Matematická analýza 1
2023/2024 L

Předmluva

Obsahem textu jsou poznámky pro přednášky z kurzu Matematická analýza 1 2023/2024 L. Hlavní probíraná témata jsou okruhy pro závěrečnou zkoušku:

1. Číselné posloupnosti a jejich vlastnosti. Limita posloupnosti, hromadný bod, limita superior a inferior.
2. Limita funkce jedné proměnné ve vlastním a nevlastním bodě. Spojitost funkce.
3. Derivace funkce jedné proměnné: definice, geometrická a fyzikální interpretace. Pravidla výpočtu derivace. Derivace vyšších řádů.
4. L'Hôpitalovo pravidlo a jeho využití. Významné limity.
5. Diferenciál funkce jedné proměnné a jeho využití pro přibližné vyjádření hodnoty funkce. Rovnice tečny.
6. Vyšetřování průběhu funkce jedné proměnné: definiční obor, spojitost, monotonie, extrémy, konvexnost, konkávnost, inflexní body, asymptoty. Příklady aplikace.
7. Limita funkce dvou proměnných ve vlastním bodě: definice, vlastnosti. Spojitost funkce dvou proměnných.
8. Parciální derivace funkce dvou proměnných, jejich výpočet a geometrická interpretace. Gradient, vrstevnice.
9. Diferenciál funkce dvou proměnných a jeho využití pro přibližné vyjádření hodnoty funkce. Tečná rovina.
10. Lokální extrémy funkcí dvou proměnných. Nutná podmínka existence lokálního extrému; stacionární body. Hessova matice. Postačující podmínka existence lokálního extrému.

Řada úvah, vysvětlení (a občas i důkazů), jež jsou nad rámec kurzu, se uvádí pro lepší pochopení látky.

Poznámky a připomínky: `ronto@ped.muni.cz`

17. července 2024

Obsah

§ 1

Základní pojmy

§ 1.1. Opakování

Číselné obory, elementární funkce a jejich vlastnosti. Směrnice přímky. Funkce prosté. Vektory v rovině a v prostoru. Skalární součin.

§ 1.2. Základní konstrukce pro množiny reálných čísel a vektorů

§ 1.2.1. Vzdálenost bodů, okolí

Velikost vektoru $v = (x, y)$ je $|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Pythagorova věta). Jsou-li $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ vektory v rovině, velikost jejich rozdílu $v_2 - v_1 = (x_2 - x_2, y_2 - y_1)$ je

$$|v_2 - v_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.1}$$

Hodnota (1.1) udává rovněž *vzdálenost* bodů se souřadnicemi (x_1, y_1), (x_2, y_2).

DEFINICE 1.1. Je-li r kladné číslo, *r-okolím* bodu (x_0, y_0) nazýváme množinu všech bodů (x, y), jejichž vzdálenost k (x_0, y_0) je menši než r:

$$\{(x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}.$$

Číslo r nazýváme *poloměrem* tohoto okolí. Nene-li velikost poloměru podstatná, mluvíme jednoduše o *okolí* daného bodu. Vyloučíme-li z okolí bodu (x_0, y_0) samotný bod (x_0, y_0), obdržíme okolí *ryzí*.[1]

Obdobně pro okolí bodů v prostoru. V případe reálné osy $\mathbb{R}$ je r-okolím bodu x_0 interval $(x_0 - r, x_0 + r)$, což znamená, že pro x z r-okolí plati $|x - x_0| < r$. V $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ okolí geometricky znamená kruh (resp. kouli) bez hranice (§ 1.2.2).

§ 1.2.2. Hranice množiny, množiny otevřené a uzavřené

Buď M neprázdná množina na reálné ose, v rovině či v prostoru.

DEFINICE 1.2. Bod množiny M se nazývá *vnitřním*, jestliže spolu s tímto bodem v M leží i nějaké jeho okolí. *Vnitřkem* množiny M je množina všech její vnitřních bodů.

DEFINICE 1.3. Množina M je *otevřená*, jestliže spolu s každým jejím bodem v M leží i nějaké jeho okolí. Množina M je *uzavřená*, jestliže její doplněk je množinou otevřenou.

Okolí je množinou otevřenou. Prázdná množina je dle definice zároveň otevřenou a uzavřenou.

[1] Jinak se občas říká „prstencové".

DEFINICE 1.4. *Hraničním bodem* množiny M nazýváme bod, v jehož libovolně malém okolí je alespoň jeden bod z M a rovněž alespoň jeden bod mimo M. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme *hranicí* této množiny a značíme ∂M.

Intuitivně vzato, hranicí množiny je množina představující jisté pomezí mezi množinou a jejím doplňkem. Vnitřek množiny pak tvoří všechny její body nacházející v kladné vzdálenosti od hranice. Hranicí rovinného útvaru je určitá křivka, hranicí prostorového útvaru pak bude jeho povrch.

ÚVAHA 1.5. Přidáme-li k množině její hranici, obdržíme množinu uzavřenou (je to *uzávěr* množiny). Odstraníme-li z množiny její hranici, obdržíme její vnitřek. Obsahuje-li množina svoji hranici, pak je uzavřená. Obsahuje-li pouze část své hranice, pak není otevřená ani uzavřená. Neobsahuje-li žádný bod své hranice, pak je otevřená.

DEFINICE 1.6. Bod množiny M se nazývá *izolovaným* bodem, jestliže v nějakém jeho okolí nejsou žádné další body této množiny.

Je zřejmé, že izolovaný bod množiny nemůže být vnitřním, poněvadž leží v kladné vzdálenosti od všech ostatních jejich bodů. Praktické zkušenosti s množinami na reálné ose a v rovině nasvědčují, že hranici množiny tvoří body, k nimž se body množiny „zhušťují“ (tzv. *limitní* body), a body izolované.

DEFINICE 1.7. Říkáme, že bod c je *limitním bodem* pro množinu M, jestliže v každém okolí bodu c je nějaký bod množiny M odlišný od c.

Dovětek „odlišný od c“ vylučuje možnost, když je c bodem izolovaným. Limitní bod množiny M může ležet jak v množině M, tak i mimo tuto množinu.

ÚVAHA 1.8. Hranice množiny se skládá ze všech jejich limitních a izolovaných bodů.

PŘÍKLAD 1.9.
(1) Omezený otevřený interval $M = (a, b)$ je otevřenou množinou. Její hranicí je dvouprvková množina $\{a, b\}$ a uzávěrem je uzavřený interval $[a, b]$.
(2) Intervaly $[a, b)$ a $(a, b]$ nejsou otevřené ani uzavřené, mají však stejné vnitřek a hranici jako otevřený interval (a, b).
(3) Kruh s hranicí $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ je množinou uzavřenou s hranicí $\partial M = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$ a vnitřkem $M \setminus \partial M = \{(x, y) : x^2 + y^2 < r^2\}$.
(4) Jednoprvková množina $M = \{a\}$ má vnitřek prázdný a je $\partial M = M$.
(5) Pro $M = (0, 1) \cup \{2\}$ hranicí je $\partial M = \{0, 1, 2\}$, čísla 0, 1 jsou limitní body a 2 je bod izolovaný.
(6) Množina přirozených čísel $M = \mathbb{N}$ nemá žádné vnitřní body a je $\partial M = M$.
(7) Hranicí množiny $M = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ je $\partial M = M \cup \{0\}$, vnitřní body v M nejsou.

Vysvětlení. 1. Pro libovolné $c \in (a, b)$ lze vždy najít r-okolí bodu c tak, aby celé toto okolí leželo uvnitř (a, b) (stačí vzít $r = \min\{c - a, b - c\}$; jelikož c není krajním bodem (a, b), bude $r < b - a$). Všechny body intervalu (a, b) tedy jsou vnitřní.

Limitními body jsou krajní body intervalu a, b (k bodu a se lze libovolně přiblížit body $x > a$, obdobně pro b). Izolované body nejsou, neboť všechny body jsou vnitřní.

2. Množiny $[a, b)$ a $(a, b]$ se utvoří z otevřené množiny (a, b) přidáním jednoho z limitních bodů.

3. Hranici tvoří body kružnice o poloměru r se středem v $(0, 0)$, vnitřkem M je r-okolí bodu $(0, 0)$.

4. Množina $\{a\}$ neobsahuje žádné okolí.

5. Body 0, 1 jsou limitní podle 1. Izolovaný bod $2 \in M$ není vnitřním a tudíž patři hranici.

6. Všechny body množiny $\mathbb{N}$ jsou izolované. Limitní body nejsou (kdyby takový bod existoval, znamenalo by to, že v jeho libovolně malém okolí se nachází další přirozené číslo, avšak nejmenší možná vzdálenost mezi dvěma přirozenými čísly je 1).

7. Všechny body M jsou izolované. Dokažme to sporem. Vskutku, je-li $\frac{1}{n_0}$ limitním bodem M, pak pro libovolně malé kladné ε v ε-okolí čísla $\frac{1}{n_0}$ se najde další bod množiny M, to jest k tomuto ε existuje N_ε takové, že je vzdálenost $\frac{1}{N_\varepsilon}$ a $\frac{1}{n_0}$ menší než ε:

$$-\varepsilon < \frac{1}{n_0} - \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Toto však znamená, že při zmenšení hodnoty ε se přirozené číslo N_ε neustále blíží k n_0. Jelikož vzdálenost mezi dvěma sousedními přirozenými čísly je 1, pro jisté malé kladné ε_0 musí být $N_{\varepsilon_0} = n_0$ a tudíž i $\frac{1}{N_{\varepsilon_0}} = \frac{1}{n_0}$. V ε_0-okolí bodu $\frac{1}{n_0}$ tedy nejsou žádné jiné body množiny M.

Číslo 0, jež množině M nepatří, je pro M limitním bodem, neboť v libovolně malém okolí bodu 0 leží číslo $\frac{1}{n} \in M$, je-li n dostatečně velké. □

§ 1.2.3. Supremum a infimum

Buď M neprázdná množina reálných čišel.

DEFINICE 1.10. Číslo α je *horní (resp. dolní) závorou* množiny M, jestliže $x \le \alpha$ (resp. $x \ge \alpha$) pro každé $x \in M$.

DEFINICE 1.11. Číslo α je *supremem* (též *nejmenší horní závorou*) množiny M, jestliže je pro M horní závorou a pro každou jinou horní závoru β množiny M platí $\alpha \le \beta$.

Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset = -\infty$. Není-li M shora omezená, pak klademe $\sup M = +\infty$.

DEFINICE 1.12. Číslo α je *infimem* (též *největší dolní závorou*) množiny M, jestliže je pro M dolní závorou a pro každou jinou dolní závoru β množiny M platí $\alpha \ge \beta$.

Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset = \infty$. Není-li množina M zdola omezená, pak klademe $\inf M = -\infty$.

Nemusí platit $\sup A \in A$ ani $\inf A \in A$.

PŘÍKLAD 1.13. Platí:

(1) pro $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ je $\sup A = 1 \in A$, $\inf A = 0 \notin A$;
(2) pro $B = (0, 1]$, $C = (0, 1)$ je $\sup B = 1 \in B$, $\inf B = 0 \notin B$ a $\sup C = 1 \notin B$, $\inf C = 0 \notin C$.

Vysvětlení. Stačí uvažovat např. A: jelikož $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$, je supremum množiny A shodný s jejím největším prvkem 1. Nejmenší prvek v A není, hodnota infima je $0 \notin A$ (očividně $1/n > 0$ pro všechna $n \ge 1$, přičemž vetší dolní závora není: ke každému kladnému ε lze vždy najít přirozené n_ε tak, aby bylo $1/n_\varepsilon < \varepsilon$). □

Je-li A množinou spočetné mnoha bodů $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, obvykle píšeme $\sup A = \sup_{n\ge1} x_n$, $\inf A = \inf_{n\ge1} x_n$, takže $\sup\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \sup_{n\ge1} \frac{1}{n} = 1$.

§ 2

Číselné posloupnosti

§ 2.1. Definice, vlastnosti

DEFINICE 2.1. Číselnou posloupností rozumíme *nekonečnou* posloupnost po sobě v radě jdoucích čišel x_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Máme-li číselnou posloupnost x_n, $n = 1, 2, \ldots$, je přirozené si položit otázku, zda je ohraničená, rostoucí či klesající, zda má vlastní (konečnou) anebo nevlastní limitu ($\pm\infty$).

DEFINICE 2.2. Posloupnost $\{x_n : n \geq 1\}$ je *rostoucí* (resp. *neklesající*), jestliže $x_{n+1} > x_n$ (resp. $x_{n+1} \geq x_n$) pro všechna n.

Posloupnost $\{x_n : n \geq 1\}$ je *klesající* (resp. *nerostoucí*), jestliže $x_{n+1} < x_n$ (resp. $x_{n+1} \leq x_n$) pro všechna n.

Je-li posloupnost neklesající nebo nerostoucí, říkáme, že je *monotonní*. Je-li posloupnost rostoucí nebo klesající, říkáme, že je *ryze monotonní*.

PŘÍKLAD 2.3. Posloupnost $x_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, je rostoucí, $x_n = \frac{1}{n}$ je klesající, a $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ monotonní není.

Vysvětlení. První dvě tvrzení jsou zřejmá. Stačí tedy ověřit, že číselná posloupnost $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$ se společným členem $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ není rostoucí ani klesající. V tom se přesvědčíme, všimneme-li si, že liché členy $-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \ldots$ rostou a sudé členy $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ klesají, a tudíž se v posloupnosti neustále střídají sousední členy splňující opačné nerovnosti. □

Jsou-li členy posloupnosti kladná čísla, lze její růst a pokles ověřovat též podle toho, zda je podíl x_{n+1}/x_n vetší anebo menši než 1.[2]

TVRZENÍ 2.4. Posloupnost s kladnými členy $\{x_n : n \geq 1\}$ je rostoucí (neklesající), jestliže pro všechna $n \geq 1$ je $x_{n+1}/x_n > 1$ ($x_{n+1}/x_n \geq 1$). Posloupnost je klesající (nerostoucí), jestliže pro všechna $n \geq 1$ je $x_{n+1}/x_n < 1$ ($x_{n+1}/x_n \leq 1$).

