangle ABC \cong$ $\cong \triangle EGF$ podle věty *sss*.



4.17 Shodnost úseček vyplývá ze shodnosti trojúhelníků BAK a HAC dle věty sus: z rovnostrannosti platí $AC \cong AK$ a $BA \cong HA$, úhly při vrcholu A mají velikost $\varphi + \alpha$, kde α je velikost vnitřního úhlu $\triangle ABC$ při vrcholu A a φ je velikost vnitřního úhlu rovnostranného trojúhelníka.



4.18 Označme vrcholy nově vzniklého trojúhelníka D, E, F podobně jako na obrázku níže. Vzájemná shodnost čtyř menších trojúhelníků plyne z existence rovnoběžníků $ACBD$, $ABCF$ a $ABEC$ a toho, že rozdělením rovnoběžníku úhlopříčkou vzniknou dva navzájem shodné trojúhelníky (dle věty sss).

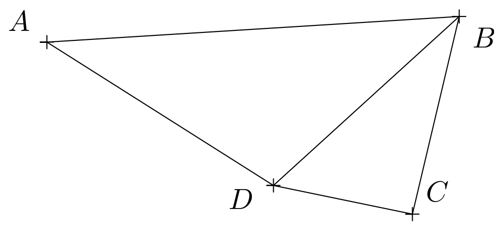


4.19 Při důkazu využijeme tvrzení, že naproti kratší straně trojúhelníka leží vždy menší vnitřní úhel a naopak proti delší straně leží vždy větší vnitřní úhel. Rozdělme čtyřúhelník $ABCD$ úhlopříčkou BD na dva trojúhelníky ABD a CBD. Protože $|AB| > |AD|$ (strana AB je dle zadání nejdelší), platí

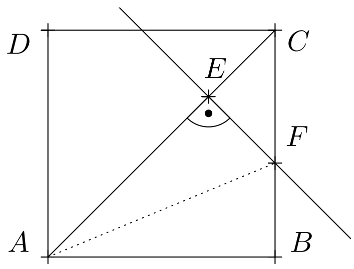
$|\sphericalangle ADB| > |\sphericalangle ABD|$, a obdobně, protože $|BC| > |CD|$ (strana CD je nejkratší), platí $|\sphericalangle CDB| > |\sphericalangle CBD|$.
Sečtením obou nerovností dostáváme

$$|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle CDB| > |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle CBD|,$$

a tedy $|\sphericalangle ADC| > |\sphericalangle ABC|$.



4.20 To, že úsečka BF je shodná s úsečkou EF, plyne ze shodnosti $\triangle AEF$ s $\triangle ABF$ dle věty Ssu (obojí jsou pravoúhlé trojúhelníky se stejnou přeponou a shodnou odvěsnou). Shodnost úseček EC a EF dále vyplývá z rovnoramennosti trojúhelníka ECF, neboť ten je pravoúhlý a jeho další vnitřní úhel ECF je polovinou pravého. Proto je i vnitřní úhel EFC polovinou pravého úhlu.



4.21 Deltoid, který je rozdělen svou delší úhlopříčkou na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.

4.22 a)

	kruh	**kružnice**	**polorovina**	**rovina**
hranice	kružnice	kružnice	přímka	—
vnitřek	ot. kruh	—	polorovina bez hr. přímky	rovina
vnějšek	rovina bez zkoumaného útvaru			

b)

	kruh	**kružnice**	**polorovina**	**rovina**
hranice	kruh	kružnice	polorovina	rovina
vnitřek	—			
vnějšek	prostor bez zkoumaného útvaru			

4.23 Přímka je v rovině útvarem uzavřeným.

5 Vzdálenosti, měření velikosti úhlů, obsahy

5.1 a) dvoubodová množina
b) jednobodová množina
c) úhlopříčka AC
d) prázdná množina
e) dvoubodová množina

5.2 Při konstrukci využijte toho, že se úhlopříčky čtverce půlí a jsou na sebe kolmé. Nepravdivá jsou tvrzení b), c) a f).

5.3 a) Kružnice, kruh, trojúhelník, pravidelný osmiúhelník, obdélník, čtverec.
b) Obě kružnice jsou soustředné (mají shodný střed). K nalezení středu zvolte tři libovolné různé body A, B, C na kružnici a nalezněte střed kružnice opsané $\triangle ABC$.
c) $S \doteq 3507{,}4\,\mathrm{cm}^2$
d) Kruhová značka má obsah přibližně $3848{,}5\,\mathrm{cm}^2$, takže na ni spotřebujeme více materiálu.

5.4 $|\sphericalangle ASB| = 72°$, $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS| = 54°$

5.5 $|AB| > |AC| > |BC| > |BD| > |AD| > |CD|$. Využijte tvrzení, že naproti kratší straně trojúhelníka leží vždy menší úhel. K porovnání dvou nejkratších úseček použijte trojúhelník ADC', kde $C' \in \mapsto BA$ a $|BC| = |BC'|$.

5.6 a) $28°30'$; b) $30°15'$; c) $58°37'30''$; d) $15°8'6''$.

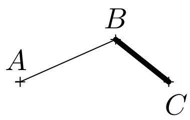
5.7 a) $\frac{1}{2}\pi\,\mathrm{rad}$; b) $2\pi\,\mathrm{rad}$; c) $\frac{1}{4}\pi\,\mathrm{rad}$; d) $\frac{3}{4}\pi\,\mathrm{rad}$; e) $\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{rad}$; f) $\frac{1}{180}\pi\,\mathrm{rad}$.

5.8 a) $30°$; b) $270°$; c) $150°$; d) $300°$; e) $330°$; f) $1\,\mathrm{rad} \doteq 57°17'45''$.

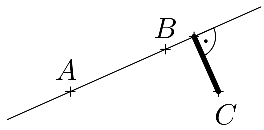
5.9 Do plného úhlu se vejde šest celých úhlů o velikosti 1 rad.

5.10 Přibližně 0,349 cm, přesně 20 cm.

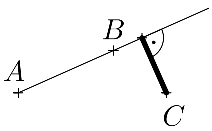
5.11 a)



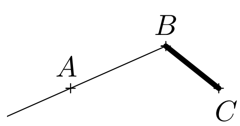
b)



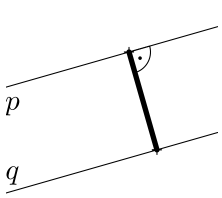
c)



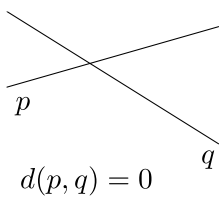
d)



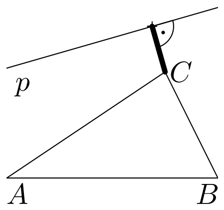
e)



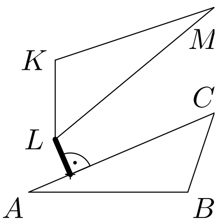
f)



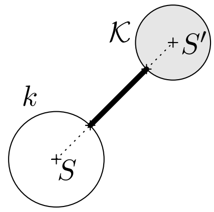
g)



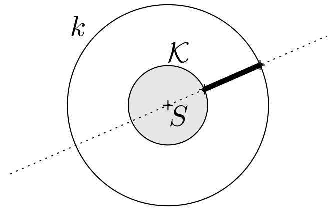
h)



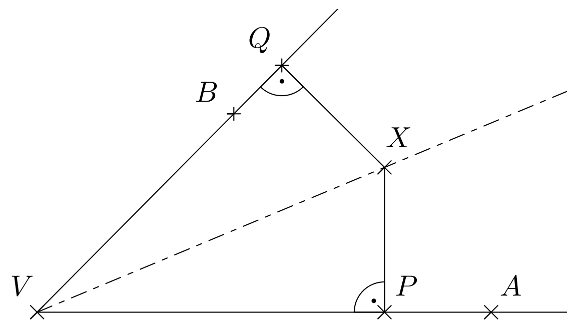
i)



j)



5.12 Spusťme kolmice z bodu X na ramena VA a VB a paty kolmic označme po řadě P a Q. Chceme dokázat, že $PX \cong QX$.
Pravoúhlé trojúhelníky PVX a QVX mají stejnou přeponu VX a rovněž jejich vnitřní úhly XVP a XVQ jsou shodné z definice osy úhlu. Pak ale musí být shodné i úhly VXP a VXQ, a proto jsou oba trojúhelníky shodné dle věty *usu*. Odtud plyne shodnost úseček PX a QX.



