

# MA0004 Matematická analýza 1, 7. seminář

2. 4. 2024

## 1 Přibližné vyjádření funkce

- Diferenciál
- Taylorův polynom

## Literatura a použité zdroje

- Zemánek, P., Hasil, P. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*. Brno, 2012. Dostupné z:  
<https://is.muni.cz/elportal/?id=980552>
- Ústav matematiky, FSI VUT Brno. *MATEMATIKA online – Matematika I*. Dostupné z:  
<http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-I/sc-5-sr-1-a-4/default.aspx>

## Diferenciál

**Věta 26:** Funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  diferenciál (je diferencovatelná v  $x_0$ ) právě tehdy, když existuje vlastní derivace  $f'(x_0)$ . Přitom platí

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

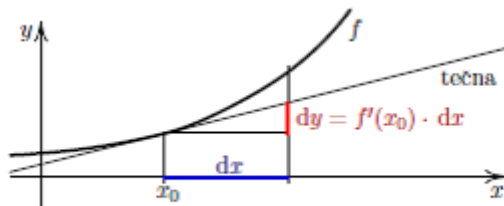
Píšeme též  $df(x) = f'(x)dx$ . Pro dostatečně malé  $h$  platí:

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ pro } x \rightarrow x_0.$$

### Poznámka:

- Proměnnou  $h = dx = x - x_0$  nazýváme přírůstek proměnné  $x$ .
- Diferenciál funkce  $f$  v bodě  $x_0$  zapisujeme výrazem  $df(x_0)(h)$ .
- Pomocí diferenciálu lze aproximovat hodnotu funkce  $f(x)$  v bodě  $x$  blízkém bodu  $x_0$ , pro který snadno spočítáme funkční hodnotu  $f(x_0)$  i hodnotu 1. derivace  $f'(x_0)$ . Čím větší hodnotu má přírůstek  $h = dx = x - x_0$ , tím méně přesná bude aproximace.

# Geometrický význam diferenciálu



Obr. 6.7: Diferenciál je přírůstek funkce na tečně.

- Modrá úsečka je přírůstek  $dx = x - x_0$  proměnné  $x$ .
- Červená úsečka  $dy$  je “přírůstek na tečně”  $t$  k funkci  $f$  v bodě  $x_0$ , tj. o kolik větší/menší je hodnota  $t(x)$  v porovnání s  $t(x_0) = f(x_0)$ .
- Obě úsečky svírají pravý úhel v pravoúhlém trojúhelníku. Úhel  $\alpha$  naproti červené úsečce je stejný jako úhel, který tečna svírá s osou  $x$ . Tangens úhlu  $\alpha$  je směrnicí tečny  $t$ . Platí pro něj  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$ .
- Pro  $dy$  platí:  $dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot dx = f'(x_0) \cdot dx$  (rovnice pro diferenciál). Délka červené úsečky vyjadřuje diferenciál funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .

**Příklad 1:** Pomocí diferenciálu určité přibližnou hodnotu následujících výrazů.

a)  $\sin 29^\circ$

b)  $\sqrt{80}$

c)  $\log 11$

d)  $\operatorname{arctg} 1,1$

e)  $\sqrt[3]{70}$

f)  $\cos 151^\circ$

g)  $2^{1,003}$

h)  $\ln 1,1$

**Příklad 1:** Pomocí diferenciálu určité přibližnou hodnotu následujících výrazů.

a)  $\sin 29^\circ$

b)  $\sqrt{80}$

c)  $\log 11$

d)  $\operatorname{arctg} 1, 1$

e)  $\sqrt[3]{70}$

f)  $\cos 151^\circ$

g)  $2^{1,003}$

h)  $\ln 1, 1$

**Výsledky:** a) 0,484885; b) 8,9445; c) 1,0434294; d) 0,83539; e) 4,125;  
f)  $-0,874752$ ; g) 2,004; h) 0,1

## Taylorova věta

**Věta 27:** Necht' má funkce  $f$  v okolí bodu  $x_0$  vlastní derivace až do řádu  $n + 1$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Pak pro všechna  $x$  z tohoto okolí platí tzv. Taylorův vzorec:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

kde chyba  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$  se nazývá zbytek a  $\xi$  je vhodné číslo ležící mezi  $x_0$  a  $x$ .

### Poznámka:

- Pokud v Taylorově vzorci vynecháme zbytek, obdržíme tzv. *Taylorův polynom*.
- Pokud v Taylorově větě položíme  $x_0 = 0$ , získáme tzv. *Maclaurinův vzorec*, resp. tzv. *Maclaurinův polynom*.

# Taylorův polynom – příklady

**Příklad 2:** Napište Taylorův (či Maclaurinův) polynom 3. řádu v bodě  $x_0$  pro funkci  $f(x)$ .

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = 1$

b)  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 1$

c)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$

d)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = 0$

e)  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $x_0 = 0$

f)  $f(x) = e^x \cdot \sin x$ ,  $x_0 = 0$



# Taylorův polynom – příklady

**Příklad 2:** Napište Taylorův (či Maclaurinův) polynom 3. řádu v bodě  $x_0$  pro funkci  $f(x)$ .

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = 1$

b)  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 1$

c)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$

d)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = 0$

e)  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $x_0 = 0$

f)  $f(x) = e^x \cdot \sin x$ ,  $x_0 = 0$

**Výsledky:**

a)  $1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3$

b)  $e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2 + \frac{e}{6}(x - 1)^3$

c)  $x - \frac{x^3}{3!}$

d)  $1 - \frac{x^2}{2!}$

e)  $1 - \frac{x^2}{2}$

f)  $x + x^2 + \frac{x^3}{3}$

**Příklad 3:** Přibližně vyjádřete hodnotu následujících výrazů pomocí diferenciálu a Taylorova polynomu 3. řádu, přičemž bod  $x_0$  vhodně zvolte tak, aby byl výsledek aproximace co nejpřesnější a zároveň jste nemuseli(y) využít kalkulačku:

- a)  $\cos 62^\circ$
- b)  $\sin 44^\circ$
- c)  $\sqrt[3]{8,02}$
- d)  $e^{1,05}$