ÚLOHA 2.5. Vyšetřeme monotonnost posloupnosti

$$x_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

Řešení. Ze vzorce (2.1) není jasné, jaké je znaménko rozdílu $x_{n+1} - x_n$. Použijme proto místo rozdílu sousedních členů raději jejich podíl. Jelikož po úpravě bude $x_n = \frac{e^{2n}-1}{e^{2n}+1} > 0$, je

[2]Poznamenejme, že tato úvaha je správná pouze pro kladné posloupnosti a vedla by na mylný výsledek, např. pro druhou posloupnost z příkladu 2.3.

posloupnost kladná a lze využit tvrzení 2.4. Dostaneme

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{e^{2n+2}-1}{e^{2n+2}+1}\frac{e^{2n}+1}{e^{2n}-1} = \frac{e^2e^{4n}-e^{2n}+e^2e^{2n}-1}{e^2e^{4n}+e^{2n}-e^2e^{2n}-1}$$
$$= \frac{e^2e^{4n}+\left(e^2-1\right)e^{2n}-1}{e^2e^{4n}-\left(e^2-1\right)e^{2n}-1} > \frac{e^2e^{4n}+\left(e^2-1\right)e^{2n}-1}{e^2e^{4n}+\left(e^2-1\right)e^{2n}-1} = 1$$

pro všechna $n \geq 1$. Posloupnost je tedy rostoucí. □

§ 2.2. Limita posloupnosti

Pro nekonečnou posloupnost x_n, $n = 1, 2, \ldots$, přirozenou je otázka, jak se hodnota x_n chová, roste-li n neomezeně k $+\infty$. Blíží-li se neustále k určité hodnotě, říkáme, že má limitu. Přibližování se posloupnosti k své limitě říkáme konvergence.

§ 2.2.1. Definice vlastní a nevlastní limity

DEFINICE 2.6. Číslo $L \in \mathbb{R}$ je *limitou* (též *mezní hodnotou*) posloupnosti $\{x_n : n \geq 1\}$, jestliže k libovolně malému kladnému číslu ε existuje N_ε takové, že pro všechna $n \geq N_\varepsilon$ platí nerovnost $|x_n - L| < \varepsilon$.

Zmíněné číslo značíme N_ε, neboť jeho hodnota závisí na zvolené hodnotě ε. Skutečnost, že L je limitou posloupnosti $\{x_n : n \geq 1\}$ při $n \to +\infty$, zapisujeme:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L, \tag{2.2}$$

anebo říkáme, že $x_n \to L$ při $n \to \infty$.[3] Vztah (2.2) znamená, že při $n \to +\infty$ se hodnota x_n neomezeně přibližuje k číslu L. Je-li z kontextu jasné, že $n \to +\infty$, občas píšeme: $\lim_n x_n$, anebo ještě stručněji $\lim x_n$.

PŘÍKLAD 2.7. Platí

(1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$;
(2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Vysvětlení. Absolutní hodnoty členů druhé z posloupností jsou rovny příslušným členům posloupnosti prvé, přičemž posloupnost s předpisem $x_n = \frac{1}{n}$ je $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. Stačí tedy dokázat, že $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Jako hypotézu o hodnotě limity proto vezměme $L = 0$.

Zvolíme-li libovolně malé kladné ε, je zřejmé, že $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ platí pro $n > \frac{1}{\varepsilon}$ a tudíž v definici 2.6 můžeme vzít $N_\varepsilon = \left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor + 1$, kde $\left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor$ je celá část čísla $\frac{1}{\varepsilon}$. □

Limita číselné posloupnosti je *nevlastní*, má-li hodnotu $+\infty$ nebo $-\infty$.

DEFINICE 2.8. Říkáme, že $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, jestliže k libovolně velkému A lze najít N_A tak, aby pro všechna $n \geq N_A$ platilo $x_n > A$.

Podobně, $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, jestliže k libovolně velkému A lze najít N_A tak, aby pro všechna $n \geq N_A$ platilo $x_n < -A$.

PŘÍKLAD 2.9. Pro $x_n = \frac{n^2}{n+1}$ platí $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Vysvětlení. Výraz n^2 roste rychleji než n, v limitě tedy očekáváme $+\infty$. Zvolme libovolně velké A. Nerovnost $x_n > A$ znamená, že $n^2 > A(n+1)$, což bude platit, mimo jiné, když $n^2 > A(n+n) = 2An$. Poslední nerovnost lze zapsat ve tvaru $n(n-2A) > 0$, což je splněno pro $n > N_A = 2A$. □

[3] Čte se: x_n konverguje k L při $n \to +\infty$.

Poznámka 2.10 (o zanedbání konečné mnoha členů). Vyšetřujeme-li limitu nějaké číselné posloupnosti, vždy můžeme z posloupnosti dle potřeby odstranit (anebo naopak přidat) *konečné mnoho* členů, aniž by byl výsledek tímto ovlivněn. Totéž platí pro vyšetřovaní omezenosti posloupnosti.

§ 2.2.2. Aritmetika limit

Lze snadno dokázat, že platí následující jednoduché, avšak velmi užitečné vlastnosti limit.

TVRZENÍ 2.11. Existují-li vlastní $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, pak $\lim(x_n + y_n) = a + b$, $\lim(x_n y_n) = ab$ a pro $b \neq 0$ i $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

PŘÍKLAD 2.12. Najděme limitu posloupnosti s předpisem

$$x_n = \frac{4n}{n+1}.$$

Řešení 2.12.1. Jelikož víme, že $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, bude

$$x_n = \frac{4n}{n+1} = \frac{4n \cdot \frac{1}{n}}{(n+1)\cdot\frac{1}{n}} = \frac{4}{1+\frac{1}{n}} \to 4$$

při $n \to +\infty$. Využili jsme tvrzení 2.11. □

Řešení 2.12.2. Lze očekávat, že se podíl $\frac{n}{n+1}$ blíží k 1 při n rostoucím neomezeně: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, …, a proto je přirozené vyslovit hypotézu, že limitou je číslo $L = 4$. Pak potřebujeme zajistit, aby rozdíl $|x_n - 4|$ pro dostatečně velká n byl menším libovolně stanovené tolerance. Jelikož po upravě obdržíme

$$|x_n - 4| = \left|\frac{4n}{n+1} - 4\right| = \left|\frac{4n}{n+1} - \frac{4(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{4n-4n-4}{n+1}\right| = \frac{4}{n+1},$$

při libovolně malém kladném ε bude $|x_n - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{4}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon} - 1$. Lze tedy v definici 3.5 vzít $N_\varepsilon = \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon} \right\rfloor$. □

Poznamenejme, že při zjemnění tolerance ε na splnění nerovnosti $|x_n - L| < \varepsilon$ je potřeba si „počkat déle“, to jest pro menši ε hodnota indexu N_ε bude pravděpodobně vetší[4] (na obrázku 2.1 je znázornění této skutečnosti pro posloupnost z příkladu 2.12). Nerovnost $|x_n - L| < \varepsilon$ znamená, že je $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$, což na obrázku odpovídá pruhu, vymezenému zelenými vodorovnými čárami.

§ 2.2.3. Srovnávací věty o limitách

Srovnávací věty umožňují

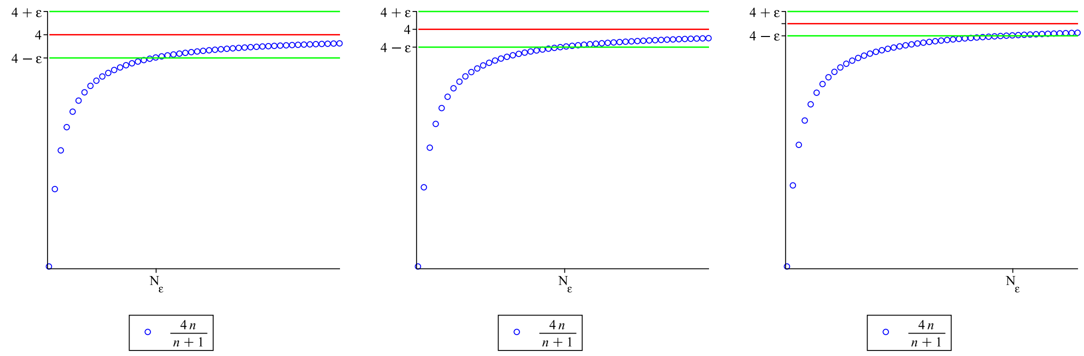
§ 2.2.3.1. Nerovnosti

VĚTA 2.13 (srovnávací věta). Buďte $\{x_n : n \geq 1\}$ a $\{y_n : n \geq 1\}$ dvě číselné posloupnosti, pro něž existují $\lim_{n\to+\infty} x_n$ a $\lim_{n\to+\infty} y_n$.

(1) Jestliže existuje N takové, že pro všechna $n \geq N$ platí $x_n \leq y_n$, pak

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \leq \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

[4] Zde z opatrnosti neříkáme, že vždy nutně vetší, neboť v definici 2.6 N_ε nemusí být nejmenší hodnotou indexu, pro níž požadovaná vlastnost platí.



(A) (B) (C)

OBRÁZEK 2.1

(2) Jestliže

$$\lim_{n\to+\infty} x_n < \lim_{n\to+\infty} y_n,$$

pak lze najít N tak, aby pro všechna $n \geq N$ platilo $x_n < y_n$.

Poznámka 2.14. Obecně neplatí, že $\lim x_n < \lim y_n$, když $x_n < y_n$ pro dostatečně velká n. Jako protipříklad stačí vzít $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{2}{n}$; pak vždy $x_n < y_n$, avšak $\lim x_n = \lim y_n = 0$.

VĚTA 2.15 (věta o sevření[5]). Buďte $\{x_n : n \geq 1\}$, $\{y_n : n \geq 1\}$ a $\{z_n : n \geq 1\}$ číselné posloupnosti a nechť existují $\lim_{n\to+\infty} x_n$ a $\lim_{n\to+\infty} y_n$ a jsou si rovné: $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = L$. Existuje-li N takové, že pro všechna $n \geq N$ platí

$$x_n \leq z_n \leq y_n,$$

pak existuje i $\lim_{n\to+\infty} z_n$, přičemž $\lim_{n\to+\infty} z_n = L$.

Věty o sevření se často využívá v následující podobě.

DŮSLEDEK 2.16. Je-li $|x_n - L| \leq \alpha_n$ pro dostatečně velká n, přičemž $\lim \alpha_n = 0$, pak platí $\lim x_n = L$.

Důkaz. Stačí si všimnout, že podle předpokladu platí $-\alpha_n \leq x_n - L \leq \alpha_n$. □

PŘÍKLAD 2.17. Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(2^n)}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Vysvětlení. Pro libovolné n je $|\sin(2^n)| \leq 1$ a tudíž $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}|\sin(2^n)| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \to 0$ pro $n \to +\infty$. Limita je tedy rovna 0 podle důsledku 2.16. □

PŘÍKLAD 2.18. Vypočtěme limitu posloupnosti $x_n = \frac{2n^2-1}{2^n - 3\sqrt{n^2+1}}(\operatorname{arctg} n^n)^n$.

[5] Jelikož dle věty 2.15 dvě veličiny směřující ke stejné hodnotě zajistí, aby ke stejné hodnotě směřovala i jakákoliv veličina mezi nimi nacházející, v studentském folkloru je toto tvrzení známo též jako „věta o dvou policajtech“.

V y s v ě t l e n í. Zdánlivě složitou úlohu snadno vyřešíme pomocí věty o sevření. Jelikož $|\operatorname{arctg} n^n| < \frac{\pi}{2}$ a pro dostatečně velká n platí[6] $\frac{3}{2^n}\sqrt{n^2+1} < 1$, bude

$$0 < x_n < \frac{2n^2-1}{2^n - 3\sqrt{n^2+1}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n = \frac{2n^2-1}{2^n\left(1-\frac{3}{2^n}\sqrt{n^2+1}\right)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n = \frac{2n^2-1}{1-\frac{3}{2^n}\sqrt{n^2+1}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$$
$$= \frac{2n^2}{\left(\frac{4}{\pi}\right)^n} y_n,$$

kde $y_n = \frac{1-\frac{1}{2n^2}}{1-\frac{3}{2^n}\sqrt{n^2+1}} \to 1$ a $\frac{n^2}{\left(\frac{4}{\pi}\right)^n} \to 0$ pro $n \to +\infty$ (neboť $\pi < 4$; viz úloha 2.27). Vzhledem k důsledku 2.16 obdržíme $\lim x_n = 0$. □

§ 2.2.3.2. Srovnání nekonečně malých

DEFINICE 2.19. Číselné posloupnosti $\{x_n : n \geq 1\}$ a $\{y_n : n \geq 1\}$ jsou *asymptoticky ekvivalentní při $n \to +\infty$* (značí se: $x_n \sim y_n$ při $n \to +\infty$), jestliže[7] $\lim \frac{x_n}{y_n} = 1$.

To, že $x_n \sim y_n$, znamená, že se tyto posloupnosti při $n \to +\infty$ chovají stejně. Např. pro $n \to +\infty$ je $2n^2 - 3n + 5 \sim 2n^2$, neboť $\frac{2n^2-3n+5}{2n^2} = 1 - \frac{3}{2n} + \frac{5}{2n^2} \to 1$. Tato úvaha, jíž běžně využíváme, platí i v obecnější podobě.

TVRZENÍ 2.20. Buďte $x_n = a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_r n^{\alpha_r}$, $y_n = b_1 n^{\alpha_1} + b_2 n^{\alpha_2} + \cdots + b_r n^{\alpha_r}$, kde $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_r \geq 0$ a $b_1 \neq 0$. Pak $\frac{x_n}{y_n} \sim \frac{a_1}{b_1}$ a je-li $a_1 = b_1$, platí $x_n \sim y_n$ při $n \to +\infty$.

D ů k a z. Vytkneme-li členy s nejvyšší mocninou α_1, obdržíme

$$\frac{a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_r n^{\alpha_r}}{b_1 n^{\alpha_1} + b_2 n^{\alpha_2} + \cdots + b_r n^{\alpha_r}} = \frac{a_1 + a_2 n^{\alpha_2-\alpha_1} + \cdots + a_r n^{\alpha_r-\alpha_1}}{b_1 + b_2 n^{\alpha_2-\alpha_1} + \cdots + b_r n^{\alpha_r-\alpha_1}} \to \frac{a_1}{b_1}$$

pro $n \to +\infty$, neboť $n^{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{1}{n^{\alpha_1-\alpha_2}} \to 0$ při $n \to +\infty$ vzhledem k tomu, že $\alpha_1 > \alpha_2$ atd. □ □

Takto odvodíme, že pro $n \to +\infty$ automaticky platí např. $-5n^3 + n - 19 \sim -5n^3$, $n + 100\sqrt{n} \sim n$, $4n^{\frac{3}{2}} - 27\sqrt[3]{n^2} + n - 2 \sim 4n^{\frac{3}{2}}$ apod.