5.13 $S_1 = 15\,\text{cm}$, $S_2 = 21\,\text{cm}$. Obsahy trojúhelníků se při volbě druhé úhlopříčky nezmění, protože základny i výška zůstává stejná.

5.14 $|\sphericalangle DAB| = 38°$, $|\sphericalangle ABC| = 30°$, $|\sphericalangle BCD| = 150°$, $|\sphericalangle CDA| = 142°$.

5.15 Přibližně 40 074 km.

5.16 $S(\mathcal{U}_1) = 1\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_2) = 2\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_3) = 4\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_4) = 4\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_5) = 2\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_6) = 2\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_7) = 8\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_8) = 2\,\text{j}^2$.

5.17 $S(\mathcal{U}_1) = 3\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_2) = 2\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_3) = 6\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_4) = 1\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_5) = 1\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_6) = 1\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_7) = 4{,}5\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_8) = 3{,}5\,\text{j}^2$.

5.18 $S(\mathcal{U}_1) = 9\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_2) = 5\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_3) = 5\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_4) = 5\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_5) = 3\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_6) = 3\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_7) = 4\,\text{j}^2$.

5.19 $S(\mathcal{U}_1) = 17{,}5\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_2) = 14\,\text{j}^2$; $S(\mathcal{U}_3) = 14\,\text{j}^2$.

6 Konstrukce rovinných útvarů

6.1 Množinou je kružnice $k\left(S, \frac{r_1+r_2}{2}\right)$.

6.2 a) prázdná množina pro $r < \frac{|AB|}{2}$, jednobodová množina $\{S_{AB}\}$ pro $r = \frac{|AB|}{2}$, dvoubodová množina pro $r > \frac{|AB|}{2}$;
   b) dvojice různých přímek m_1, m_2 rovnoběžných s přímkou p, pro které platí $d(p, m_1) = d(p, m_2) = r$;
   c) osa rovinného pásu vymezeného přímkami a, b;
   d) osy všech konvexních úhlů sevřených přímkami a, b bez průsečíku obou přímek;
   e) přímka k, kde $k \perp p$ a $A \in k$, bez bodu A;
   f) přímka SA, kde S je střed kružnice k, bez bodů S a A;
   g) kružnice $k'(S, r_1 + r)$.

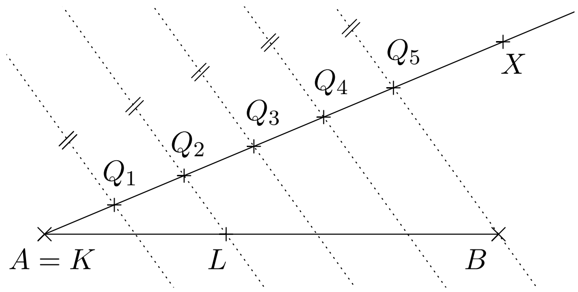
6.3 Množinou je kružnice se středem S_{AS} a poloměrem $\frac{r}{2}$ bez bodu A.

6.4 Označme T_1 a T_2 body dotyku tečen kružnice k procházejících bodem N. Množinou je kratší kruhový oblouk se středem S_{NS} a poloměrem $|SS_{NS}|$, který je omezen body T_1 a T_2 (bez těchto bodů).

6.5 Vyjděte ze čtverce (případ a)), pravidelného šestiúhelníku (případ b)) a pravidelného osmiúhelníku (případ c)) vepsaného do kružnice. Nové vrcholy konstruovaných mnohoúhelníků jsou průniky os všech stran s kružnicí.

6.6 Zvolte na kružnici tři libovolné různé body A, B, C. Kružnice k je opsaná $\triangle ABC$, její střed je tedy průsečíkem os stran trojúhelníku.

6.7 Konstrukce je znázorněna na obrázku níže. Bod X je libovolný neležící na přímce AB, bod Q_1 je libovolný na polopřímce AX a úsečky AQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_4 a Q_4Q_5 jsou shodné.



6.8 a)+b) využijte vlastností obvodových a středových úhlů; c) začněte konstrukcí strany AB, bod C je průnikem ekvigonály s vhodnou rovnoběžkou s přímkou AB.

6.9 Středy stran a, b, c budeme značit S_a, S_b, S_c, paty výšek v_a, v_b, v_c budeme značit P_a, P_b, P_c. Konstrukci začněte sestrojením

   a) $\triangle ACS_c$ dle věty sss.
   b) $\triangle ACS_c$ dle věty Ssu.
   c) $\triangle ACP_a$ dle věty Ssu. Úloha má 2 řešení.

d) $\triangle BCP_b$ dle věty Ssu.
e) $\triangle ABP_a$ nebo $\triangle ACP_a$ dle věty Ssu.
f) $\triangle ABP_b$ dle věty usu. Užitím poloměru r_v sestrojte střed S kružnice vepsané a dále díky známé velikosti úhlu $\beta = 2 \cdot |\sphericalangle SBA|$ bod C.
g) $\triangle ACP_c$ dle věty Ssu.
h) $\triangle BCP_b$ nebo $\triangle ACP_a$ dle věty usu.
i) $\triangle ABP_b$ nebo $\triangle ABP_a$ dle věty Ssu. Pak užitím Thaletovy věty sestrojte druhý z řečených trojúhelníků.
j) $\triangle BCP_b$ dle věty Ssu.
k) $\triangle ACP_a$ dle věty usu. Pak užitím Thaletovy věty sestrojte $\triangle ACP_c$.
l) $\triangle CS_cP_c$ dle věty Ssu. Pak sestrojte střed S kružnice opsané (využijte toho, že $|SC| = r_o$ a $|\sphericalangle SS_cP_c| = 90°$).
m) $\triangle ACD$ (nebo $\triangle BCD$) dle věty sss, kde D je bod takový, že $ADBC$ je rovnoběžník.
n) $\triangle ASU$ a $\triangle BSU$ dle věty usu, kde S je střed kružnice vepsané a U je bod dotyku kružnice se stranou AB.
o) $\triangle SAC$ (nebo $\triangle SBC$) dle věty sus, kde S je střed kružnice opsané a z vlastností středových a obvodových úhlů platí $|\sphericalangle ASC| = 2\beta$ (nebo $|\sphericalangle BSC| = 2\alpha$).
p) strany AC, bod B sestrojíme pomocí vhodné ekvigonály a rovnoběžky s úsečkou AC.
q) $\triangle BSU$ dle věty usu, kde S je střed kružnice vepsané a U je bod dotyku kružnice se stranou BC. Pak sestrojte bod C a obdobně jako v f) zbylý vrchol A.
r) $\triangle TAB$ dle věty sss, kde T je těžiště trojúhelníku ABC (využijte známé polohy těžiště na těžnicích).
s) úsečky AD, kde D je bod takový, že $ABDC$ je rovnoběžník. Pak sestrojte bod C pomocí ekvigonály (z vlastností rovnoběžníku platí $|\sphericalangle S_aCD| = \beta$).
t) $\triangle TBS_a$ dle věty sss, kde T je těžiště trojúhelníku ABC.
u) strany BC. Pak sestrojte pomocí vhodné rovnoběžky bod D takový, že $ABCD$ je rovnoběžník.
v) $\triangle TT'A$ dle věty sss, kde T je těžiště $\triangle ABC$ a $T' \in \mapsto CT$ tak, aby byl střed úsečky TT' bodem S_c.
w) $\triangle AS_aP_a$ dle věty Ssu. Pak sestrojte bod U takový, že US_a je střední příčka v $\triangle CBP_b$ rovnoběžná se stranou BP_b (využijte Thaletovu větu).

