

# MA0004 Matematická analýza 1, 3. seminář

5. 3. 2024

- 1 Limita funkce jedné proměnné
- 2 Spojitost funkce jedné proměnné
  - Body nespojitosti

## Literatura a použité zdroje

- Došlá, Z., Kuben, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. MU: Brno, 2004.
- Horváth, P. *Materiály k výuce Matematika 1*. Dostupné zde: [https://jointlab.upol.cz/~horvath/matematika1\\_ftk/](https://jointlab.upol.cz/~horvath/matematika1_ftk/)
- Zemánek, P., Hasil, P. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*. Brno, 2012. Dostupné z: <https://is.muni.cz/elportal/?id=980552>

## Limita funkce

**Definice:** Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  limitu rovnou číslu  $L \in \mathbb{R}^*$ , tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

když ke každému okolí  $O(L)$  bodu  $L$  existuje okolí  $O(x_0)$  takové, že pro všechna  $x \in O(x_0) \setminus \{x_0\}$  platí  $f(x) \in O(L)$ .

Rozlišujeme tyto čtyři případy dle  $x_0, L$ :

$x_0, L$ vlastní	vlastní limita ve vlastním bodě
$x_0$ nevlastní, $L$ vlastní	vlastní limita v nevlastním bodě
$x_0$ vlastní, $L$ nevlastní	nevlastní limita ve vlastním bodě
$x_0, L$ nevlastní	nevlastní limita v nevlastním bodě

**Animace limity:** viz <https://www.geogebra.org/m/ymptkVU3>

**Příklad 1:** Zkuste pomocí vhodných počítačových aplikací, na základě vlastního úsudku či po poradě s kamarády, přijít na to, jakého typu jsou následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x+1} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+4x+3}{x^3+1} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2+5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3}{x^2+4} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x$$

**Věta:** Necht' existuje okolí  $O(x_0)$  takové, že pro všechna  $x \in O(x_0) \setminus \{x_0\}$  platí rovnost  $f(x) = g(x)$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A,$$

kde  $A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ .

## Limita zprava a zleva

**Definice:** Funkce  $f(x)$  má v  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  **limitu zprava** rovnou  $L \in \mathbb{R}^*$ , tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L,$$

když ke každému okolí  $O(L)$  bodu  $L$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro všechna  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  platí  $f(x) \in O(L)$ . Podobně pro limitu zleva  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .

### Vybrané důležité věty:

- 1 Funkce  $f$  má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu, přičemž  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .
- 2 Jestliže platí  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  a pro funkci  $g$  existuje okolí  $O(x_0)$  bodu  $x_0$ , v němž je  $g$  ohraničená, pak  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$ .
- 3 Početní operace s limitami...

## Spojítost funkce v bodě

**Definice:** Funkce  $f(x)$  je v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  spojitá, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Podobně pro spojitost zleva, či zprava.

**Věta o složené funkci:** Nechť  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$  a funkce  $g$  je spojitá v bodě  $\alpha$ . Pak platí, že

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) = g(\alpha).$$

**Příklad 2:** Spočítejte následující limity

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{\frac{6x+1}{2x-3}}$

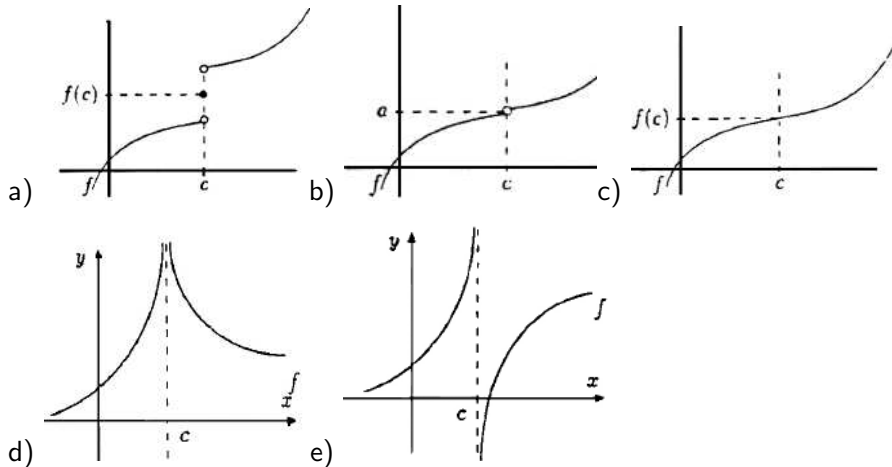
b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$

Předpokládejme, že funkce  $f(x)$  není v bodě  $x_0$  spojitá.

- $x_0$  je bod **odstranitelné nespojitosti**, když existuje vlastní  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , ale nerovná se  $f(x_0)$ .
- $x_0$  je bod **nespojivosti 1. druhu**, když existují vlastní jednostranné limity  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = b$ , avšak  $a \neq b$ .
- $x_0$  je bod **nespojivosti 2. druhu**, když alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje nebo je nevlastní.

# Druhy nespojitosti funkcí

**Příklad 3:** Na obrázcích jsou znázorněny grafy 5 funkcí. Určete, zda jsou spojité v bodě  $c$ , pokud ne, určete, o jaký druh nespojitosti se jedná.





# Nalezení funkce splňující limitní kritéria

**Příklad 4:** Rozdělte se do skupin po 2-3 lidech. Jeden ze skupiny určí, jaké limitní omezení či podmínku na spojitost má splňovat neznámá funkce  $f(x)$ . Zbývající členové skupiny se snaží najít vhodný příklad funkce  $f(x)$  vyhovující kritériím kamaráda(ky). Následně si role vymění.

Příklady omezení či podmínek:

- (a) Najdi funkci  $f(x)$  takovou, která má v bodě  $x = 3$  limitu rovnou 5.
- (b) Najdi funkci  $f(x)$  takovou, která má v bodě  $x = 3$  limitu rovnou 5, ale není v něm ( $x = 3$ ) spojitá.
- (c) Najdi funkci  $f(x)$  takovou, která má v bodě  $x = 0$  limitu rovnou  $-\infty$ .

**Poznámka:** Tyto příklady slouží pouze pro inspiraci. Vymýšlejte svá vlastní limitní omezení či podmínky na spojitost.

**Příklad 5:** Pomocí jednoduchých úprav spočítejte následující limity:

(a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$  [víme, že  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ]

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - x^2 + x + 2)$

(f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{x^2 + x - 2}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x})$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3 - x^2}$

# Výsledky příkladu 5

- (a)  $\frac{2}{3}$
- (b)  $-\frac{1}{56}$
- (c)  $\frac{2}{3}$
- (d) 8
- (e)  $-\infty$
- (f)  $\infty$
- (g) 2
- (h) 0
- (i) neexistuje
- (j)  $-\infty$