DEFINICE 2.21. Posloupnost $\{x_n : n \geq 1\}$ se nazývá *nekonečně malá*, je-li $\lim x_n = 0$. Posloupnost $\{x_n : n \geq 1\}$ se nazývá *nekonečně velká*, je-li $\lim x_n = +\infty$ nebo $\lim x_n = -\infty$.

Podle § 2.2.2 je zřejmé, že součet a součin dvou nekonečně malých posloupností jsou rovněž nekonečně malé. Toto však již nemusí platit pro podíl;[8] záleží totiž na *rychlosti* konvergence k nule, jež právě rozhoduje, zda převládá čitatel nebo jmenovatel.

DEFINICE 2.22. Buďte $\{x_n : n \geq 1\}$ a $\{y_n : n \geq 1\}$ dvě nekonečně malé posloupnosti čísel. Říkáme, že je x_n ve srovnání s y_n:

(1) nekonečně malou veličinou *vyššího řádu*, jestliže $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$;
(2) nekonečně malou veličinou *stejného řádu*, jestliže $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lambda$, kde $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \pm\infty$.

---

[6] Vskutku, $\frac{\sqrt{n^2+1}}{2^n} < \frac{\sqrt{n^2+n^2}}{2^n} = \frac{n}{2^n}\sqrt{2}$, přičemž 2^n při $n \to +\infty$ roste rychleji než n (poznámka 2.28).

[7] V definici 2.19 lze, samozřejmě, použít i limitu $\lim \frac{y_n}{x_n}$, neboť dle tvrzení 2.11 $\lim \frac{y_n}{x_n} = \lim \frac{1}{\frac{x_n}{y_n}} = 1$, je-li $\lim \frac{x_n}{y_n} = 1$.

[8] Např. pro nekonečně malé posloupnosti $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{2^n}$ dle výsledku úlohy 2.27 je $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{2^n}{n} = +\infty$, $\lim \frac{y_n}{x_n} = \lim \frac{n}{2^n} = 0$.

Je-li nekonečně malá y_n při $n \to +\infty$ stejného řádu s $(x_n)^m$, kde $m > 0$, říká se, že y_n je *řádu malosti m* ve srovnaní s x_n.

V případě, když je $\lim \frac{x_n}{y_n} = 1$, jsou posloupnosti $\{x_n : n \geq 1\}$ a $\{y_n : n \geq 1\}$ asymptoticky ekvivalentní při $n \to +\infty$ (definice 2.19).

PŘÍKLAD 2.23. Pro $n \to +\infty$ platí:

(1) $x_n = \frac{1}{a_1 n^2 + b_1}$ a $y_n = \frac{1}{a_2 n^2 + b_2}$ jsou při $a_1 a_2 \neq 0$ nekonečně malé stejného řádu (je-li $a_1 = a_2$, jsou asymptoticky ekvivalentní);
(2) pro $\alpha > 0$, $k > 0$ je $\frac{1}{n^{k\alpha}}$ nekonečně malou řádu k ve srovnání s $\frac{1}{n^\alpha}$;
(3) $\frac{1}{n!}$ nekonečně malou vyššího řádu ve srovnání s $\frac{1}{a^n}$ pro libovolné $a > 0$;
(4) $\frac{1}{a^n}$ s $a > 0$ je nekonečně malou vyššího řádu ve srovnání s $\frac{1}{n^\alpha}$.

Vysvětlení. Tvrzení plynou y následujícího:

1. $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{a_2 n^2 + b_2}{a_1 n^2 + b_1} = \lim \frac{a_2 + \frac{b_2}{n^2}}{a_1 + \frac{b_1}{n^2}} = \frac{a_2}{a_1}$;
2. $\frac{1}{n^{k\alpha}} = \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^k$;
3. pro $x_n = \frac{1}{n!}$, $y_n = \frac{1}{a^n}$ podle úlohy 2.26 je $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{a^n}{n!} = 0$;
4. pro $x_n = \frac{1}{a^n}$, $y_n = \frac{1}{n^\alpha}$ podle úlohy 2.27 je $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$. □

§ 2.2.4. Limita monotónní posloupnosti

Je-li číselná posloupnost monotonní (definice 2.2), lze očekávat, že konverguje k nějakému číslu, je-li omezená, a konverguje k $+\infty$ nebo $-\infty$ v opačném případě. Monotónní posloupnost má tedy vždy limitu (možná nevlastní).

§ 2.2.4.1. Věta o konvergenci monotonní posloupnosti

VĚTA 2.24. Platí následující:

(1) Rostoucí nebo neklesající posloupnost, která je navíc shora omezená, má konečnou limitu. Není-li shora omezená, má limitu $+\infty$.
(2) Klesající nebo nerostoucí posloupnost, jež je zdola omezená, má konečnou limitu. Není-li zdola omezená, má limitu $-\infty$.

Důkaz. Zjistí se, že hodnotou limity rostoucí posloupnosti $\{x_n : n \geq 1\}$ je její nejmenší horní závora $\sup_{n \geq 1} x_n$ (§ 1.2.3). Vskutku, nechť je posloupnost shora omezená. Položíme-li $L = \sup_{n \geq 1} x_n$, dle definice 1.10 k libovolně malému ε lze najít index n_ε tak, aby bylo

$$x_{n_\varepsilon} > L - \varepsilon.$$

Vzhledem k předpokladu, že posloupnost je rostoucí, bude tato nerovnost platit i pro všechny další její členy: $x_n > L - \varepsilon$ pro $n \geq n_\varepsilon$. Na druhou stranu, L je pro posloupnost horní závorou a tudíž pro všechna n je $x_n \leq L$. Platí tedy

$$L - \varepsilon < x_n \leq L$$

pro všechna $n \geq n_\varepsilon$. Z této nerovnosti obdržíme $-\varepsilon < x_n - L \leq 0$, $|x_n - L| < \varepsilon$ pro $n \geq n_\varepsilon$, což dle definice 2.6 znamená, že je $L = \lim x_n$.

Není-li posloupnost shora omezená, pro libovolně A existuje N_A takové, že $x_{N_A} > A$. Jelikož je $\{x_n : n \geq 1\}$ rostoucí, totéž platí i pro všechna $n \geq N_A$: $x_n \geq A$. Toto však znamená, že $\lim x_n = +\infty$.

Podobně se dokáže, že limita klesající posloupnosti je rovna její největší dolní závoře. □

PŘÍKLAD 2.25. Pro posloupnost z příkladu 2.12 platí

$$x_n = \frac{4n}{n+1} = \frac{4n+4-4}{n+1} = 4 - \frac{4}{n+1}$$

a tudíž podle věty 10.7 má posloupnost limitu jakožto posloupnost rostoucí a shora omezená ($x_n \leq 4$ pro všechna n).

ÚLOHA 2.26. Vyšetřeme existenci limity posloupnosti s předpisem

$$x_n = \frac{a^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

kde $a > 0$.

Řešení. Je-li $0 < a < 1$, bude $\lim a^n = 0$ a tudíž i $\lim x_n = 0$. Totéž bude pro $a = 1$. Nechť proto $a > 1$. Lze očekávat, že $n!$ roste rychleji než a^n. Jelikož je posloupnost kladná a platí

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}, \tag{2.3}$$

přičemž $x_{n+1}/x_n < 1$, jakmile $n > a - 1$, podle tvrzení 2.4 lze usoudit, že začínaje takovým n je posloupnost klesající.[9] Posloupnost je kladná; hodnoty jejich členů jsou tedy zdola omezené nulou, a dle věty 10.7 existuje vlastní limita $\lim x_n = L$. Zapíšeme-li vztah (2.3) ve tvaru

$$x_{n+1} = \frac{a}{n+1} x_n$$

a přejdeme-li k limitě pro $n \to +\infty$, s využitím tvrzení 2.11 dostaneme $L = 0 \cdot L = 0$, to jest $\lim x_n = 0$. □

ÚLOHA 2.27. Vyšetřeme existenci limity posloupnosti

$$x_n = \frac{n^r}{a^n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

kde $a > 1$, $r > 0$.

Řešení. Podobně úloze 2.26 utvořme $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^r}{a^{n+1}} \frac{a^n}{n^r} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \frac{1}{a}$. Pak platí $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, je-li n takové, že $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^r < a$, přičemž poslední nerovnost zaručeně platí pro dostatečně velká n. Dle věty 10.7 kladná klesající posloupnost má vlastní limitu $L = \lim x_n$. Předejme-li k limitě v rovnosti $x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \frac{1}{a}$, dostaneme $L = L/a$ a tudíž je $L = 0$. □

Poznámka 2.28 (o růstu mocninných, exponenciálních výrazů a faktoriálu). Z úloh 2.26, 2.27 lze odvodit, že faktorial v $+\infty$ roste rychleji než jakákoliv exponenciální funkce a že funkce exponenciální roste rychleji než mocninná.

DEFINICE 2.29. Říká se, že členy číselné posloupnosti $\{x_n : n \geq 1\}$ mají určitou vlastnost *pro dostatečně velká* n, jestliže existuje N takové, že tuto vlastnost mají x_n při libovolném $n \geq N$.

Poznámka 2.30. Posloupnosti z úloh 2.26, 2.27 jsou pro dostatečně velká n monotonně klesající. Pouze pro dostatečně velká n má smysl uvažovat i jiné vlastnosti, tykající se chování x_n pro n rostoucí neomezeně (poznámka 2.10).

§ 2.2.4.2. Eulerovo číslo

S netriviálním příkladem využití věty 10.7 o limitě monotonní a omezené posloupnosti se setkáváme při zavedení Eulerova čísla.

[9] Z hlediska konvergence posloupnosti není důležité, že tato vlastnost platí jen začínaje určitou hodnotou indexu (viz poznámka 2.10).

§ 2.2.4.2.1. Definice Eulerova čísla a její odůvodnění

DEFINICE 2.31. *Eulerovo číslo e* je iracionální číslo definované vztahem

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.4}$$

Aby byla definice 2.31 korektní, je potřeba se ujistit, že limita v (2.4) existuje, což nyní učiníme.

TVRZENÍ 2.32. Číselná posloupnost

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.5}$$

je rostoucí a shora omezená.

Důkaz. Monotonnost posloupnosti není zřejmá a je proto vhodné zkusit vzorec nějakým způsobem upravit. Nabízí se myšlenka využiti binomického vzorce[10]

$$(1+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2!}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}b^3 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)}{n!}b^n. \tag{2.6}$$

Při $b = 1/n$ v (2.6) bude

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n},$$

odkud úpravami $\frac{n(n-1)}{n\cdot n} = 1 - \frac{1}{n}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{n\cdot n\cdot n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$ atd. obdržíme

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$
$$\cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{2.7}$$

Sčítají se tedy členy $\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$, kde $1 \le k \le n$. Zapíšeme-li pomocí (2.7) vzorec pro x_{n+1}, zjistíme, že po navýšení n o 1 se v (2.7) každý ze sčítanců zvetší, neboť budou v závorkách odečteny menší členy $\frac{r}{n+1}$ místo větších $\frac{r}{n}$, a navíc přibude další kladný sčítanec. Proto při každém n bude $x_{n+1} > x_n$, to jest posloupnost je rostoucí. Ukažme, že je rovněž omezená shora.

Je zřejmé, že $1 - \frac{1}{n} < 1$, $1 - \frac{2}{n} < 1$ atd., a proto z (2.7) obdržíme

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}. \tag{2.8}$$

Odhadneme-li zde jednotlivé sčítance podle pravidla $\frac{1}{3!} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} < \frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{4!} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} < \frac{1}{2^4}$ atd. (vezmeme-li tedy do jmenovatele příslušnou mocninu nejmenšího z činitelů odlišného od 1), dostaneme

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}. \tag{2.9}$$

[10] Vztah (2.6) je důsledkem binomického vzorce $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, kde $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$ $(1 \le k \le n)$ jsou binomické koeficienty.

Jelikož součet prvních $n+1$ členů geometrické posloupnosti s kvocientem $\frac{1}{2}$ je $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)<2$, z (2.9) odvodíme, že $x_n<3$ pro všechna n. $\square$

Limita (2.4) pak existuje vzhledem k tvrzení 2.32 a větě 10.7. Eulerovo číslo e, jež je takto definováno, slouží jako základ logaritmů přirozených.

§ 2.2.4.2.2. Přibližný výpočet Eulerova čísla

Vzhledem k tvrzení 2.32 z definice limity ihned dostáváme, že pro velká n je $e \doteq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Není však jasné, jak velké n musíme vzít pro dosažení předem stanovené přesnosti. Z hořejšího plyne zajímavá úvaha, podle níž lze Eulerovo číslo s libovolnou přesností přibližně vypočítat způsobem mnohem pohodlnějším.

Pro x_n platí vyjádření (2.7) a odhad (2.8). Odstraníme-li z pravé strany (2.7) všechny sčítance následující po $\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ při pevně zvoleném $k\le n$, obdržíme výraz ostře menší než x_n:[11]

$$x_n > 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \tag{2.10}$$

Přechodem k limitě při $n\to+\infty$ s využitím (2.4) pak dokážeme, že platí

$$e > 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{k!}, \tag{2.11}$$

a to při libovolném přirozeném k. Položíme-li

$$y_n = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}, \tag{2.12}$$

z (2.8) a (2.11) dostaneme, že pro všechna $n\ge 1$ je

$$x_n < y_n \le e. \tag{2.13}$$

Jelikož dle definice 2.31 platí $\lim x_n = e$, z (2.13) je jasné, že i $\lim y_n = e$ (pro důkaz se stačí odkázat na *větu o sevření* 2.15, § 2.2.3). Vzhledem k nerovnosti (2.13) je hodnota y_n k Eulerovu číslu e blíž než x_n, přičemž lze vztah $\lim y_n = e$ formálně zapsat v podobě sumy nekonečně mnoha sčítanců

$$e = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots. \tag{2.14}$$

Vzorec (2.14) vyjadřuje číslo e jako součet tzv. *nekonečné řady*[12] a je pohodlnější než (2.4). Zanedbáme-li v (2.14) všechny členy jdoucí po $\frac{1}{n!}$ pro nějakém pevně zvoleném n, obdržíme přibližnou hodnotu e v podobě

$$e \doteq 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}, \tag{2.15}$$

[11] Pro zdůvodnění bychom využili srovnávací věty 2.13: nerovnost (2.10) má tvar $x_n > u_{k,n}$, kde $\lim_{n\to\infty} u_{k,n} = y_k$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = e$; pak dle věty 2.13 bude $e=\lim_{n\to\infty} x_n \ge \lim_{n\to\infty} u_{k,n} = y_k$. Rovnost v (2.11) je vyloučena proměnným k.