6.10 Konstrukci začněte sestrojením

a) úsečky BC', kde $C' \in \mapsto BC$ a $|BC'| = a + b$. Pak sestrojte vrchol A využitím vhodné rovnoběžky s přímkou BC' a známých velikostí vnitřních úhlů rovnoramenného trojúhelníku ACC'.
b) $\triangle ABU$ dle věty Ssu, kde $U \in BC$ tak, že $|BU| = a - b$. Využijte rovnoramennosti trojúhelníku AUC.
c) $\triangle A'B'C$ dle věty usu, kde $|A'B'| = a + b + c$, $|\sphericalangle CA'B'| = \frac{1}{2} \cdot \alpha$

a $|\sphericalangle CB'A'| = \frac{1}{2} \cdot \beta$. Body A a B leží na úsečce $A'B'$, platí $A \in o_{A'C}$ a $B \in o_{B'C}$.

d) $\triangle ADC$ dle věty *sus*, kde D je bod takový, že $ABDC$ je rovnoramenný lichoběžník se základnou AB.

e) $\triangle A'B'C$, kde $|A'B'| = a+b+c$, $|\sphericalangle CA'B'| = \frac{1}{2} \cdot \alpha$ a $d(C, \leftrightarrow A'B') = v_c$. Body A a B leží na úsečce $A'B'$, platí $A \in o_{A'C}$ a $B \in o_{B'C}$.

6.11 Konstrukci začněte sestrojením trojúhelníku ABC podle věty *Ssu* (využijte vlastností přilehlých úhlů).

6.12 Konstrukci začněte sestrojením pravoúhlého trojúhelníku ACP (kde P je pata zadané výšky spuštěné z bodu C na stranu AB) podle věty *Ssu*.

6.13 Konstrukci začněte sestrojením pravoúhlého trojúhelníku PRT (kde T je pata výšky na stranu PQ spuštěné z bodu R).

6.14 Konstrukci začněte sestrojením trojúhelníku ACD podle věty *usu* (využijte vlastností kosočtverce).

6.15 Konstrukci začněte sestrojením rovnoramenného trojúhelníku KSL podle věty *usu*.

6.16 Konstrukci začněte sestrojením trojúhelníku KBC, kde $K \in AB$ je bod, pro který platí $KC \parallel AD$.

6.17 Konstrukci začněte sestrojením trojúhelníku KBD, kde $K \in \leftrightarrow AB$ je bod, pro který platí $KD \parallel AC$.

6.18 Konstrukci začněte sestrojením trojúhelníku ABC dle věty *sss*.

6.19 Jestliže $t \parallel q$, střed hledané kružnice je bod S ležící na ose rovinného pásu vymezeného přímkami t a q, pro který platí $ST \perp t$.
Jestliže jsou tečny různoběžné, střed hledané kružnice je bod S ležící na ose úhlu sevřeného přímkami t a q, pro který platí $ST \perp t$. Takové úhly jsou dva, úloha má 2 řešení.

6.20 Označme střed zadané kružnice k jako O a střed hledané kružnice m jako S. Bod S je pak

a) průsečíkem přímek p a OT;
b) průsečíkem přímky OT a osy úsečky MT.

V případě c) sestrojte tečnu t kružnice k v bodě T, čímž převedete úlohu na 6.17.

6.21 Vrchol kosočtverce, který leží na kružnici k, je průsečíkem této kružnice s další kružnicí se středem v některém z bodů K, L a poloměrem $|KL|$. Úloha může mít až 4 řešení.

6.22 Střed hledané kružnice je průsečíkem osy úsečky AT s přímkou q, pro kterou platí $q \perp t$, $T \in q$.

6.23 Střed hledané kružnice je

a) průsečíkem kružnice m s osou rovinného pásu vymezeného rovnoběžkami a, b (až dvě řešení);
b) průsečíkem kružnice m s osou úhlu sevřeného různoběžkami c, d (až čtyři řešení).

6.24 Střed hledané kružnice je průsečíkem kružnice $l_1(O, 5\,\mathrm{cm})$ a kružnice $l_2(M, 2\,\mathrm{cm})$. Pro zadanou polohu dostáváme dvě možná řešení.

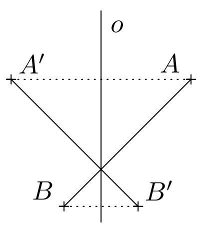
6.25 Označíme-li střed obou kružnic S a poloměr větší kružnice k_1, resp. menší kružnice k_2, jako r_1, resp. r_2, je střed hledané kružnice průsečíkem kružnice $l_1\left(S, \frac{r_1+r_2}{2}\right)$ a kružnice $l_2\left(P, \frac{r_1-r_2}{2}\right)$. Dostáváme dvě možná řešení.

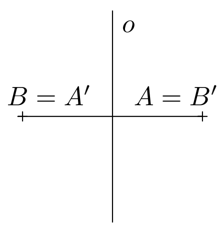
7 Shodnosti v rovině

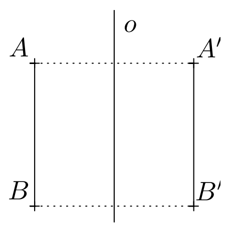
7.1 Přímé shodnosti: středová souměrnost, otočení, posunutí, identita.
Nepřímé shodnosti: osová souměrnost, posunutá osová souměrnost.

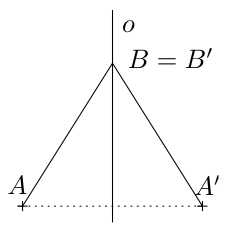
7.2 1 osa: A, B, C, D, E, K, L, M, Q, T, U, V, W;
2 osy: H, I; 3 osy: Y; 4 osy: X; nekonečně mnoho os: O;
středově souměrná písmena: H, I, N, O, S, X, Z.

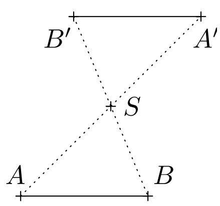
7.3 a) Útvary $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_4$.
b) $\mathcal{U}_1$: osy stran obdélníka;
$\mathcal{U}_2$: dvě navzájem kolmé přímky procházející společným vrcholem trojúhelníků a půlící úhly přilehlé tomuto vrcholu a úhly k nim vedlejší;
$\mathcal{U}_4$: přímka procházející vrcholem šipky a středem protilehlé strany.
c) Např. čtverec.
d) Např. kruh.

