MA0004 Matematická analýza 1, 6. seminář

26. 3. 2024

Náplň cvičení

Literatura a použité zdroje

- Zemánek, P., Hasil, P. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I.* Brno, 2012. Dostupné z: `https://is.muni.cz/elportal/?id=980552`
- Ústav matematiky, FSI VUT Brno. *MATEMATIKA online – Matematika I.* Dostupné z: `http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-I/sc-5-sr-1-a-4/default.aspx`

Monotónnost a lokální extrémy

Příklad 1: Určete intervaly monotonie a lokální extrémy pro následující funkce.

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}, \ D(f) = R$

b) $f(x) = \frac{x}{\ln x}, \ D(f) = R^+ - \{1\}$

c) $f(x) = x - 2 \cdot \sin x, \ D(f) = (0, \ 2\pi)$

d) $f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}, \ D(f) = R$

e) $f(x) = \sqrt[3]{\left(x^4 - 1\right)^2}$

f) $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$

Monotónnost a lokální extrémy – výsledky

a) na $(-\infty,\ 0)$ a $(2,\ \infty)$ rostoucí, na $(0,2)$ klesající,
$[2, 4\ln 2]$ lokální maximum, $[0,\ 0]$ lokální minimum

b) na $(0,\ e)$ klesající, na $(e,\ \infty)$ rostoucí, na $(0,2)$ klesající,
$[e, e]$ lokální minimum

c) na $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ a $\left(\frac{5\pi}{3},\ 2\pi\right)$ klesající, na $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ rostoucí,
$\left[\frac{\pi}{3}, \pi - \sqrt{3}\right]$ lokální minimum, $\left[\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}\right]$ lokální maximum

d) na $(-\infty,\ -3)$ a $(-1,\ \infty)$ klesající, na $(-3, -1)$ rostoucí,
$[-3,\ 0]$ lokální minimum, $[-1,\ 4e]$ lokální maximum

e) na $(-\infty, -1)$ a $(0, 1)$ klesající, na $(-1, 0)$ a $(1, \infty)$ rostoucí,
$[0, 1]$ lokální minimum, $[-1, 0]\,, [1, 0]$ lokální maxima

f) na $\left(\frac{9}{11}, 1\right)$ klesající, na $\left(-\infty,\ \frac{9}{11}\right)$ a $(1,\ \infty)$ rostoucí,
$[1,\ 0]$ lokální minimum, $\left[\frac{9}{11},\ \frac{3^6 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{11^{11}}}\right]$ lokální maximum

Konvexnost/konkávnost a inflexní body

Příklad 2: Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce a najděte případné inflexní body u následujících funkcí.

a) $f(x) = x^3 - 12x,\ f'(x) = 3x^2 - 12,\ D(f) = D(f') = R$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x},\ f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x),\ D(f) = D(f') = R$

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x},\ f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} D(f) = D(f') = R^+ - \{1\}$

d) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(1 - x^2\right),\quad D(f) = D(f') = R$

e) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3,\ D(f) = R$

f) $f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x},\ f'(x) = \frac{x^2+4x+3}{e^x},\ D(f) = D(f') = R$

Konvexnost/konkávnost a inflexní body – výsledky

a) na $(-\infty,\ 0)$ konkávní, na $(0,\infty)$ konvexní, $[0,\ 0]$ inflexní bod

b) na $\left(-\infty, 2-\sqrt{2}\right)$ a $\left(2+\sqrt{2},\ \infty\right)$ konvexní, na $\left(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)$ konkávní, $\left[2-\sqrt{2}, \left(6-4\sqrt{2}\right) e^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]$, $\left[2+\sqrt{2}, \left(6+4\sqrt{2}\right) e^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]$ inflexní body

c) na $(0,\ 1)$ a $\left(e^2,\ \infty\right)$ konkávní, na $\left(1,\ e^2\right)$ konvexní, $\left[e^2, \frac{e^2}{2}\right]$ inflexní bod

d) na $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ a $\left(0,\ \sqrt{3}\right)$ konkávní, na $\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$ a $\left(\sqrt{3},\ \infty\right)$ konvexní, $[0,\ 0]$, $\left[-\sqrt{3},\ e^{-\frac{3}{2}}\right]$, $\left[\sqrt{3},\ e^{-\frac{3}{2}}\right]$ inflexní body

e) na $(-\infty,\ -1)$ a $(2,\ \infty)$ konvexní, na $(-1,\ 2)$ konkávní, $[-1,\ -19]$, $[2,\ -37]$ inflexní body

f) na $\left(-\infty,\ -1-\sqrt{2}\right)$ a $\left(-1+\sqrt{2},\ \infty\right)$ konvexní, na $\left(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right)$ konkávní, $\left[-1-\sqrt{2}, \frac{6-4\sqrt{2}}{e^{-1-\sqrt{2}}}\right]$, $\left[-1+\sqrt{2},\ \frac{6+4\sqrt{2}}{e^{-1+\sqrt{2}}}\right]$ inflexní body

Příklad 3: Určete asymptoty bez směrnice u následujících funkcí:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = 5x + \frac{\sin x}{x}$

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Příklad 4: Určete asymptoty se směrnicí (tj. v nevlastních bodech $\pm\infty$) u následujících funkcí:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x-1},\ D(f) = R - \{1\}$

b) $f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2},\ D(f) = R - \{\pm 2\}$

c) $f(x) = \frac{e^x}{x+1},\ D(f) = R - \{-1\}$

Asymptoty

Příklad 3: Určete asymptoty bez směrnice u následujících funkcí:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = 5x + \frac{\sin x}{x}$

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Příklad 4: Určete asymptoty se směrnicí (tj. v nevlastních bodech $\pm\infty$) u následujících funkcí:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$, $D(f) = R - \{1\}$

b) $f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2}$, $D(f) = R - \{\pm 2\}$

c) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $D(f) = R - \{-1\}$

Výsledky:

3. a) $x = 0$, b) neexistuje, c) $x = 1$

4. a) $y = 3x + 3$, b) $y = -x$, c) $y = 0$

Celkový postup vyšetřování průběhu funkce

- Definiční obor
- Lichost, sudost, periodičnost
- Charakteristika bodů nespojitosti (výpočet jednostranných limit)
- Řešení rovnice $f(x) = 0$ (intervaly, kdy je funkce nad osou x či pod osou x)
- Řešení rovnice $f'(x) = 0$ (intervaly monotónnosti, lokální extrémy)
- Řešení rovnice $f''(x) = 0$ (intervaly konvexnosti/konkávnosti, inflexní body)
- Asymptoty

Průběh funkce – příklady

Příklad 5: U funkce $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ byl vyšetřen její průběh. Načrtněte graf funkce dle dostupných informací (viz soubor `Příklad 266 - vzorový.docx` ve Studijních materiálech, ve složce Semináře).

Příklad 6: Vyšetřete průběh následujících funkcí a načtrtněte jejich graf, je-li dána jejich první i druhá derivace.

a) $f(x) = \frac{x}{3-x^2}, \ f'(x) = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}, \ f''(x) = \frac{2x\left(9+x^2\right)}{(3-x^2)^3}$

b) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), \ f'(x) = \frac{x^2-1}{2x^2}, \ f''(x) = \frac{1}{x^3}$

c) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}, \ f'(x) = \frac{2-\ln x^2}{x^2}, \ f''(x) = \frac{2\ln x^2-6}{x^3}$

Příklad 7: Vyšetřete průběh následujících funkcí a načrtněte jejich graf.

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$

c) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$