[12] I když zde nekonečné řady nerozebíráme, smysluplnost nekonečné sumy (2.14) již můžeme odůvodnit pomocí odhadů odvozených při důkazu tvrzení 2.32; pro y_n totiž platí $y_n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}\to 1+2=3$ pro $n\to+\infty$. Z (2.12) je zřejmé, že je vždy $y_n = y_{n-1}+\frac{1}{n!} > y_{n-1}$. Při $n\to+\infty$ se y_n mění tak, že se do součtu neustále přidávají další členy. Vztah s nekonečnou sumou (2.14) pak má význam limity posloupnosti $\{y_n : n\ge 1\}$, jež je rostoucí a shora omezená (věta 10.7).

přičemž se kvalita aproximace zlepšuje při zvetšení n. Podstatnou výhodou vzorce (2.15) oproti vztahu $e \doteq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je možnost odhadu chyby, jíž se dopustíme, nahradíme-li e hodnotou (2.15) (jak chybu odhadnout, se ukáže v § 7.2.2, souvisí to totiž s Taylorovým vzorcem).

DŮSLEDEK 2.33. Platí $2 < e < 3$.

Důkaz. Z (2.14) dle důkazu tvrzení 2.32 obdržíme[13]

$$\begin{aligned} e &= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots \\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots = 1+2\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 3, \end{aligned} \tag{2.16}$$

a je rovněž zřejmé, že $e > 2$. □ □

Poznámka 2.35 (o alternativní definici Eulerova čísla). Vztah (2.14), chápaný jako limita posloupnosti (2.12), může sloužit i jako definice Eulerova čísla.[14]

§ 2.2.5. Bolzanova-Cauchyova podmínka

DEFINICE 2.36. Číselná posloupnost $\{x_n : n \geq 1\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, jestliže ke každému libovolně malému kladnému ε lze najít N_ε takové, že pro všechna $n, m \geq N_\varepsilon$ platí

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

VĚTA 2.37. Posloupnost $\{x_n : n \geq 1\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku tehdy a právě tehdy, když existuje číslo L takové, že platí (2.2).

Poznamenejme, že bezprostředně dle definice 2.6 lze platnost rovnosti (2.2) ověřit jenom za předpokladu, že máme nějakou hypotézu ohledně hodnoty L. Bolzanova-Cauchyova podmínka umožňuje existenci limity dokázat, aniž bychom měli formulovanou hypotézu pro její hodnotu.

PŘÍKLAD 2.38. Pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky dokažme konvergenci posloupnosti

$$x_n = \frac{4n}{n+1}$$

z příkladu 2.12.

Řešení. Využijme věty 2.37. Pro libovolná n, m je

$$\begin{aligned} x_m - x_n &= \frac{4m}{m+1} - \frac{4n}{n+1} = \frac{4m(n+1)-4n(m+1)}{(m+1)(n+1)} \\ &= 4\frac{m-n}{(m+1)(n+1)} = 4\frac{m-n}{mn+m+n+1} = 4\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{mn}} \end{aligned}$$

---

[13] Může se zdát, že ostrá nerovnost v (2.16) není dostatečně odůvodněna, poněvadž odhad $y_n < z_n$ pro $n \geq 1$ s $z_n = 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}$ dle věty 2.13 zaručí pouze neostrou nerovnost $e = \lim y_n \leq \lim z_n = 3$ (poznámka 2.14). Zde však y_n a z_n jsou součty n kladných čísel, kde první sčítance v y_n jsou menší, než příslušné sčítance v z_n. Toto znamená, že větu 2.13 můžeme aplikovat pro $\tilde{y}_n = \frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\dots+\frac{1}{n!}$, $\tilde{z}_n = \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots+\frac{1}{2^n}$, přičemž $e < 3$ pak plyne z nerovnosti $2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$. Použijeme tak následující jednoduché

TVRZENÍ 2.34. Buďte $\{a_n : n \geq 1\}$, $\{b_n : n \geq 1\}$ posloupnosti kladných čísel a pro $x_n = a_1+a_2+\dots+a_n$, $y_n = b_1+b_2+\dots+b_n$ existují limity $\lim x_n$ a $\lim y_n$. Je-li $a_k < b_k$ pro všechna $k \geq 1$, pak $\lim x_n < \lim y_n$.

[14] Tohoto vyjádření pro e lze rovněž využít pro důkaz jeho iracionálnosti.

a proto

$$|x_m - x_n| = 4\frac{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{mn}} \leq 4\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq 4\left(\left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right|\right).$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolně malé. Jestliže $n > N_\varepsilon$, $m > N_\varepsilon$, kde $N_\varepsilon = \left\lfloor \frac{8}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, pak $\left|\frac{1}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{8}$, $\left|\frac{1}{m}\right| < \frac{\varepsilon}{8}$ a tudíž $|x_m - x_n| < 4\left(\frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8}\right) = \varepsilon$. □

§ 2.3. Vybrané posloupnosti a hromadné body

§ 2.3.1. Podposloupnosti

Buď $\{x_n : n \geq 1\}$ číselná posloupnost. Její *podposloupnost* (neboli *vybraná posloupnost*) je posloupnost tvaru $\{x_{k_n} : n \geq 1\}$, kde $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ je nějaká nekonečná posloupnost přirozených čísel.

PŘÍKLAD 2.39. Vybraná posloupnost $\{x_{2n-1} : n \geq 1\}$ se skládá z členů s lichými indexy: $x_1, x_3, x_5, \ldots$. Vybranou posloupnost $\{x_{2^n} : n \geq 1\}$ tvoří členy, jejichž indexy jsou násobky 2, to jest $x_2, x_4, x_8, \ldots$.

VĚTA 2.40. Číselná posloupnost má limitu tehdy a pravě tehdy, když všechny její podposloupnosti konvergují k stejné limitě.

Důkaz. Konverguje-li každá podposloupnost $\{x_{k_n} : n \geq 1\}$ k hodnotě c, ve speciálním případě $k_n = n$ obdržíme $\lim x_n = c$. Naopak, je-li $\lim x_n = c$ s nějakým $c \in (-\infty, \infty)$, k libovolně malému kladnému ε lze najít N_ε tak, aby pro všechna $n \geq N_\varepsilon$ bylo $|x_n - c| < \varepsilon$. Vezmeme-li jakoukoliv rostoucí posloupnost indexů $k_1, k_2, k_3, \ldots$, bude to očividně posloupnost shora neomezená a tudíž pro dostatečně velká n ($n \geq n_\varepsilon$) bude $k_n \geq N_\varepsilon$. Zvýšíme-li N_ε na hodnotu $\max\{N_\varepsilon, n_\varepsilon\}$, podle definice limity dostaneme $\lim x_{k_n} = c$. Obdobně pro nevlastní hodnoty $c = \pm\infty$. □

Dokázat, že jistá posloupnost limitu nemá, lze tedy sestrojením dvou jejich podposloupností konvergujících k různým limitám.

PŘÍKLAD 2.41. Dokažme neexistenci limity posloupnosti

$$x_n = 2 + (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Řešení. Pro libovolné přirozené k je

$$x_{2k} = 2 + (-1)^{2k+1} = 2 - 1 = -1, \qquad x_{2k-1} = 2 + (-1)^{2k-1+1} = 2 + 1 = 3$$

a tudíž $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = -1$, $\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 3$. Dle věty 2.46 limita $\lim_{n\to\infty} x_n$ neexistuje. □

VĚTA 2.42 (Bolzanova–Weierstrassova). Z každé omezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost mající vlastní limitu.

§ 2.3.2. Hromadné body posloupnosti

Je-li $\lim x_{k_n} = c \in \mathbb{R}$ pro nějakou posloupnost indexů $k_1, k_2, \ldots$, můžeme to chápat tak, že bod c lze s libovolnou přesností přiblížit členy posloupnosti $\{x_n : n \geq 1\}$.

DEFINICE 2.43. *Hromadným bodem* posloupnosti $\{x_n : n \geq 1\}$ se nazývá bod, v jehož libovolně malém okolí se nachází nekonečně mnoho členů posloupnosti.[15]

Hromadným bodem posloupnosti je nevlastní bod $+\infty$ (resp. $-\infty$), je-li $\lim x_{k_n} = +\infty$ (resp. $-\infty$) pro nějakou vybranou posloupnost $\{x_{k_n} : n \geq 1\}$.

Z Bolzanovy–Weierstrassovy věty 2.42 plyne

[15] Máme na mysli, samozřejmě, *různé* členy posloupnosti.

VĚTA 2.44. Platí následující:

(1) Bod c je hromadným bodem posloupnosti tehdy a právě tehdy, když v dané posloupnosti existuje nějaká konvergentní podposloupnost, pro níž je c limitou.
(2) Každá posloupnost má hromadné body (je možné, že nevlastní).
(3) Posloupnost má limitu tehdy a právě tehdy, když má jediný hromadný bod.

§ 2.3.3. Limes superior a limes inferior

Limes superior (horní limita) a *limes inferior* (dolní limita) jsou největší resp. nejmenší hromadný bod dané posloupnosti. Tyto hodnoty jsou definovány pro libovolnou posloupnost takto.

DEFINICE 2.45. Buď $\{x_n : n \geq 1\}$ nekonečná posloupnost. Je-li posloupnost omezená shora, definujeme její *limes superior* rovností

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k \tag{2.17}$$

a pro shora neomezenou klademe $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Je-li posloupnost ohraničená zdola, definujeme její *limes inferior* rovností

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k \tag{2.18}$$

a pro zdola neomezenou klademe $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Symboly „sup“ a „inf“ v (2.17), (2.18) značí supremum (nejmenší horní závoru) a infimum (největší dolní závoru) podmnožiny reálných čísel.[16]

VĚTA 2.46. Platí následující:

(1) Vždy je $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$;
(2) $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$ právě tehdy, když existuje $\lim_{n\to\infty} x_n$;
(3) $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$.

PŘÍKLAD 2.47. Vyšetřeme hromadné body posloupností:

(1) $x_n = 2 + (-1)^{n+1}$ z příkladu 2.41;
(2) $x_n = \frac{\sqrt{4n^2+3}}{3n-7} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Řešení. 1. Platí $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = -1$, $\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 3$, přičemž tyto vzorce vyčerpají všechny možnosti. Hromadné body jsou $-1 = \liminf_{n\to\infty} x_n$, $3 = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

2. Platí $\lim \frac{\sqrt{4n^2+3}}{3n-7} = \lim \frac{2n\sqrt{1+\frac{3}{4n^2}}}{3n-7} = \frac{2}{3}$. Činitel $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ nabývá pro různá n jen několika hodnot. Uvažujme proto jednotlivé případy.

Pro $n = 2k$ je $\sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = 0$ a tudíž $x_{2k} = 0$. Pro $n = 2k+1$ je $\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, přičemž

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2s\pi\right) = 1 & \text{při } k = 2s; \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + (2s+1)\pi\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 & \text{při } k = 2s+1. \end{cases}$$

Hromadnými body dané posloupnosti tedy jsou $\{-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\}$ a platí $\limsup x_n = \frac{2}{3}$, $\liminf x_n = -\frac{2}{3}$. □

[16]Vzorce (2.17), (2.18) vyjadřují skutečnost, že limes superior a limes inferior jsou největší resp. nejmenší hromadné body posloupnosti. Nevystačíme-li z takto neformálním popisem, musíme využít pojmů suprema a infima (§ 1.2.3).

§ 3

Limita funkce jedné proměnné

§ 3.1. Limita funkce v nevlastním bodě

Limitou výrazu $f(x)$ v nevlastním bodě rozumíme hodnotu, k níž se $f(x)$ blíží při $x \to +\infty$ anebo $x \to -\infty$. Taková hodnota, obecně řečeno, existovat nemusí.

§ 3.1.1. Vlastní limita v nekonečnu

Buď f funkce definovaná na $(a, +\infty)$. Limitu $f(x)$ pro $x \to +\infty$ lze definovat podobně definici limity číselné posloupnosti.

DEFINICE 3.1. Číslo $L \in \mathbb{R}$ je *limitou* funkce f pro $x \to +\infty$:

$$L = \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

jestliže k libovolně malému kladnému číslu ε existuje číslo T_ε takové, že pro všechna $x \geq T_\varepsilon$ platí

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Zde hodnota L je reálné číslo, limita je vlastní. Limita pro $x \to -\infty$ se definuje obdobně.

PŘÍKLAD 3.2. Platí $\lim_{x \to +\infty} 2^{-x} = 0$.

Důkaz. Hodnota $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ klesá k 0 pro $x \to +\infty$ a tudíž bude $L = 0$. Aby platilo

$$|2^{-x} - L| = |2^{-x} - 0| = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} < \varepsilon$$

stačí, aby $2^x > \frac{1}{\varepsilon} = 2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}}$. Vzhledem k tomu, že je funkce $x \mapsto 2^x$ rostoucí, toto bude platit, je-li x dostatečně velké: $x > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. □

§ 3.1.2. Nevlastní limita v nekonečnu

Hodnota limity L je *nevlastní*, jestliže je $L = +\infty$ nebo $L = -\infty$.

DEFINICE 3.3.
(1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, jestliže k libovolně velkému A existuje r_A takové, že pro všechna $x \geq r_A$ platí $f(x) > A$.
(2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, jestliže k libovolně velkému A existuje r_A takové, že pro všechna $x \geq r_A$ platí $f(x) < -A$.

Limita pro $x \to -\infty$ se definuje obdobně.

PŘÍKLAD 3.4. Platí $\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$.

Důkaz. Hodnota 2^x je pro $x \to +\infty$ neomezeně rostoucí. Pro libovolně velké A bude $2^x > A$, je-li $2^x > 2^{\log_2 A}$, tj. $x > \log_2 A$. □

§ 3.2. Limita funkce ve vlastním bodě

Mějme funkci $f : I \to \mathbb{R}$ s definičním oborem $I \subset \mathbb{R}$. Buď $c \in \mathbb{R}$ (je možné, že $c \notin I$ a $f(c)$ není definováno).