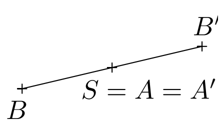
7.4 a)


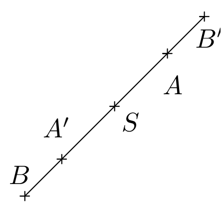
b)


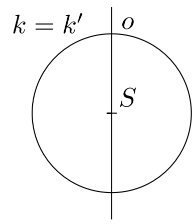
c)


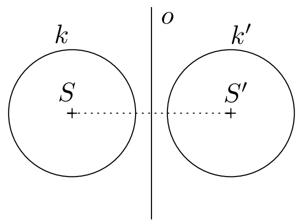
d)


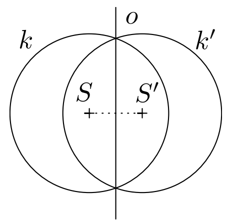
7.5 a)


b)


c)


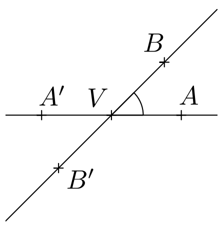
7.6 a)


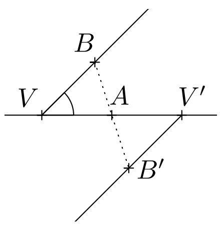
b)


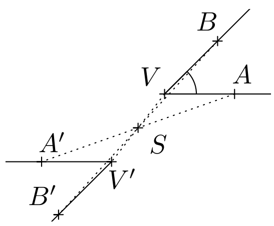
c)


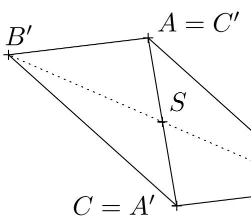
7.7 Osa souměrnosti je osou úsečky AS_{BC}.

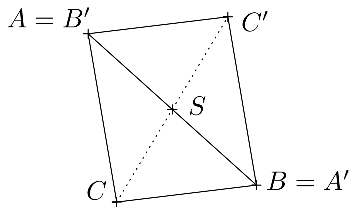
7.8 a) dvě osy souměrnosti (přímka, na které úsečka leží, a osa úsečky), střed souměrnosti (střed úsečky)
b) jedna osa souměrnosti (přímka, na které polopřímka leží)
c) dvě osy souměrnosti (osy stran obdélníka), střed souměrnosti (průsečík úhlopříček)
d) nekonečně mnoho os souměrnosti (přímka procházející středem kružnice), střed souměrnosti (střed kružnice)
e) čtyři osy souměrnosti (osy stran čtverce, přímky, na kterých leží úhlopříčky), střed souměrnosti (průsečík úhlopříček)
f) dvě osy souměrnosti (přímky, na kterých leží úhlopříčky), střed souměrnosti (průsečík úhlopříček)
g) střed souměrnosti (průsečík úhlopříček)
h) žádná osa ani střed
i) tři osy souměrnosti (osy stran trojúhelníka)
j) jedna osa souměrnosti (osa základny trojúhelníka)

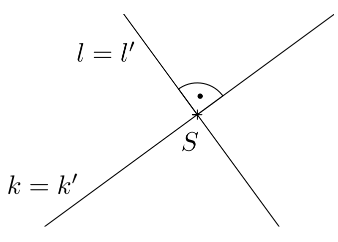
7.9 a)


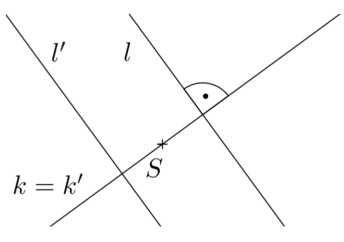
b)


c)


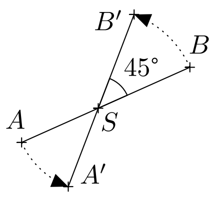
7.10 a)


b)


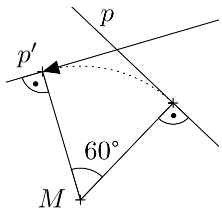
7.11 a)


b)


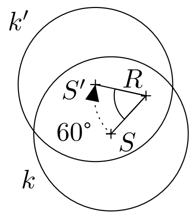
7.12



7.13



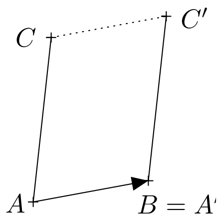
7.14



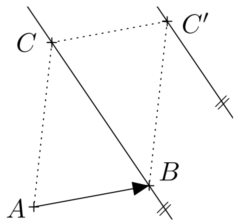
7.15 a) $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{XY}\right)$, kde X, Y jsou dva libovolné body takové, že přímka XY svírá s přímkou a úhel velikosti 45°.

b) $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{XY}\right)$, kde X, Y jsou dva libovolné body takové, že přímka XY svírá s přímkou a úhel velikosti jiné než 0°, 45° nebo 90°.

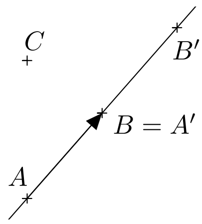
7.16 a)



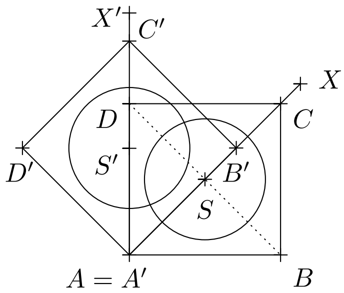
b)



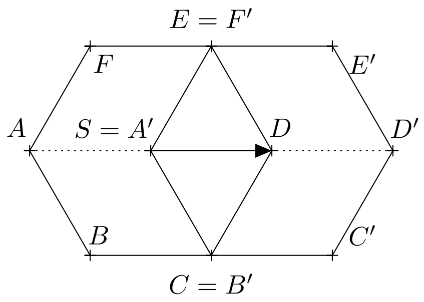
c)



7.17



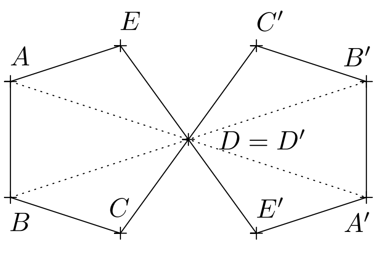
7.18



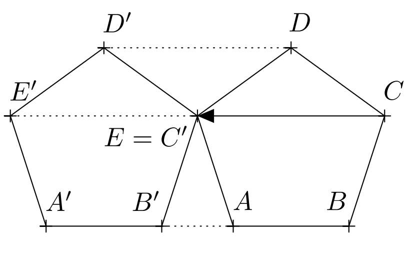
7.19 a) osová souměrnost $\mathcal{O}(o_{AB})$; b) posunutí $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{AS}\right)$; c) středová souměrnost $\mathcal{S}\,(S_{SD})$; d) identita.

7.20 a) osová souměrnost $\mathcal{O}(o_{AB})$; b) středová souměrnost $\mathcal{S}\,(S)$, kde S je střed osmiúhelníku; c) neexistuje; d) osová souměrnost $\mathcal{O}(\leftrightarrow DH)$.

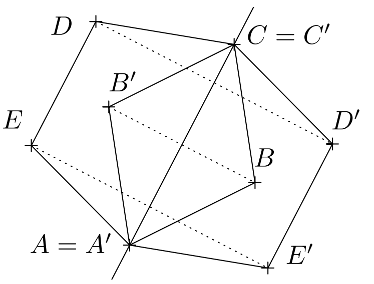
7.21 a)



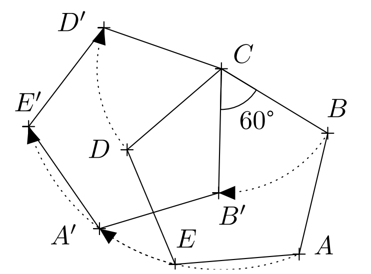
c)



b)



d)



7.22 a) osová souměrnost $\mathcal{O}(\leftrightarrow BC)$; b) otočení $\mathcal{R}\,(B, -90°)$; c) posunutí $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{AB}\right)$; d) středová souměrnost $\mathcal{S}(S_{BC})$.

