

# MA0004 Matematická analýza 1, 9. seminář

23. 4. 2024

## 1 Parciální derivace funkce dvou proměnných

### Literatura a použité zdroje

- Kuben J. a kol. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z:  
[home1.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13\\_14/materialy/Diferencialni\\_pocet\\_vice\\_promennych.pdf](http://home1.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13_14/materialy/Diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf)
- Došlá Z., Došlý O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2. vydání, 1999. ISBN 80-210-2052-0. Dostupné z:  
<http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/protisk.pdf>
- Klaška J. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně. 2009. Dostupné z:  
[http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id\\_file=1021](http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021)

# Parciální derivace 1. řádu funkce dvou proměnných

## Parciální derivace 1. řádu funkce dvou proměnných

**Definice:** Necht' funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je definovaná v bodě  $[x_0; y_0]$  a nějakém jeho okolí. Položme  $\varphi(x) = f(x, y_0)$ . Má-li funkce  $\varphi$  derivaci v bodě  $x_0$ , nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce  $f$  podle proměnné  $x$  v bodě  $[x_0; y_0]$  a označujeme  $f_x(x_0, y_0)$ , event.  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $f'_x(x_0, y_0)$ . To znamená, že

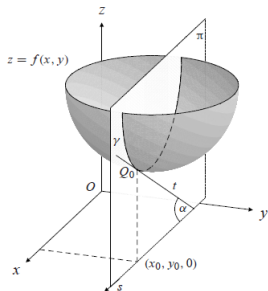
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Podobně, má-li funkce  $\psi(y) = f(x_0, y)$  derivaci v bodě  $y_0$ , nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce  $f$  podle proměnné  $y$  v bodě  $[x_0; y_0]$  a označujeme  $f_y(x_0, y_0)$ , event.  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ,  $f'_y(x_0, y_0)$ .

Při parciální derivaci podle proměnné  $x$  bereme proměnnou  $y$  jako konstantu a takto s ní nakládáme při derivaci. Stejně naopak, derivujeme-li podle proměnné  $y$ .

# Geometrický význam parciální derivace 1. řádu

Nechť je dána funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a  $G_f$  je její graf. Nechť  $\pi$  je rovina daná rovnicí  $y = y_0$ . Za rozumných předpokladů (např. spojitost funkce  $f$ ) je průsečíkem  $G_f \cap \pi$  křivka  $\gamma$  v rovině  $\pi$  a parciální derivace  $f_x(x_0; y_0)$  udává směrnici tečny  $t$  k této křivce v bodě  $Q_0 = [x_0; y_0; f(x_0; y_0)]$ , viz obrázek.



Podobně, derivace  $f_y(x_0; y_0)$  udává směrnici tečny ke křivce v bodě  $Q_0$ , která vznikne průsečíkem plochy  $G_f$  s rovinou  $x = x_0$ . Animace v Geogebra zde: <https://www.geogebra.org/3d/tmz6bnnb>

# Příklady na parciální derivace 1. řádu

**Příklad 1:** Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

a)  $z = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4x - 5y + 100$

b)  $z = \frac{x}{y}$

c)  $z = (x^2y + y)^4$

d)  $z = x^y$

e)  $z = x \cdot \ln(x^2 - y^2)$

f)  $z = \sqrt{x + \sin xy}$

**Příklad 2:** Spočtěte parciální derivace 1. řádu funkce v bodě A:

a)  $f(x, y) = y^2 + y \cdot \sqrt{1 + x^2}$ ,  $A = [2, 5]$

b)  $f(x, y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ ,  $A = [1, 2]$

c)  $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ ,  $A = [0, 1]$

## Příklad 1:

- a)  $z_x = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 4$ ,  $z_y = 2x^2 + 6xy - 5$ ,
- b)  $z_x = \frac{1}{y}$ ,  $z_y = -\frac{x}{y^2}$ ,  $y \neq 0$
- c)  $z_x = 8xy^4(x^2 + 1)^3$ ,  $z_y = 4y^3(x^2 + 1)^4$
- d)  $z_x = yx^{y-1}$ ,  $z_y = x^y \ln x$ ,  $x > 0$
- e)  $z_x = \ln(x^2 - y^2) + \frac{2x^2}{x^2 - y^2}$ ,  $z_y = -\frac{2xy}{x^2 - y^2}$ ,  $x^2 - y^2 > 0$
- f)  $z_x = \frac{1 + y \cdot \cos xy}{2\sqrt{x + \sin xy}}$ ,  $z_y = \frac{x \cdot \cos xy}{2\sqrt{x + \sin xy}}$ ,  $x + \sin xy > 0$

## Příklad 2:

- a)  $f_x(2, 5) = 2\sqrt{5}$ ,  $f_y(2, 5) = 10 + \sqrt{5}$
- b)  $f_x(1, 2) = 0$ ,  $f_y(1, 2) = \frac{1}{4}$
- c)  $f_x(0, 1) = 1$ ,  $f_y(0, 1) = 0$

## Parciální derivace 2. řádu funkce dvou proměnných

Parciální derivace 1. řádu  $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$  mohou mít v bodech svého definičního oboru opět parciální derivace podle  $x$  nebo  $y$ , které nazýváme *parciální derivace 2. řádu funkce  $f$* :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f''_{xx} \dots \text{druhá parciální derivace } f \text{ podle } x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f''_{yy} \dots \text{druhá parciální derivace } f \text{ podle } y,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = f''_{xy} \dots \text{druhá parciální derivace } f \text{ podle } x \text{ a } y,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = f''_{yx} \dots \text{druhá parciální derivace } f \text{ podle } y \text{ a } x.$$

**Schwarzova věta:** Necht' funkce  $f$  má spojité parciální derivace  $f_{xy}$ ,  $f_{yx}$  v bodě  $[x_0; y_0]$ . Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

# Příklady na parciální derivace 2. řádu

**Příklad 3:** Spočtete parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

a)  $z = x^2 + xy - 3xy^3$

b)  $z = \frac{xy+x}{y}$

c)  $z = e^{2y} \cdot \sin x$



## Příklady na parciální derivace 2. řádu

**Příklad 3:** Spočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

a)  $z = x^2 + xy - 3xy^3$

b)  $z = \frac{xy+x}{y}$

c)  $z = e^{2y} \cdot \sin x$

**Výsledky:**

a)  $z_x = 2x + y - 3y^3$ ,  $z_y = x - 9xy^2$ ,  $z_{xx} = 2$ ,  $z_{yy} = -18xy$ ,  
 $z_{xy} = z_{yx} = 1 - 9y^2$

b)  $z_x = \frac{y+1}{y}$ ,  $z_y = -\frac{x}{y^2}$ ,  $z_{xx} = 0$ ,  $z_{yy} = \frac{2x}{y^3}$ ,  $z_{xy} = z_{yx} = -\frac{1}{y^2}$

c)  $z_x = e^{2y} \cos x$ ,  $z_y = 2e^{2y} \sin x$ ,  $z_{xx} = -e^{2y} \sin x$ ,  
 $z_{yy} = 4e^{2y} \sin x$ ,  $z_{xy} = z_{yx} = 2e^{2y} \cos x$