Bod c je *limitním bodem* pro množinu I, jestliže v každém okolí bodu c je nějaký bod množiny I odlišný od c (§ 1.2.2). Táto vlastnost znamená, že se k bodu c lze jakkoliv těsně přiblížit pomocí bodů množiny I (přičemž samotný limitní bod c může, ale nemusí být prvkem I).

Je-li c je limitním bodem množiny I, má smysl uvažovat, jak se $f(x)$ chová, když se $x \in I$ přibližuje k c. Nechť dále c je limitní bod pro I.

§ 3.2.1. Limita funkce v bodě: definice jazykem "$\varepsilon \dots \delta$"

DEFINICE 3.5. Číslo $L \in \mathbb{R}$ je *limitou* funkce f v bodě c:

$$L = \lim_{x \to c} f(x),$$

jestliže k libovolně malému kladnému číslu ε existuje δ_ε takové, že pro všechna x splňující nerovnost $|x - c| < \delta_\varepsilon$ platí

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Význam této vlastnosti: při x se blížícím k c se hodnota $f(x)$ blíží k L.

§ 3.2.2. Nevlastní limity

DEFINICE 3.6. Říkáme, že f má v bodě c limitu rovnou $+\infty$:

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty,$$

jestliže k libovolně velkému číslu A existuje δ_A takové, že pro všechna x splňující $|x - c| < \delta_A$ platí $f(x) > A$.

Obdobně se definuje $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$.

§ 3.2.3. Limita funkce v bodě: definice jazykem posloupností

Totéž lze definovat přes limity číselných posloupností:

DEFINICE 3.7. $L \in \mathbb{R}$, $L = \lim_{x \to c} f(x)$, jestliže platí

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$$

pro *libovolnou* posloupnost čísel $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ takovou, že $\lim_{n \to +\infty} x_n = c$.

Lze dokázat, že definice 3.5 a 3.7 mají stejný význam.

§ 3.3. Jednostranné limity

Jednostranná limita

$$\lim_{x \to c+} f(x)$$

(čteme: "limita $f(x)$ pro $x \to c$ zprava") se definuje podobně limitě $\lim_{x \to c} f(x)$ s tím rozdílem, že $x \to c$ *zprava*, tj. $x \to c$ a vždy $x > c$. Obdobně se definuje $\lim_{x \to c-} f(x)$. Totéž lze formulovat jazykem číselných posloupností podobně § 3.2.3.

DEFINICE 3.8. $L \in \mathbb{R}$ je *limitou funkce f v bodě c zprava* ($L = \lim_{x \to c+} f(x)$), jestliže $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$ pro každou posloupnost čísel $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ takovou, že $\lim_{n \to +\infty} x_n = c$ a $x_n > c$ *pro všechna n*.

DEFINICE 3.9. $L \in \mathbb{R}$ je *limitou funkce f v bodě c zleva* ($L = \lim_{x\to c-} f(x)$), jestliže $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$ pro každou posloupnost čísel $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ takovou, že $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$ a $x_n < c$ *pro všechna n*.

PŘÍKLAD 3.10. Platí

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty.$$

Vysvětlení. Výsledky jsou zcela zřejmé; poznamenejme jen, že lze uvažovat pouze jednostrannou limitu pro $x \to 0+$, jelikož jsou funkce $x \mapsto \sqrt{x}$ a $x \mapsto \ln x$ definovány pouze pro $x > 0$. □

VĚTA 3.11. Limita $\lim_{x\to c} f(x)$ existuje tehdy a právě tehdy, když v bodě c existují obě dvě jednostranné limity a

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \lim_{x\to c-} f(x).$$

PŘÍKLAD 3.12. Buď m přirozené číslo. Dokažme, že limita $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^m}$ je rovna $+\infty$ pro m sudé a neexistuje pro m liché.

Řešení. Pro libovolné přirozené k

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty$$

a proto $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty$. Budeme-li uvažovat $\frac{1}{x^{2k+1}}$ pro $x \to 0$ ($x > 0$), obdržíme, že $0 < \frac{1}{x^{2k+1}} = \frac{1}{x^{2k}}\frac{1}{x} \to +\infty$. Stejně tak obdržíme, že $0 > \frac{1}{x^{2k+1}} = \frac{1}{x^{2k}}\frac{1}{x} \to -\infty$. Proto je

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^{2k+1}} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^{2k+1}} = -\infty$$

a dle věty 3.11 limita $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2k+1}}$ neexistuje. □

§ 3.4. Neurčité výrazy

S využitím pojmu limity lze matematicky precizně vyšetřovat tzv. neurčité výrazy, jež vznikají v důsledku dosazení do vzorce buď $\pm\infty$ nebo hodnoty, kde není výraz korektně definován (viz tabulka[17] 3.1).

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$	1^∞	∞^0	0^0	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{\infty}$

TABULKA 3.1. Neurčité výrazy

Např. $0 \cdot \infty$ znamená limitu tvaru

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x),$$

kde $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ a $\lim_{x\to c} g(x)$ je $+\infty$ nebo $-\infty$ (anebo takovou je nějaká jednostranní limita). Je to výraz neurčitý, neboť pro různé funkce f a g se chování součinu $f(x)g(x)$ při $x \to c$ může lišit a tudíž výsledek obecně nelze jednoznačně určit. Vskutku, je-li $c = 0$,

(1) pro $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ bude

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1;$$

[17] I když v případě $\frac{1}{\infty}$ lze říci, že $\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = 0$ vždy, když $\lim_{x\to c} g(x)$ je $+\infty$ nebo $-\infty$, je správné takové výrazy chápat pořád jako neurčité a neoperovat s $+\infty$ a $-\infty$ jako s čísly.

(2) pro $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ bude

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0;$$

(3) pro $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$ bude

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} x \frac{1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty;$$

(4) pro $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ limita

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} x \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

neexistuje,[18]

přičemž v každém z těchto případů se jedná o neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$.

PŘÍKLAD 3.13. Vypočtěme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-4x+3}.$$

Řešení. Jelikož

$$\frac{x-1}{x^2-4x+3} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

kde $f(1) = g(1) = 0$, jedná se o neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ pro $x \to 1$. Funkce f a g jsou polynomy a pro každý z nich číslo 1 je kořenem. Platí $g(x) = (x-1)(x-3)$ a proto

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{2}.$$

Poznamenejme, že bez využití pojmu limity chování funkce $x \mapsto \frac{x-1}{x^2-4x+3}$ v okolí bodu 1 vyšetřit nedokážeme, neboť dosazení $x = 1$ vede na neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. □

§ 3.5. Významné limity

Významné limity, jež běžně využíváme při výpočtu limit jiných, jsou zejména tyto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1.$$

Uvedené (i další[19]) vzorce lze považovat za důsledky l'Hôpitalova pravidla.

§ 3.6. Vlastnosti limit

VĚTA 3.14. Existují-li konečné $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} g(x)$, platí

$$\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x),$$
$$\lim_{x\to c} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x),$$
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \quad (\text{je-li } \lim_{x\to c} g(x) \neq 0).$$

[18] viz příklad 3.12

[19] např. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

PŘÍKLAD 3.15. Vypočtěme
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^{2x}-1}.$$
Řešení. Jedná se o typ $\frac{0}{0}$. Úpravou obdržíme
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{2x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{2x}-1}=1,$$
neboť limity $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}$ a $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{2x}-1}$ existují a jsou rovny 1 (pro $x\to 0$ je $2x\to 0$ a naopak; tudíž dle odst. 3.5 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$). $\square$

VĚTA 3.16. Je-li funkce v omezená v okolí bodu c a $\lim_{x\to c}u(x)=0$, pak bude
$$\lim_{x\to c}u(x)v(x)=0.$$

Důkaz. Dle předpokladu existuje $K>0$ takové, že v nějakém okolí bodu c je $|v(x)|\le K$. Pak bude $|u(x)v(x)|\le K|u(x)|\to 0$ pro $x\to c$. $\square$

PŘÍKLAD 3.17. Vypočtěme
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos(2^x)}{\sqrt[3]{x^4-1}}.$$
Řešení. U podílu $\frac{x}{\sqrt[3]{x^4-1}}$ se jedná o výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$. Zadání upravme takto:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos(2^x)}{\sqrt[3]{x^4-1}}=\lim_{x\to+\infty}\cos(2^x)\frac{x}{\sqrt[3]{x^4-1}}=\lim_{x\to+\infty}\cos(2^x)\frac{x}{\sqrt[3]{x^4\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\cos(2^x)\frac{x}{x^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^4}}}=\lim_{x\to+\infty}\cos(2^x)\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^4}}}.$$
Pak dle věty 3.16 obdržíme
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos(2^x)}{\sqrt[3]{x^4-1}}=0,$$
jelikož je vždy $|\cos(2^x)|\le 1$ a $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^4}}=+\infty$. $\square$

§ 3.7. Důkaz neexistence limity

§ 3.7.1. S užitím jednostranných limit

Důkaz neexistence limity lze provést podle věty 3.11: limita $\lim_{x\to c}f(x)$ neexistuje, jestliže neexistuje alespoň jedna z jednostranných limit $\lim_{x\to c+}f(x)$, $\lim_{x\to c-}f(x)$ anebo obě dvě jednostranné limity existují, avšak mají různé hodnoty (viz příklad 3.12).

§ 3.7.2. S užitím vybraných posloupností

Dle definice 3.7 limita $\lim_{x\to c}f(x)$ existuje a je rovna L právě když
$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=L$$
pro libovolnou posloupnost $\{x_n : n=1,2,\dots\}$ takovou, že $\lim_{n\to+\infty}x_n=c$. Tudíž, pro neexistenci limity $\lim_{x\to c}f(x)$ bude stačit, najdeme-li dvě posloupnosti $\{x_n : n=1,2,\dots\}$ a $\{\tilde{x}_n : n=1,2,\dots\}$ s $\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\tilde{x}_n=c$ takové, že
$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=L,\quad \lim_{n\to+\infty}f(\tilde{x}_n)=\tilde{L}$$
a $L\ne\tilde{L}$.

PŘÍKLAD 3.18. Dokažme, že funkce $f(x) = x \sin x$ nemá limitu pro $x \to +\infty$ ani pro $x \to -\infty$.

Řešení. Hodnoty funkce f při x rostoucím v kladných číslech neustále kolísají, přičemž hodnoty funkce postupně zaplňují intervaly tvaru $\langle -A, A\rangle$, kde A roste neomezeně (viz obrázek 3.1). Lze tedy uplatnit myšlenku s vybráním dvou různých cest pro $x \to +\infty$, jež vedou na různé výsledky pro hodnoty funkce.

Zvolme nekonečné posloupnosti $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ a $\{\tilde{x}_n : n = 1, 2, \dots\}$, např., tak, aby platilo

$$\sin x_n = 1, \quad \sin x_n = 0$$

pro každé n. Stačí vzít

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \tilde{x}_n = \pi n.$$

Je zřejmé, že $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \tilde{x}_n = +\infty$. Pak bude

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to+\infty} x_n \sin x_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = +\infty, \\ \lim_{n\to+\infty} f(\tilde{x}_n) &= \lim_{n\to+\infty} \tilde{x}_n \sin \tilde{x}_n = 0, \end{aligned}$$

což dokazuje neexistenci limity $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Navíc je funkce f sudá a tudíž neexistuje ani $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. □

PŘÍKLAD 3.19. Dokažme, že funkce $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nemá limitu pro $x \to 0$.

Řešení. Pro $x \to 0+$ je $\frac{1}{x} \to +\infty$. Proto funkce v okolí bodu 0 neustále kmitá mezi hodnotami -1 a 1, přičemž při přiblížení k 0 intenzita kmitů porad narůstá (viz obrázek 3.2). Zvolme posloupnosti $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ a $\{\tilde{x}_n : n = 1, 2, \dots\}$ tak, aby bylo

$$\sin\left(\frac{1}{x\,n}\right) = 1, \quad \sin\left(\frac{1}{x\,n}\right) = 0$$

pro každé n. Je zřejmé, že toto bude platit, jestliže

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad \tilde{x}_n = \frac{1}{\pi n}, \tag{3.1}$$

přičemž obě dvě posloupnosti (3.1) jsou kladné a $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \tilde{x}_n = 0$. Pak pro každé n bude

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1, \quad f(\tilde{x}_n) = \sin\left(\frac{1}{\tilde{x}_n}\right) = \sin \pi n = 0$$

a proto $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(\tilde{x}_n)$. Tímto jsme dokázali, že neexistuje limita zprava $\lim_{x\to0+} f(x)$ a tudíž neexistuje[20] i $\lim_{x\to0} f(x)$. □

§ 3.8. Substituce v limitě

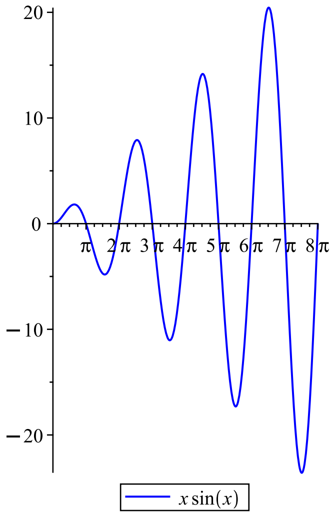
VĚTA 3.20. Buďte f funkce definovaná v okolí bodu A a g funkce definovaná v okolí bodu c. Existují-li

$$\lim_{x\to A} f(x) = B, \quad \lim_{x\to c} g(x) = A,$$

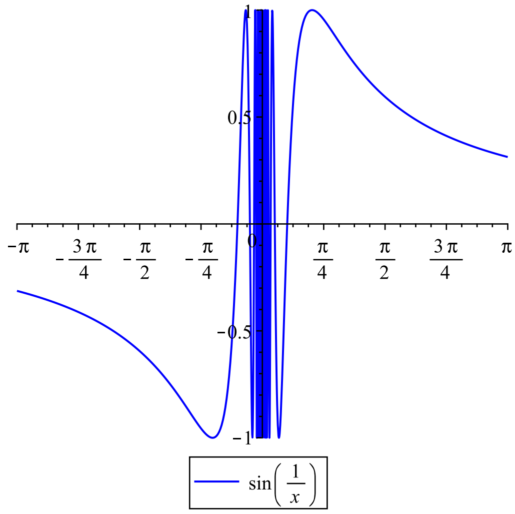
pak bude existovat i

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = B.$$

[20]Vhledem k lichosti funkce f je jasné, že neexistuje ani $\lim_{x\to0-} f(x)$.