7.23 a) posunutí nebo identita; b) posunutí nebo identita; c) otočení se stejným středem nebo středová souměrnost nebo identita; d) identita; e) posunutí; f) otočení.

7.24 Zobrazení $\mathcal{F}$ je středová souměrnost se středem A.

7.25 Zobrazení $\mathcal{F}$ je rotace o orientovaný úhel velikosti $+90°$ kolem středu čtverce S.

7.26 Zobrazení $\mathcal{F}$ je osová souměrnost s osou CA', kde bod A' je obraz bodu A v osové souměrnosti ze zadání.

7.27
- osová souměrnost $\mathcal{O}\,(\leftrightarrow BD) : \triangle ABD \to \triangle CBD$,
- středová souměrnost $\mathcal{S}\,(S_{BD}) : \triangle ABD \to \triangle CDB$,
- otočení $\mathcal{R}\,(B, -60°) : \triangle ABD \to \triangle DBC$,
- otočení $\mathcal{R}\,(D, +60°) : \triangle ABD \to \triangle BCD$,
- složené zobrazení $\mathcal{O}\circ\mathcal{T}$: $\triangle ABD \to \triangle DCB$, kde $\mathcal{O}$ je osová souměrnost podle osy CD a $\mathcal{T}$ je posunutí o orientovanou úsečku AD,
- složené zobrazení $\mathcal{O}\circ\mathcal{T}$: $\triangle ABD \to \triangle BDC$, kde $\mathcal{O}$ je osová souměrnost podle osy BC a $\mathcal{T}$ je posunutí o orientovanou úsečku AB.

7.29
a) Os souměrnosti je šest (jsou to osy pravidelného šestiúhelníku, který by byl vnitřku mandaly opsán).
c) Lze.

7.30 Zákaz vjedu všech vozidel v obou směrech: středově souměrná, nekonečně mnoho os souměrnosti.
Dej přednost v jízdě: tři osy souměrnosti.
Stůj, dej přednost v jízdě: bez os souměrnosti.
Zákaz vjedu všech vozidel: středově souměrná, dvě osy souměrnosti.
Hlavní pozemní komunikace: středově souměrná, čtyři osy souměrnosti.

7.31
a) Nechť má nějaké shodné zobrazení dva různé samodružné body A a B a zvolme libovolný bod $C \in \leftrightarrow AB$. Z definice shodného zobrazení platí pro jeho obraz C', že $|AC| = |AC'|$ a $|BC| = |BC'|$. Bod C' tak musí ležet na kružnici $k\,(A, |AC|)$, ale také na kružnici $l\,(B, |BC|)$. Tyto dvě kružnice však mají pro $A \neq B$ jediný společný bod, a to C. Proto $C' = C$, jinými slovy, bod C je samodružný.
Protože jsme bod C volili na přímce AB libovolně až na body A a B, je každý takový bod samodružný.

b) Nechť má nějaké shodné zobrazení tři různé samodružné body A, B, C, které neleží na jedné přímce. Zvolme libovolný další bod D. Obdobnou úvahou jako v předchozím bodu docházíme k tomu, že obraz D' tohoto bodu musí ležet na kružnicích $k\,(A, |AD|)$, $l\,(B, |BD|)$ a $m\,(C, |CD|)$.
Zaměřme se nejdříve na společné body kružnice k a l. Jedním z těchto bodů je jistě D, zároveň však nemohou být díky podmínce $A \neq B$ totožné, mají tedy jeden nebo dva společné body.
Pokud mají společný pouze bod D (což nastane, jestliže $D \in \leftrightarrow AB$), prochází tímto bodem i kružnice m a platí proto $D' = D$.
Nechť mají kružnice k a l společné dva různé body. Aby i třetí kružnice m procházela oběma těmito body, musí její střed C nutně ležet na přímce AB, což ale není ze zadání možné. Proto je jediným společným bodem všech tří kružnic jen bod D a opět tak platí $D' = D$.
Protože byl bod D zvolen libovolně, je samodružný kterýkoliv bod. Uvažované shodné zobrazení je tak identita.

8 Konstrukční úlohy využívající shodnosti

8.1 Uvažte středovou souměrnost $\mathcal{S}(S)$, která zobrazí $\triangle ABC$ na $\triangle A'B'C'$. Bod X leží v průniku hranic obou trojúhelníků. V závislosti na poloze bodu S může mít úloha 1, 2 nebo 3 řešení (nepočítáno s opačným pojmenováním koncových bodů úsečky).

8.2 Uvažme obraz $B'D'$ úhlopříčky BD v posunutí o orientovanou úsečku DC a konstrukci začněte trojúhelníkem $AB'D'$ dle věty *sss*.

8.3 Uvažte otočení $\mathcal{R}(K, +60°)$, které zobrazí stranu BC na úsečku $B'C'$. Bod M leží v průniku $B'C'$ a CD.

8.4 Uvažte otočení $\mathcal{R}(A, \pm 60°)$, která zobrazí přímku a na přímku a'. Bod S leží v průniku přímek a' a s. Úloha má v závislosti na poloze přímky s jedno nebo dvě řešení.

8.5 Uvažte libovolnou tětivu $X'Y'$ kružnice k, která má požadovanou délku, na které leží bod A', kde $|SA| = |SA'|$. Pak otočte tětivu $X'Y'$ kolem bodu S o orientovaný úhel $A'SA$. Úloha má dvě řešení.

8.6 Hledanou množinou je obraz kružnice k ve středové souměrnosti se středem A.

8.7 Uvažte středovou souměrnost $\mathcal{S}(S)$, která zobrazí přímku p na přímku p'. Bod Y leží v průniku přímky p' a hranice čtverce $ABCD$. Úloha má v závislosti na poloze prvků 0, 1, nebo 2 řešení.

8.8 Uvažte posunutí $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{MN}\right)$, které zobrazí přímku a na přímku a'. Bod B leží v průniku přímek a' a b. Úloha má 2 řešení (uvažte také posunutí o opačnou orientovanou úsečku).

8.9 Uvažte otočení $\mathcal{R}(A, \pm 60°)$, která zobrazí kružnici k na k'. Bod C leží v průniku kružnic k' a l. Úloha má čtyři řešení.

8.10 Uvažte osovou souměrnost $\mathcal{O}(p)$, které zobrazí kružnici k na k'. Bod Y leží v průniku kružnic k' a l. Úloha má v závislosti na poloze prvků 0, 1, nebo 2 řešení.

8.11 Uvažte otočení $\mathcal{R}(A, \pm 90°)$, která zobrazí přímku a na přímku a'. Bod D leží v průniku přímek a' a b. Úloha má dvě řešení.

8.12 Uvažte osovou souměrnost $\mathcal{O}(p)$, které zobrazí bod B na B'. Bod X je průsečík přímky p s úsečkou AB'. To, že je takto vzdálenost minimální, plyne z rovnosti $|AX| + |XB| = |AX| + |XB'|$ a z trojúhelníkové nerovnosti.

8.13 Označíme-li průsečíky obou kružnic X a Y, uvažte středovou souměrnost $\mathcal{S}(X)$, která zobrazí kružnici k na k'. Průsečík kružnic k' a l různý od bodu X je druhým bodem hledané přímky. Dalším řešením je přímka XY.

8.14 Označíme-li paty kolmic spuštěných z bodů S a O na přímku p jako P_S a P_O, uvažte posunutí $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{P_S P_O}\right)$, která zobrazí kružnici k na k'. Průsečíky kružnic k' a l určují hledanou přímku.

8.15 Uvažte osovou souměrnost $\mathcal{O}(p)$, která zobrazí kružnici k na k'. Bod Y leží v průniku kružnice k' s hranicí trojúhelníku ABC. Úloha má v závislosti na poloze prvků až šest řešení.

8.16 Uvažte středovou souměrnost $\mathcal{S}(Q)$, která zobrazí kružnici k_1 na k_1'. Bod T leží v průniku kružnic k_1' a k_2.

8.17 Uvažte posunutí $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{XY}\right)$, které zobrazí kružnici k na k'. Bod B leží v průniku kružnic k' a k. Úloha má dvě řešení.

8.18 Uvažte otočení $\mathcal{R}(C, \pm 60°)$, která zobrazí přímku a na přímku a'. Bod B leží v průniku přímek a' a b. Úloha má dvě řešení.

8.19 Uvažte osovou souměrnost $\mathcal{O}(o)$, která zobrazí přímku a na a'. Bod B je pak průsečíkem přímek a' a b.

8.20 Uvažte libovolnou úsečku $A'B'$ délky 6 cm, kde $A' \in a$ a $B' \in b$, a na ní bod M' takový, že $\leftrightarrow MM' \parallel a$. Pak posuňte úsečku $A'B'$ o orientovanou úsečku $M'M$. Úloha má dvě řešení.

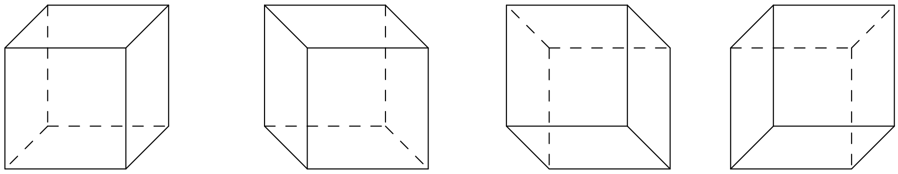
8.21 Zobrazte bod M ve středové souměrnosti se středem S na bod M'. Hledaná strana čtverce CD pak leží na přímce $M'N$.

8.22 Uvažte otočení $\mathcal{R}(A, \pm 90°)$, která zobrazí kružnici k_1 na k_1'. Bod D je pak průsečíkem kružnic k_1' a k_2. Úloha má čtyři řešení.

8.23 Uvažte libovolný rovnostranný trojúhelník ABC, jehož vepsaná kružnice je kružnice k. Na některé z přímek určených jeho stranami zvolte bod M' tak, aby platilo $|M'S| = 5\,\text{cm}$. Pak otočte trojúhelník ABC kolem bodu S o orientovaný úhel $M'SM$. Úloha má dvě řešení.

9 Geometrie v prostoru

9.1



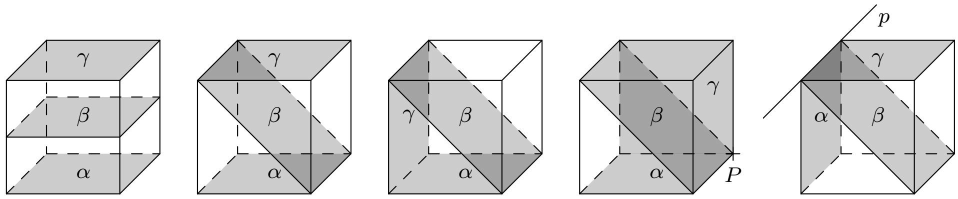
pravý nadhled | levý nadhled | pravý podhled | levý podhled

9.3 Konce tří noh stoličky vždy leží v rovině podlahy, neboť je geometricky tato rovina určena trojicí bodů na těchto koncích. V případě čtyřnohé stoličky však musí mít zbývající noha přesnou délku, aby bod na jejím konci ležel v rovině zadané konci tří ostatních noh.

9.4 a) $\leftrightarrow EH$; b) $\leftrightarrow EB$, $\leftrightarrow EC$; c) $\leftrightarrow EA$, $\leftrightarrow ED$, $\leftrightarrow EF$, $\leftrightarrow EG$.

9.6 a), c) rovnoběžné; b) rovnoběžné (přímka v rovině leží); d) různoběžné.

9.7

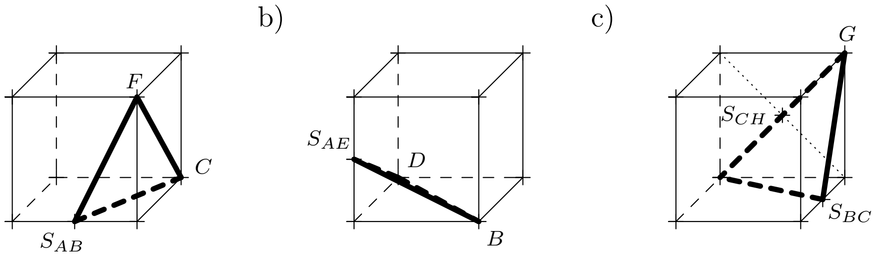


$\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ | $\alpha \parallel \gamma$, $\alpha \nparallel \beta$, $\gamma \nparallel \beta$ | $\alpha \nparallel \beta$ $\alpha \nparallel \gamma$, $\beta \nparallel \gamma$, $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$ | $\alpha \nparallel \beta$ $\alpha \nparallel \gamma$, $\beta \nparallel \gamma$, $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\}$ | $\alpha \nparallel \beta$ $\alpha \nparallel \gamma$, $\beta \nparallel \gamma$, $\alpha \cap \beta \cap \gamma = p$

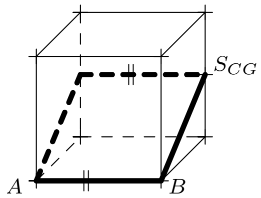
9.8 a) Přímka KM je rovnoběžná s přímkou EG, neboť KM je střední příčka v $\triangle EFG$. Proto je $\leftrightarrow KM \parallel \leftrightarrow EBG$ dle kritéria rovnoběžnosti přímky a roviny. Z trojúhelníku EBF zase užitím vlastností středních příček dostáváme, že $\leftrightarrow KL \parallel \leftrightarrow EB$, a proto $\leftrightarrow KL \parallel \leftrightarrow EBG$. Z kritéria rovnoběžnosti dvou rovin tak vyplývá dokazovaná poloha.

b) Přímka AC je rovnoběžná s přímkou EG, neboť čtyřúhelník $ACGE$ je obdélník. Proto je $\leftrightarrow AC \parallel \leftrightarrow ELG$ dle kritéria rovnoběžnosti přímky a roviny. Dále, protože $\leftrightarrow AN \parallel \leftrightarrow S_{AE}H$ (neboť jsou středově souměrné podle středu čtverce $ADHE$) a $\leftrightarrow S_{AE}H \parallel \leftrightarrow CG$ (neboť jsou to protilehlé strany obdélníku), jsou rovnoběžné i přímky AN a CG. Platí proto $\leftrightarrow AN \parallel \leftrightarrow ELG$ a z kritéria rovnoběžnosti dvou rovin vyplývá dokazovaná poloha.