OBRÁZEK 3.1. Graf funkce $y = x \sin x$



OBRÁZEK 3.2. Graf funkce $y = \sin \frac{1}{x}$

PŘÍKLAD 3.21. Vypočtěme

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Řešení. Pro $f(x) = \sin x$ je $f(0) = 0$ a veličina $\frac{1}{x}$ klesá k 0 pro $x \to +\infty$. Proto lze aplikovat větu 3.20 s $g(x) = \frac{1}{x}$, pro níž je $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} f\left(g(x)\right) = 0.$$

Lze si také všimnout, že pro dostatečné velké x ($x > \frac{1}{\pi}$) bude $0 < \frac{1}{x} < \pi$ a tudíž $\sin\left(\frac{1}{x}\right) > 0$, tj. se křivka blíží k ose x shora (viz obrázek 3.2). □

§ 3.9. Spojitost funkce

Spojitou funkci si představujeme tak, že jejím grafem je křivka, kterou lze nakreslit bez přerušení „jedním tahem“. Přesná definice využívá pojmu limity.

§ 3.9.1. Spojitost funkce v bodě

DEFINICE 3.22. Funkce f je *spojitá* v bodě c, jestliže $f(x) \to f(c)$ pro $x \to c$:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Funkce f je spojitá na otevřeném intervalu I, jestliže je spojitá v každém jeho bodě.

VĚTA 3.23. Buďte g funkce spojitá v okolí bodu c a f funkce spojitá v okolí bodu $g(c)$. Pak bude složená funkce $x \mapsto f(g(x))$ spojitá v v okolí bodu c.

PŘÍKLAD 3.24. Funkce $x \mapsto 2^{\cos x}$, $x \mapsto \sin(3^{-x})$, $x \mapsto \sqrt[4]{x^2+1}$ jsou spojité na $(-\infty, \infty)$. Funkce $x \mapsto \sin(\ln x)$ je spojitá na $(0, +\infty)$.

§ 3.9.2. Metoda bisekce

VĚTA 3.25 (Bolzanova věta). Je-li funkce f spojitá na intervalu (a, b) a platí $f(a)f(b) < 0$, pak existuje bod $\xi \in (a, b)$, v němž $f(\xi) = 0$.

Na tomto tvrzení je založena tzv. *metoda bisekce* přibližného určení řešení rovnice

$$f(x) = 0. \tag{3.2}$$

Tato metoda spočívá v následujícím. Položme $a_0 = a$, $b_0 = b$ a vypočtěme hodnotu f v bodě $\frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ (střed intervalu (a_0, b_0)). Je-li $f(a_0)f(\frac{1}{2}(a_0 + b_0)) < 0$, vezměme $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$, v opačném případě[21] položme $a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$, $b_1 = b_0$. Pokračujme obdobně na intervalu (a_1, b_1) atd. Obdržíme posloupnost zužujících se intervalů (a_n, b_n) takových, že platí

$$f(a_n)f(b_n) < 0$$

pro všechna $n = 0, 1, \ldots$. Jelikož

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a) \to 0, \quad n \to +\infty,$$

budou a_n a b_n konvergovat k řešení rovnice (3.2).

§ 3.9.3. Druhy bodů nespojitosti

Druhy bodů nespojitosti jsou následující:

(1) existuje $\lim_{x \to c} f(x)$, ale $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$ nebo $f(c)$ není definováno (odstranitelná nespojitost)
(2) existují konečné jednostranné limity a $\lim_{x \to c-} f(x) \neq \lim_{x \to c+} f(x)$ (nespojitost typu I, to jest typu „skok“)
(3) alespoň jedna z limit $\lim_{x \to c-} f(x)$ a $\lim_{x \to c+} f(x)$ je nevlastní nebo neexistuje (nespojitost typu II)

[21] Vyjde-li hodnota f ve středu intervalu 0, znamená to, že řešení rovnice (3.2) jsme již nalezli.

§ 4

Derivace funkce jedné proměnné

§ 4.1. Intuitivní představa

Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reálná funkce jedné reálné proměnné, jež popisuje vývoj určité proměnné veličiny.

INTUITIVNÍ „DEFINICE". Derivace funkce v bodě udává *okamžitou rychlost* růstu či poklesu její hodnoty v daném bodě.

Poznámky:

(1) Výpočtem hodnoty funkce v bodě zodpovíme otázku „Čemu se rovná hodnota uvažované proměnné veličiny v daném bodě?"
(2) Výpočtem hodnoty derivace funkce v bodě zodpovíme otázku „Jaká je okamžitá rychlost změny uvažované proměnné veličiny v daném bodě?"

Okamžitou rychlost změny hodnoty funkce v bodě intuitivně chápeme jako míru změny funkce v poměru k nekonečně malému přírůstku nezávisle proměnné v okolí tohoto bodu.

§ 4.2. Fyzikální interpretace derivace

§ 4.2.1. Pohyb hmotného bodu: rovnoměrný pohyb

Pojem derivace přirozeně vzniká při řešení fyzikální úlohy o pohybu hmotného bodu. Uvažujme přímočarý pohyb hmotného bodu; proměnné veličiny jsou čas $t \geq t_0$, dráha $s(t)$, kterou bod urazí za t jednotek času, a rychlost $v(t)$. Pro *rovnoměrný* pohyb je rychlost $v(t) = v$ konstantní:

$$s(t) = s(t_0) + v(t - t_0),$$

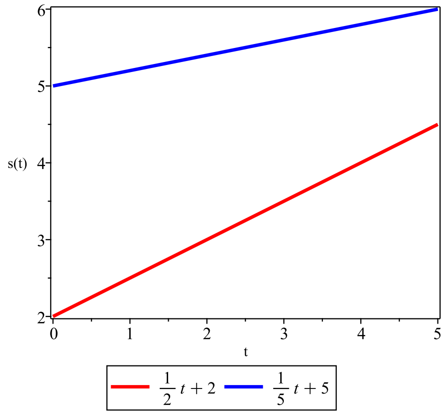
to jest v každém časovém okamžiku t platí

$$v = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

§ 4.2.2. Pohyb hmotného bodu: zrychlený pohyb

V případě *zrychleného* pohybu není rychlost $v(t)$ konstantní. Navíc vzniká přirozená otázka, jak $v(t)$ v každém časovém okamžiku t matematicky korektně definovat. Uvažujme časový interval (t_0, t); *průměrná* rychlost bude

$$v = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$



OBRÁZEK 4.1. Příklady veličin, jež se mění s konstantní rychlostí ($v = \frac{1}{2}$ a $v = \frac{1}{5}$)

Jak ale určit *okamžitou* rychlost $v(t)$ v čase t? Je-li t blízko k t_0, pak $v(t)$ je přibližné rovná průměrné rychlosti na intervalu mezi t_0 a t:

$$v(t) \doteq \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Pro stanovení okamžité rychlosti $v(t)$ se nabízí limitní přechod pro $t \to t_0$. Zvolme libovolné t_0. Okamžitá rychlost v t_0 pak bude:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

§ 4.3. Pojem derivace

§ 4.3.1. Definice

Buďte f funkce a x_0 bod z $D(f)$.

DEFINICE 4.1. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \tag{4.1}$$

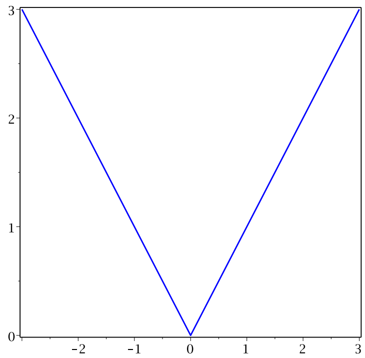
nazýváme tuto limitu *derivací* funkce f v bodě x_0 a značíme $f'(x_0)$.

Je-li limita v (4.1) nevlastní, říkáme, že funkce f v bodě x_0 má derivaci *nevlastní*. V případě, když limita neexistuje, v daném bodě funkce derivaci *nemá*. Postup nalezení derivace nazýváme *derivováním*.

Poznámka 4.2. Substitucí $x - x_0 = h$ lze vzorec (4.1) přepsat na tvar

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Poznámka 4.3. f' je funkce $x \mapsto f'(x)$, přičemž $D(f') \subset D(f)$ (je možné, že $D(f') \neq D(f)$!)



OBRÁZEK 4.2. Funkce $y = |x|$ v bodě $x = 0$ derivaci nemá (není tečna).

§ 4.3.2. Alternativní způsoby zápisu derivace

Jinak se derivace značí $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$. Je-li $y = y(x)$ funkce proměnné x, pak lze psát

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{4.2}$$

a formálně chápat tento výraz jako podíl *přírůstku hodnoty závisle proměnné* v poměru k *nekonečně malému přírůstku nezávislé proměnné*.[22]

Zápis $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ preferujeme, chceme-li zdůraznit, že se derivuje podle x, nikoliv podle jiné proměnné, již výraz y může obsahovat. Např. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha x^3 + x^2\sqrt{\alpha}) = 3\alpha x^2 + 2\sqrt{\alpha}x$.

§ 4.3.3. Existence derivace

TVRZENÍ 4.4. Platí následující:

(1) Existuje-li pro funkci v nějakém bodě derivace, pak je její hodnota určena jednoznačně.
(2) Existence derivace je lokální vlastnost (hodnota derivace v bodě popisuje rychlost růstu nebo poklesu funkce v okolí daného bodu a není ovlivněna chováním funkce v jiných částech definičního oboru).

VĚTA 4.5. Má-li funkce v bodě vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.

Opačné tvrzení neplatí (tj. jsou spojité funkce, jež v nějakých bodech derivaci nemají).

Poznámka 4.6. Derivace funkce v některém bodě neexistuje, jestliže v tomto bodě nelze sestrojit tečnu. Existence derivace tedy znamená určitou hladkost křivky (neexistenci „hrotů“).

PŘÍKLAD 4.7. Pro $f(x) = |x|$ hodnota $f'(0)$ neexistuje.

Řešení. Limita $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ neexistuje, neboť

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = 1, \qquad \lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Proto funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0 derivaci nemá. V bodě $(0, 0)$ křivka nemá tečnu. Pozorujeme nehladký charakter změny hodnot funkce v okolí bodu 0 (viz obrázek 4.2).

[22] Určitý důvod k tomu shledáme o něco později v § 7.1.2.

§ 4.3.4. Jednostranné derivace

Jednostranné derivace $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ se definují podobným způsobem, když v (4.1) vezmeme jednostranné limity:

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0), \quad \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0).$$

TVRZENÍ 4.8. Derivace $f'(x_0)$ existuje právě tehdy, když existují $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ a navíc je

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

PŘÍKLAD 4.9. Pro $f(x) = |x|$ je $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$ (viz příklad 4.7).

Jednostranné derivace uvažujeme zejména v blízkosti koncových bodů intervalu, na němž je funkce definována.

§ 4.4. Derivace některých elementárních funkcí

Uveďme příklady důkazu vzorců pro derivace některých elementárních funkcí. Tyto a další běžně využívané vzorce nalezneme v tabulkách.

§ 4.4.1. Derivace lineární funkce

Buď $f(x) = ax + b$. Pak platí

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)+b-ax-b}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a.$$

Takto odvodíme vzorec $(ax+b)' = a$. Mimo jiné, derivace konstantní funkce je 0.

§ 4.4.2. Derivace exponenciální funkce

Je-li $f(x) = e^{ax}$, bude

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{a(x+h)}-e^{ax}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{ax+ah}-e^{ax}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} e^{ax}\frac{e^{ah}-1}{h} = \lim_{h\to 0} ae^{ax}\frac{e^{ah}-1}{ah} = \lim_{h\to 0} ae^{ax} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{ah}-1}{ah} \\ &= a \lim_{h\to 0} e^{ax} \cdot 1 = ae^{ax}. \end{aligned}$$

Obdržíme $(e^{ax})' = ae^{ax}$, $(e^x)' = e^x$.

§ 4.4.3. Derivace druhé mocniny

Pro $f(x) = x^2$ bude

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x \end{aligned}$$

a obdržíme $(x^2)' = 2x$.

§ 4.4.4. Derivace druhé odmocniny

Je-li $f(x) = \sqrt{x}$ pro $x \geq 0$, bude

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

pro $x > 0$. V bodě 0 se jedná o limitu zprava

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

a proto bude $f'_+(0) = +\infty$. Obdržíme tak často využívaný vzorec

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

§ 4.4.5. Derivace $\frac{1}{x}$

Pro $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ bude

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x}{(x+h)x} - \frac{x+h}{x(x+h)}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{-h}{x(x+h)} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

a tudíž $(x^{-1})' = -x^{-2}$,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

§ 4.5. Geometrický význam derivace

§ 4.5.1. Směrnice přímky

DEFINICE 4.10. *Směrnicí* přímky s rovnicí

$$y = kx + b \tag{4.3}$$

nazýváme tangens úhlu α, který přímka svírá s kladnou částí osy x.

Znázorníme-li přímku (4.3) na obrázku pro různé hodnoty k, snadno obdržíme, že je směrnice $\operatorname{tg}\alpha$ rovna k, přičemž pro $k > 0$ (resp. $k < 0$) přímka udává rostoucí (resp. klesající) lineární funkci. Je-li $k = 0$, jedná se o přímku vodorovnou.

Velikost čísla k vyjadřuje rychlost růstu nebo klesání lineární funkce. Např., je-li $k > 0$ malé, bude přímka otočená ve směru růstu při zvetšení x a úhel α, jenž svírá s osou x, bude malý.

§ 4.5.2. Sečna a tečna křivky

Sečna a tečna křivky jsou znázorněny na obrázku 4.3.