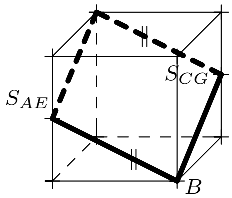
9.9 a) b) c)



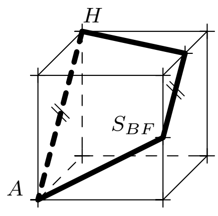
d)



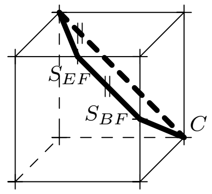
e)



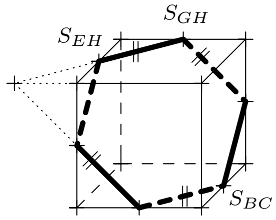
f)



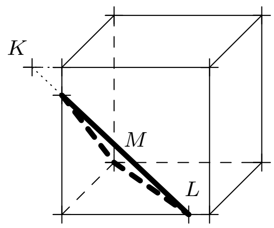
g)



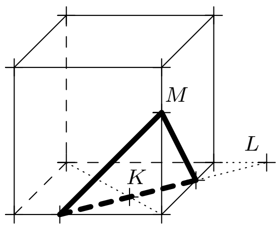
h)



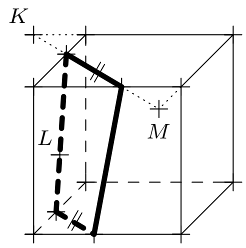
9.10 a)



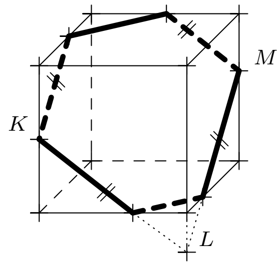
b)



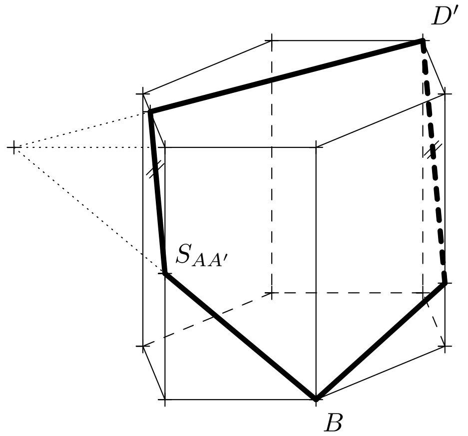
c)



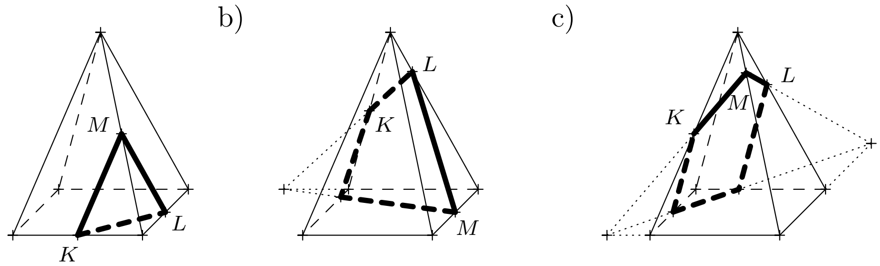
d)



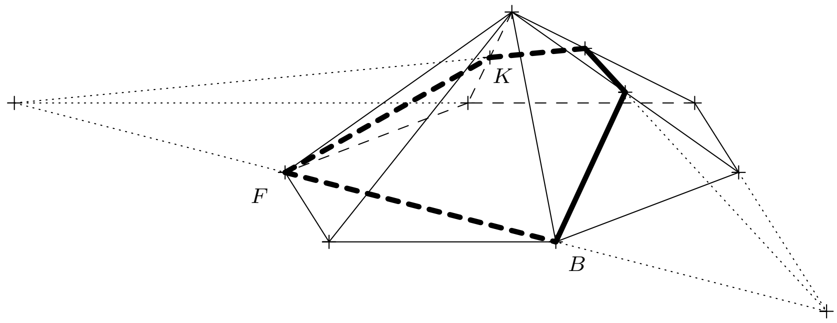
9.11



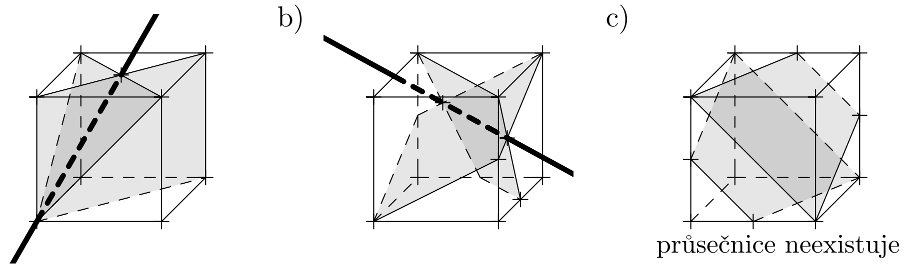
9.12 a) b) c)



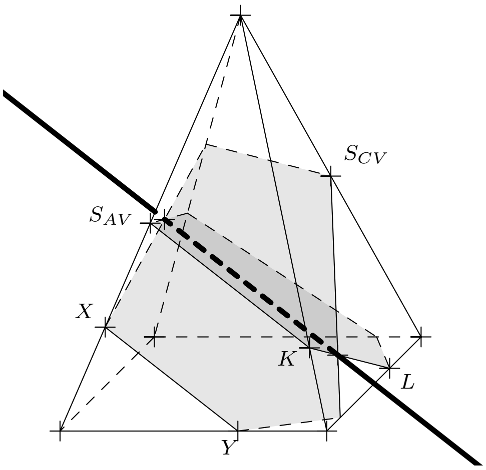
9.13



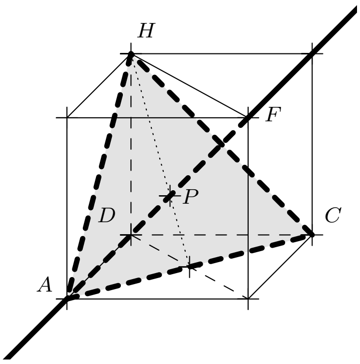
9.14 a) b) c)

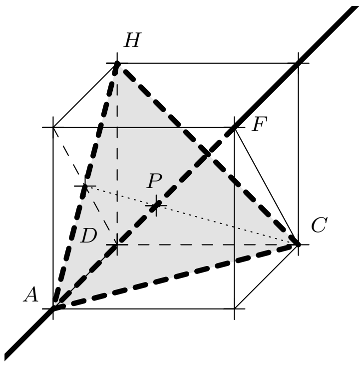


9.15

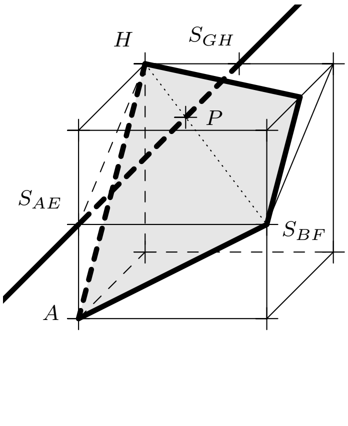


9.16

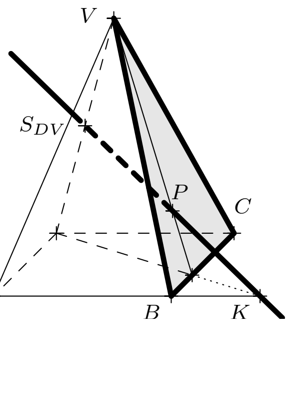




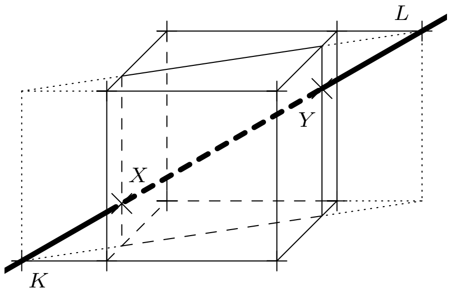
9.17



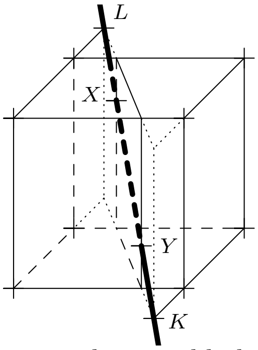
9.18



9.19 a)



b)

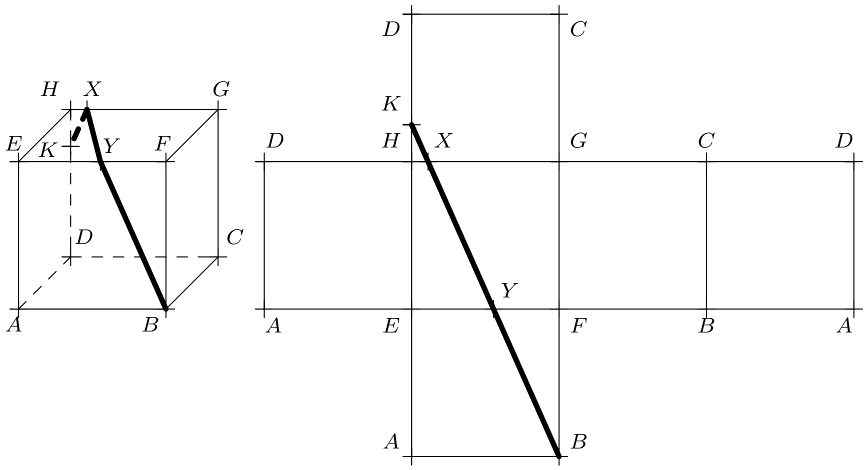


9.20 a) Sestrojte rovnoramenný trojúhelník $CS_{AB}S_{BF}$, jehož základna $S_{AB}S_{BF}$ je ve standardním průmětu krychle ve skutečné velikosti a skutečná velikost ramene je např. velikostí úsečky AS_{BF}.

b) Sestrojte pravidelný šestiúhelník, jehož skutečná velikost strany je např. velikostí úsečky $S_{AE}S_{AB}$.

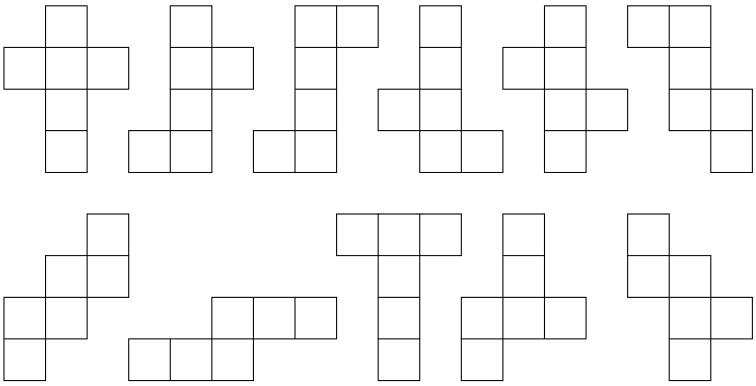
c) Sestrojte nejprve ve skutečné velikosti rovnoramenný trojúhelník AHX, kde X je průsečík přímek HS_{FG} a AS_{BF} (skutečná velikost ramene je dvojnásobkem velikosti úsečky AS_{BF}). Výsledný lichoběžník dostaneme z tohoto trojúhelníku sestrojením střední příčky rovnoběžné se základnou.

9.22 K řešení využijeme síť krychle, ve které se hledaná lomená čára zobrazí jako úsečka spojující body K a B (viz obrázek 7). Tato úsečka protíná hrany GH a EF v bodech X a Y, které následně přeneseme do průmětu – využijeme přitom skutečnosti, že vzdálenosti na hranách GH a EF se promítají ve skutečné velikosti, a tak můžeme přímo přenést např. úsečky GX a EY.



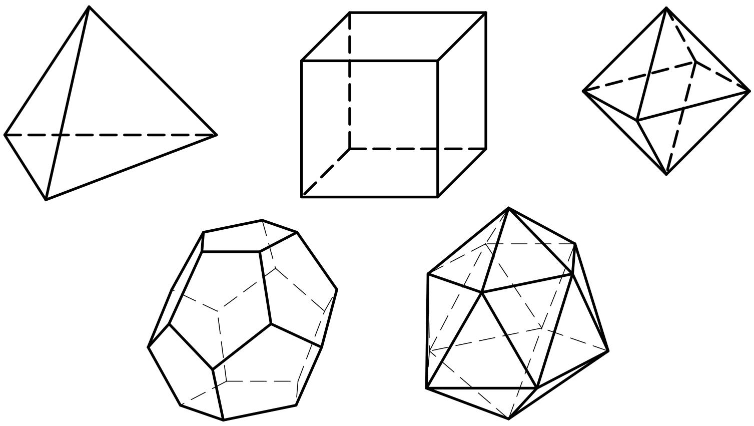
Obrázek 7: Řešení úlohy 9.22

9.23 Existuje celkem 11 sítí krychle (viz obrázek 8).



Obrázek 8: Jedenáct různých sítí krychle

9.24 Na obrázku 5 jsou sítě pravidelného čtyřstěnu, osmistěnu a dvanáctistěnu. Tato tři tělesa řadíme do skupiny tzv. *platónských těles* (viz obrázek 9), kam ještě zařazujeme krychli a pravidelný dvacetistěn.



Obrázek 9: Platónská tělesa

Seznam převzatých obrázků

- obrázek 1: Smithsonian Libraries. *The Elements of Euclid*. Dostupné online na `https://library.si.edu/sites/default/files/media/adoptable_books/adopt-euclid1685-2.jpg`. Cit. 14. 6. 2023.
- dopravní značky, cvičení 5.3 a 7.30: Dostupné online na `https://www.bezpecnecesty.cz/cz/autoskola/dopravni-znacky`. Cit. 5. 9. 2023.
- gotická kružba, cvičení 6.24: LEMeZza. Dostupné online na `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Reuleaux_triangles_on_a_window_of_Onze-Lieve-Vrouwekerk,_Bruges_2.jpg`. Cit. 15. 7. 2023.

Literatura

[1] FRANCOVÁ, Marta, LVOVSKÁ, Leni. *Texty k základům elementární geometrie pro studium učitelství 1. stupně základní školy.* Masarykova univerzita, Brno, 2014.

[2] FRANCOVÁ, Marta, MATOUŠKOVÁ, Květoslava, VAŇUROVÁ, Milena. *Texty k základům elementární geometrie pro studium učitelství 1. stupně základní školy.* UJEP, Brno, 1985.

[3] FRANCOVÁ, Marta, MATOUŠKOVÁ, Květoslava, VAŇUROVÁ, Milena. *Sbírka úloh z elementární geometrie.* Masarykova univerzita, Brno, 1996.

[4] HRUBÝ Dag, CHODOROVÁ Marie. *Sbírka úloh STEREOMETRIE.* Cit. 8. 8. 2023. Dostupné online na `https://kag.upol.cz/data/upload/17/sbirka_uloh_stereometrie_140916(1).pdf`.

[5] MORAVCOVÁ Vlasta, HROMADOVÁ Jana. *Sbírka úloh k základům planimetrie pro učitelské studium.* MatfyzPress, Praha, 2023.

[6] POMYKALOVÁ Eva. *Matematika pro gymnázia. Planimetrie.* Prometheus, Praha, 2008. 5. vydání.

[7] POMYKALOVÁ Eva. *Matematika pro gymnázia. Stereometrie.* Prometheus, Praha, 2008. 4. vydání.

[8] VOPĚNKA, Petr. *Rozpravy s geometrií.* Academia, Praha, 1989.

[9] FU TRAING Wang, CHUAN-CHIH Hsiung. *A Theorem on the Tangram.* The American Mathematical Monthly, **49** (9): str. 596–599. DOI: 10.1080/00029890.1942.11991289

[10] POINCARÉ Henri. *Analysis situs.* Journal de l'École Polytechnique **1** (1895): str. 1–121.