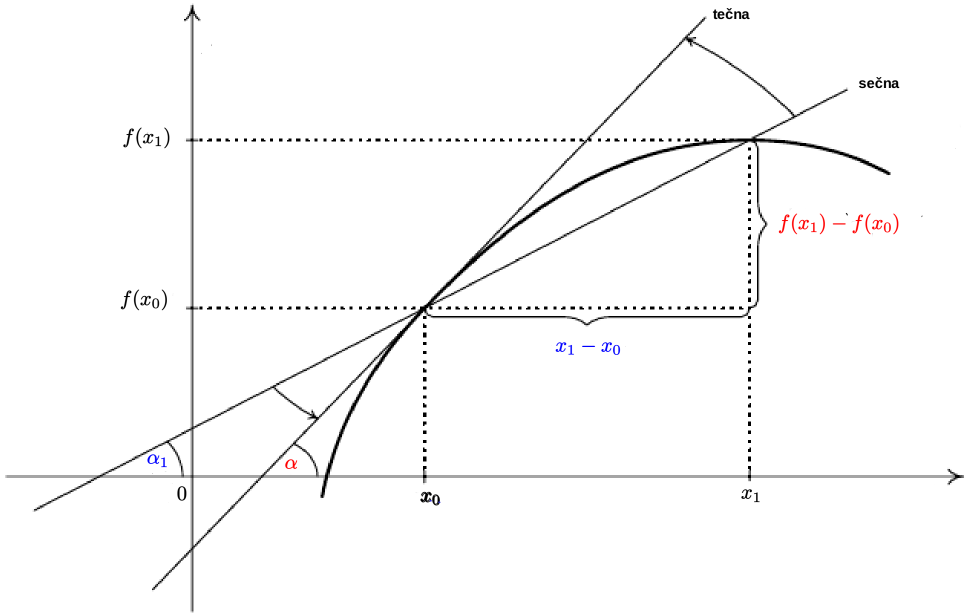
DEFINICE 4.11. *Sečna* je spojnice bodů $(x_0, f(x_0))$ a $(x, f(x))$. *Tečna* ke grafu v bodě $(x_0, f(x_0))$ vzniká jako limitní poloha této sečny pro $x \to x_0$.

Sestrojme sečnu v bodech $(x_0, f(x_0))$ a $(x_1, f(x_1))$. Rovnicí této sečny je

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

to jest

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$



OBRÁZEK 4.3. Sečna a tečna

Směrnicí této sečny dle § 4.5.1 je

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Dle definice derivace je

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0).$$

Limitní hodnotou směrnice sečny tedy je $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ (viz obrázek 4.3).

TVRZENÍ 4.12. Hodnota $f'(x_0)$ udává směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$. Je-li $f'(x_0)$ nevlastní (tj. hodnota $f'(x_0)$ je $+\infty$ nebo $-\infty$), bude tečna v tomto bodě svislá.

Příklad svislé tečny nalezneme v § 4.4.4.

§ 4.5.3. Rovnice tečny

Nechť má funkce f derivaci v bodě x_0. Rovnicí tečny ke grafu této funkce v bodě $(x_0, f(x_0))$ je

$$y = ax + b,$$

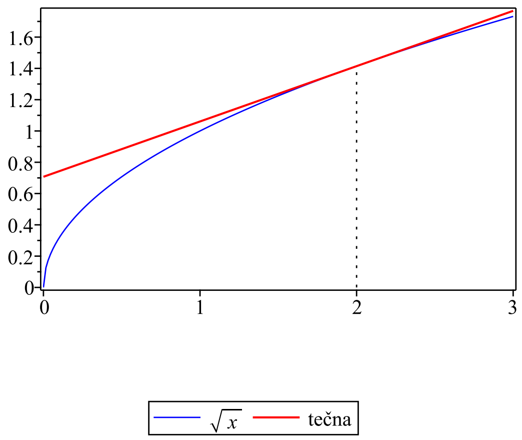
kde $a = f'(x_0)$. Hodnotu b pak snadno určíme z podmínky, že bod $(x_0, f(x_0))$ je společným pro křivku i tečnu:

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$$

a tudíž $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

TVRZENÍ 4.13. Rovnicí tečny ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$ je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



OBRÁZEK 4.4. Tečna pro $f(x) = \sqrt{x}$ v bodě $(2, \sqrt{2})$.

PŘÍKLAD 4.14. Najděme rovnici tečny pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$ v bodě $(2, \sqrt{2})$.

Řešení. Dle § 4.4.4 je $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(2) = \sqrt{2} \doteq 1.41$, $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \doteq 0.35$. Proto rovnice tečny v bodě $(2, \sqrt{2})$ je (viz obrázek 4.4)

$$y = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2).$$

§ 4.5.4. Rovnice normály

Z geometrie víme, že směrnice k_1 a k_2 navzájem kolmých přímek splňují vztah

$$k_1 k_2 = -1.$$

Proto dle tvrzení 4.13 platí

TVRZENÍ 4.15. Je-li $f'(x_0) \neq 0$, pak rovnicí normály ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$ je

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

V případě, když $f'(x_0) = 0$, je v bodě $(x_0, f(x_0))$ normála svislá a má rovnici $x = x_0$.

§ 4.6. Výpočet derivace

Derivace základních elementárních funkcí nalezneme v tabulkách. Derivaci funkce, jež je kombinací základních elementárních funkcí pomocí součtu, součinu, podílu a složení, odvodíme s užitím odpovídajících vlastností derivace.

§ 4.6.1. Derivace součtu

TVRZENÍ 4.16. Mají-li funkce f a g v bodě x derivaci, pro libovolná λ, μ platí

$$(\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

Příklad:

$$(3x^3 - 2x^2 + 70)' = (3x^3)' - (2x^2)' + (70)' = 9x^2 - 4x.$$

§ 4.6.2. Derivace součinu

TVRZENÍ 4.17. Mají-li funkce f a g v bodě x derivaci, platí

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Důkaz. Vzorec pro derivaci součinu lze odvodit přibližné takto: přidáním a odečtením výrazu $f(x+h)g(x)$ obdržíme

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + [f(x+h) - f(x)]g(x)}{h} \\ &= f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h},\end{aligned}$$

následně přejdeme k limitě pro $h \to 0$. □

PŘÍKLAD 4.18. $(x \ln x)' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

Důsledkem je pravidlo vytknutí konstantního činitele: pro libovolnou konstantu k platí

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

§ 4.6.3. Derivace složené funkce

Nejdůležitějším je pravidlo derivování složené funkce. Buďte $f : D(f) \to H(f)$, $g : D(g) \to \mathbb{R}$, kde $D(g) \subset H(f)$ (obor hodnot f). Pak je definovaná složená funkce $x \mapsto f(g(x))$.

VĚTA 4.19 („Řetězové pravidlo“). Nechť funkce g má vlastní derivaci v bodě x_0 a nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $g(x_0)$. Pak má složená funkce $x \mapsto f(g(x))$ v bodě x_0 vlastní derivaci a platí:

$$(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0))\, g'(x_0).$$

Jinými slovy, existují-li $g'(x)$ a $f'(g(x))$, platí

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x).$$

Důkaz. Důkaz je založen na úpravách

$$(f(g(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

a rovností $f'(g(x)) = \lim_{b\to g(x)} \frac{f(b) - f(g(x))}{b - g(x)}$. □

§ 4.6.4. Derivace výrazu $\frac{1}{g(x)}$

TVRZENÍ 4.20. Existuje-li $g'(x)$ a je-li $g(x) \neq 0$, platí

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Důkaz. Platí $q(x) = \frac{1}{g(x)} = f(g(x))$, kde $f(t) = \frac{1}{t}$. Již víme, že $\left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2}$, a proto můžeme q zderivovat jako složenou funkci:

$$q'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x) = -\frac{1}{(g(x))^2}\, g'(x),$$

což je kýžený výsledek. □

§ 4.6.5. Derivace podílu

TVRZENÍ 4.21. Existují-li $f'(x)$, $g'(x)$ a je-li $g(x) \neq 0$, platí

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Důkaz. Stačí napsat $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ a využít tvrzení 4.17, 4.20. □

§ 4.6.6. Derivace inverzní funkce

VĚTA 4.22. Nechť funkce f je spojitá a ryze monotonní na intervalu I. Nechť x_0 je vnitřní bod intervalu I a nechť má f v bodě x_0 konečnou derivaci $f'(x_0) \neq 0$. Pak má inverzní funkce $g = f^{-1}$ v bodě $f(x_0)$ derivaci a platí

$$g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Jinými slovy,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

v bodech y, kde pro $x = f^{-1}(y)$ existuje konečná derivace $f'(x) \neq 0$.

Důkaz. Pro pohodlí zápisu buď $g = f^{-1}$ funkce inverzní k f. Pro každé x z I platí

$$g(f(x)) = x.$$

Zderivováním tohoto vztahu obdržíme

$$1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(f(y)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g(f(y)) = g'(f(y)) \cdot f'(y).$$

K požadovanému vzorci přijdeme, vezmeme-li $y = f^{-1}(x_0)$; potom $x_0 = f(y)$. □

Vztahu z věty 4.22 se užívá, mimo jiné, při důkazu vzorců pro derivace logaritmických a cyklometrických funkcí. Ukažme příklady odvození některých tabulkových vzorců.

PŘÍKLAD 4.23. Pro derivaci funkce $x \mapsto \arcsin x$ platí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad |x| \leq 1.$$

Důkaz. Pro $|x| \leq 1$ je $\arcsin x = f^{-1}(x)$, kde $f(x) = \sin x$. Dle věty 4.22

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{4.4}$$

Jelikož $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, platí

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin y))^2}},$$

a stačí si všimnout, že v posledním vzorci $\sin(\arcsin y) = y$. □

PŘÍKLAD 4.24. Pro derivaci funkci $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ platí

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Důkaz. Použijme (4.4), kde $\operatorname{arctg} x = f^{-1}(x)$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Jelikož $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, platí

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} y))}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1 + y^2},$$

což je kýžený výsledek. □

§ 4.6.7. Logaritmické derivace

Derivace některých funkcí lze snadno vypočítat, přejdeme-li k vypočtu derivace logaritmu daného výrazu.

TVRZENÍ 4.25. Platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(x)^{v(x)} = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right). \tag{4.5}$$

Důkaz. Pro $f(x) = u(x)^{v(x)}$ zapišme a zderivujme $\ln f(x) = \ln u(x)^{v(x)} = v(x) \ln u(x)$:

$$(\ln f(x))' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \left(u(x)^{v(x)} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (v(x) \ln u(x)) = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}. \tag{4.6}$$

Dle vzorce pro derivaci složené funkce však platí

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{4.7}$$

a tudíž z (4.6) obdržíme

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))', \tag{4.8}$$

to jest $f'(x) = f(x)(\ln f(x))' = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$. □

Pri odvození vzorce pro derivaci výrazu $u(x)^{v(x)}$ bychom mohli postupovat i takto:

$$\left(u(x)^{v(x)} \right)' = \left(e^{v(x) \ln u(x)} \right)' = e^{v(x) \ln u(x)} \, (v(x) \ln u(x))' \tag{4.9}$$

atd. *Není nutné* si vzorec (4.5) pamatovat, stačí vědět o upravě (4.9). V praxi vzorce (4.7) často využíváme v podobě (4.8).

PŘÍKLAD 4.26. Zderivujme $f(x) = \sqrt[x]{x}$, $x > 0$.

Řešení. Dle (4.7) je $f'(x) = f(x)(\ln f(x))'$. Jelikož

$$(\ln f(x))' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x^{\frac{1}{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

vzhledem k (4.8) obdržíme

$$\left(\sqrt[x]{x} \right)' = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2} (1 - \ln x).$$

PŘÍKLAD 4.27. Zderivujme $f(x) = \sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}}$.

Řešení. Mohli bychom výraz derivovat jako osmou odmocninu lomené funkce: $f'(x) = \frac{1}{8} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-\frac{7}{8}} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)'$ atd. K výsledku se však dostaneme rychleji, využijeme-li derivace logaritmické. Vskutku, jelikož

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln f(x) = \frac{1}{8} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{8} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-x^2},$$

dle (4.8) obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{4}\sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{1-x^2}.$$

§ 5

Diferenciál, věty o střední hodnotě, l'Hôpitalovo pravidlo

§ 5.1. Derivace funkce jedné proměnné

Buďte $f : I \to \mathbb{R}$ funkce na intervalu I a x_0 je vnitřní bod I.

DEFINICE 5.1. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \tag{5.1}$$

nazýváme tuto limitu *derivací* funkce f v bodě x_0 a značíme $f'(x_0)$. Je-li limita v (5.1) nevlastní, říkáme, že funkce f v bodě x_0 má derivaci *nevlastní*. V případě, když limita neexistuje, v daném bodě funkce *derivaci nemá*.

Substitucí $x - x_0 = h$ lze (5.1) přepsat na tvar

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0). \tag{5.2}$$

§ 5.2. Diferencovatelnost a diferenciál

§ 5.2.1. Diferencovatelnost funkce

Pojem diferencovatelnosti funkce v bodě vyjadřuje možnost vyčlenit z ní lineární část, jíž lze funkci v okolí tohoto bodu aproximovat.

DEFINICE 5.2. Funkce f je *diferencovatelná* v bodě x_0, jestliže existuje konstanta A taková, že platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0. \tag{5.3}$$

VĚTA 5.3. Funkce jedné proměnné $f : I \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě x_0 právě tehdy, když má v tomto bodě konečnou derivaci.

Důkaz. Platí-li (5.3), bude

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = \alpha(h),$$

kde $\alpha(h) \to 0$ pro $h \to 0$. Proto $f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah = h\alpha(h)$, $f(x_0 + h) - f(x_0) = (A + \alpha(h))\, h$ a tudíž

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} (A + \alpha(h)) = A.$$

Toto znamená, že $f'(x_0)$ existuje a $f'(x_0) = A$.

Naopak, existuje-li $f'(x_0)$, pak dle (5.2) je
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \beta(h),$$
kde $\beta(h) \to 0$ pro $h \to 0$, a tudíž
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} = \beta(h).$$
Takto jsme přišli k (5.3) s $A = f'(x_0)$. □

Diferencovatelnost funkce znamená, že v okolí daného bodu ji lze libovolně přesně aproximovat lineární funkcí odpovídající tečné přímce (dle věty 5.3 A v (5.3) je rovno $f'(x_0)$, což je směrnice tečny v tomto bodě).

§ 5.2.2. Diferenciál

DEFINICE 5.4. Výraz $f'(x_0)\,h$ (přesněji řečeno, lineární funkce $h \mapsto f'(x_0)\,h$) se nazývá *diferenciál* funkce f v bodě x_0.

Diferenciál $f'(x_0)\,h$ vyjadřuje hlavní část přírůstku funkce $f(x_0+h)-f(x_0)$, odpovídajícího změně argumentu h:
$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)\,h + \alpha(h),$$
kde $\alpha(h) \to 0$ pro $h \to 0$. Zanedbáme-li $\alpha(h)$ pro malá h, vychází
$$f(x_0+h)-f(x_0) \doteq f'(x_0)\,h. \tag{5.4}$$
Vzorce (5.4) lze užit pro přibližný výpočet přírůstku funkce.

Poznámka 5.5. Výše uvedené umožňuje chápat výraz v (4.2) jako zlomek a psát
$$\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x. \tag{5.5}$$

§ 5.3. Některé důležité věty

Buď $f : I \to \mathbb{R}$ funkce na intervalu I.

VĚTA 5.6 (Férmat). Buď x_0 vnitřní bod I takový, že f v x_0 nabývá maximální nebo minimální hodnoty. Pak, existuje-li $f'(x_0)$, musí být $f'(x_0) = 0$.

Toto tvrzení lze snadno dokázat, odvodíme-li, že platí

LEMMA 5.7. Nechť existuje konečná derivace $f'(x_0)$.

(1) Je-li $f'(x_0) > 0$, pak pro x blízka x_0, $x > x_0$, platí $f(x) > f(x_0)$.
(2) Je-li $f'(x_0) < 0$, pak pro x blízka x_0, $x < x_0$, platí $f(x) < f(x_0)$.

Toto lemma vyjadřuje skutečnost, že při $f'(x_0) > 0$ (resp., $f'(x_0) < 0$) funkce f v bodě x_0 roste (resp., klesá). Věty 5.6 podstatně užijeme, budeme-li vyšetřovati maximální nebo minimální hodnoty funkce.

VĚTA 5.8 (Rolle). Buď f funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, přičemž ve všech bodech z (a, b) má f konečnou derivaci. Je-li $f(a) = f(b)$, pak existuje c, $a < c < b$, takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že f není konstantní. Dle Weierstrassovy věty spojitá f nabývá svých maxima a minima v nějakých bodech z $[a, b]$, přičemž vzhledem k tomu, že $f(a) = f(b)$, alespoň jeden z těch bodů c leží mezi a a b. Dle věty 5.6 bude $f'(c) = 0$. □

VĚTA 5.9 (Lagrange; věta o střední hodnotě). Buď f funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$, přičemž ve všech bodech z (a,b) má f konečnou derivaci. Pak existuje c, $a < c < b$, takové, že

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{5.6}$$

Důkaz. Položme $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k$ a definujme pomocnou funkci

$$F(x) = f(x) - f(a) - k(x-a).$$

Je zřejmé, že $y = f(a) - k(x-a)$ je rovnicí spojnice bodů $(a; f(a))$ a $(b; f(b))$. Pak bude $F(a) = 0$, $F(b) = f(b) - f(a) - k(b-a) = 0$ a

$$F'(x) = f'(x) - k. \tag{5.7}$$

Funkce F tak splňuje předpoklady Rolleovy věty 5.8 a proto mezi a a b existuje bod c, kde je $F'(c) = 0$. Vzhledem k (5.7) toto znamená, že jsme dokázali (5.6). □

VĚTA 5.10 (Cauchy; věta o střední hodnotě). Buďte f, g funkce spojité na uzavřeném intervalu $[a,b]$, přičemž ve všech bodech z (a,b) mají f, g konečné derivace a $g' \neq 0$ na (a,b). Pak existuje c, $a < c < b$, takové, že

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5.8}$$

Důkaz. Za daných předpokladů platí $g(b) - g(a) \neq 0$, neboť v opačném případě dle Rolleovy vety by bylo $g'(x_0) = 0$ v nějakém bodě $x_0 \in (a,b)$.

Definujme

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-(a)}(g(x) - g(a));$$

pak bude $F(a) = F(b) = 0$,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-(a)} g'(x). \tag{5.9}$$

Funkce F splňuje předpoklady Rolleovy věty 5.8 a proto existuje $c \in (a,b)$, kde je $F'(c) = 0$. Dosadíme-li v (5.9) $x = c$, obdržíme (5.8). □

§ 5.4. L'Hôpitalovo pravidlo

Tvrzení, jemuž se říká *l'Hôpitalovo pravidlo*, poskytuje účinný nástroj, mnohdy umožnující snadno vyšetřit neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$, to jest limity $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, kde $f(x)$ a $g(x)$ zároveň konvergují k 0 nebo do nekonečna.

VĚTA 5.11 (l'Hôpitalovo pravidlo pro $\frac{0}{0}$). Nechť v

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, v okolí[23] bodu a funkce f a g mají konečné derivace, $g' \neq 0$ a existuje pomocná limita $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak existuje i původní limita a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Obdobně pro $\frac{\infty}{\infty}$.

[23]Má se na mysli ryzí, neboli prstencové okolí bodu a, tj. okolí s vyloučeným bodem a (množina těch $x \neq a$, pro něž $|x| < r$ nějakým $r > 0$).

S c h é m a d ů k a z u. Pro jednoduchost uvažujme případ, když hodnoty f a g v a jsou definovány:

$$f(a) = g(a) = 0. \tag{5.10}$$

Zvolme libovolné x v blízkosti bodu a. Dle Cauchyovy věty o střední hodnotě (věta 5.10) mezi a a x lze najít bod c, kde platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Vzhledem k (5.10) toto znamená, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

a stačí poznamenat, že při $x \to a$ bude i $c \to a$, poněvadž c leží mezi a a x.

Není-li nějaká z funkcí f a g v bodě a definována (ať je to např. f), dodefinujeme ji v bodě hodnotou limity $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Obdržíme tak spojitou funkci, na níž lze aplikovat předchozí postup. □

Dosti často bývá vhodné použit L'Hôpitalovo pravidlo opakovaně.

PŘÍKLAD 5.12. Při libovolném přirozeném m opakovaným využitím l'Hôpitalova pravidla pro limitu $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{e^x}$ typu $\frac{\infty}{\infty}$ obdržíme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{mx^{m-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{m(m-1)x^{m-2}}{e^x} \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{m!}{e^x} = 0.$$

P o z n á m k a 5.13. Využití l'Hôpitalova pravidla je nevhodné, když pro danou limitu lze doporučit nějaký jednodušší přistup. Je např. zřejmé, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{99}+1}{x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^{99}}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^{99}}} = 1.$$

Pro dosažení stejného výsledku výlučně pomocí l'Hôpitalova pravidla měli bychom ho zcela zbytečně použit 99krát: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{99}+1}{x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{99x^{98}}{99x^{98}+98x^{97}+\cdots+1}$ atd.

Občas se stává, že l'Hôpitalovo pravidlo není účinné vzhledem k tomu, že při jeho využití nedochází ke zjednodušení původní limity.

PŘÍKLAD 5.14. Pro limitu $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$ využití l'Hôpitalova pravidla dává

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

atd. ad infinitum.

§ 5.5. Příklady využití l'Hôpitalova pravidla

§ 5.5.1. Významné limity

Pomocí l'Hôpitalova pravidla lze snadno odvodit tyto „tabulkové" limity typu $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1.$$

§ 5.5.2. Další příklady

$\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

0^∞ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0-} x 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0-}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0-}\frac{2^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln 2}{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

∞^0

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty}\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1,$$

∞^0

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty}\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1,$$

$0\cdot\infty$ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0,$$

0^0

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+}\left(e^{\ln x}\right)^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^0 = 1.$$

§ 5.6. Derivace vyšších řádů

Buďte $f : I \to \mathbb{R}$ funkce na intervalu I a x_0 je vnitřní bod I a nechť existuje $f'(x_0)$. Pak je f' funkcí, definovanou v okolí bodu x_0. Existuje-li derivace funkce f', nazýváme ji druhou derivace funkce f a značíme f'' anebo $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$. Obdobně se definují vyšší derivace f''', $f^{(4)}$ atd.[24]

Derivace vyšších řádů se významným způsobem využijí, mimo jiné, v konstrukci Taylorova polynomu (§ 7.2).

[24] Začínaje řádem $n = 4$ z praktických důvodů derivace značíme $f^{(n)}$.

§ 6

Vyšetřování průběhu funkce jedné proměnné

§ 6.1. Typické schema postupu vyšetřování průběhu funkce

Vyšetřit průběh funkce znamená analyticky zjistit co nejvíce jejich vlastností a tak si zodpovědět otázku „Jak se tato funkce chová?“. Při vyšetřování průběhu funkce obvykle provádíme řadu z následujících úkonů:

(1) Určíme *definiční obor* funkce a obor jejich hodnot.
(2) Určíme, jestli je funkce sudá, lichá nebo periodická;
(3) Zjistíme, jestli je omezená, vyšetříme jeji spojitost.
(4) Vypočítáme *průsečíky* s osou x a s osou y.
(5) Zjistíme intervaly, kde funkční hodnoty jsou kladné a kde záporné.
(6) Nalezneme *extrémy* funkce a zjistíme intervaly *monotonnosti* funkce.
(7) Nalezneme *inflexní body* a intervaly *konvexnosti* a *konkávnosti*.
(8) Určíme, zda má funkce *asymptoty* a pokud ano, vypíšeme jejich rovnice a je graficky znázorníme.
(9) Načrtneme graf funkce.

U některých kroků podstatným způsobem využíváme pojmů limity a derivace.

§ 6.2. Monotonnost a lokální extrémy

Pomocí pojmu derivace lze efektivně vyšetřovat charakter monotonnosti funkce jedné proměnné a její extremální hodnoty.

§ 6.2.1. Monotonnost funkce

Buď I otevřený interval. Monotonnost funkce lze ověřit podle znaménka směrnice tečny.

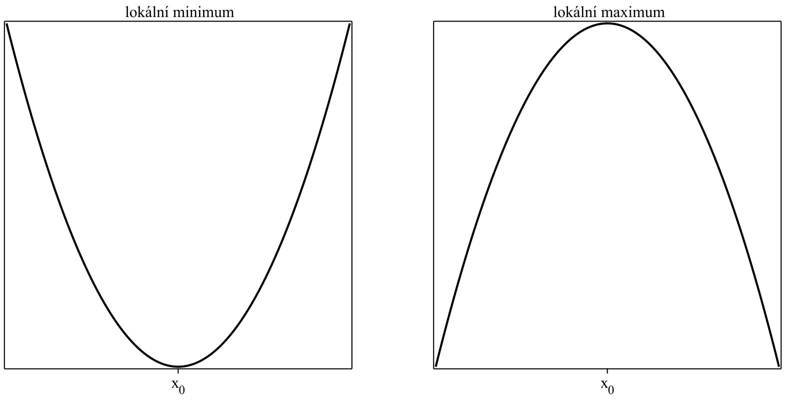
VĚTA 6.1. Nechť má funkce f na I derivaci. Pak platí:

(1) je-li $f'(x) > 0$ pro $x \in I$, pak je f je rostoucí na I;
(2) je-li $f'(x) < 0$ pro $x \in I$, pak je f je klesající na I.

Důkaz. Důkaz je založen na vzorci

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{6.1}$$

Vskutku, je-li $f'(x) > 0$ v bodě $x \in I$, pak vzhledem k (6.1) existuje dostatečně malé $\delta > 0$ takové, že bude $\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) > 0$ pro $0 < h < \delta$, což znamená, že je f rostoucí na intervalu $(x, x+\delta)$ atd. □



(A) (B)

OBRÁZEK 6.1

§ 6.2.2. Lokální extrém funkce

DEFINICE 6.2. Funkce f má v bodě x_0 *lokální minimum*, jestliže všude v některém okolí I bodu x_0 (s výjimkou bodu x_0) jsou hodnoty funkce větší než $f(x_0)$, tj.

$$f(x) > f(x_0) \text{ pro } x \in I \setminus \{x_0\}.$$

DEFINICE 6.3. Funkce f má v bodě x_0 *lokální maximum*, jestliže všude v některém okolí I bodu x_0 (s výjimkou bodu x_0) jsou hodnoty funkce menší než $f(x_0)$, tj.

$$f(x) < f(x_0) \text{ pro } x \in I \setminus \{x_0\}.$$

Skutečnost, že má funkce v nějakém bodě x_0 lokální minimum nebo maximum, znamená, že v nějakém malém okolí tohoto bodu má graf funkce tvar podobný znázorněnému na obrazcích 6.1a, 6.1b.

DEFINICE 6.4. Funkce má v bodě lokální *extrém*, jestliže je v tomto bodě její lokální minimum nebo maximum.

Slovo „lokální" v těchto definicích vyjadřuje skutečnost, že se jedná o chování funkce v určitém malém okolí (má-li funkce v bodě x_0 lokální maximum, neznamená to, že v blízkosti tohoto bodu není jiný bod maxima, avšak v dostatečné malém okolí bodu x_0 hodnoty funkce budou rozhodně menší, než $f(x_0)$).

§ 6.2.3. Stacionární body

Buď $f : I \to \mathbb{R}$ funkce na intervalu I.

DEFINICE 6.5. Bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

VĚTA 6.6 (Férmat; nutná podmínka pro lokální extrém). Buď x_0 vnitřní bod I takový, že f v x_0 nabývá lokálně maximální nebo minimální hodnoty. Pak, existuje-li $f'(x_0)$, musí být $f'(x_0) = 0$.

Např. $f(x) = x^2 + 1$ má minimum v $x_0 = 0$. Je to stacionární bod pro f, jelikož $f'(x_0) = 2x_0 = 0$. Funkce $g(x) = |x|$ má minimum v $x_0 = 0$, tečna v bodě $x_0 = 0$ neexistuje.

Poznámka 6.7. Existuje-li v stacionárním bodě tečna, je vždy vodorovná.

Poznámka 6.8. Splnění nutné podmínky $f'(x_0) = 0$ ještě nezaručuje, že je v daném bodě x_0 lokální extrém. Např. pro $f(x) = x^3$ je $f'(0) = 0$, avšak je to funkce neklesající (mimo bod 0 ryze rostoucí) a tudíž lokální extrémy nemá. Podmínka je tedy skutečně pouze nutnou, nikoliv postačující.

§ 6.2.4. Určení lokálního extrému pomocí derivací

§ 6.2.4.1. Určení lokálního extrému podle 1. derivace

Ověřit, zda v daném stacionárním bodě skutečně je lokální extrém, lze pomocí určení znaménka první derivace vyšetřované funkce.

VĚTA 6.9. Buď x_0 stacionární bod funkce f. Pak má funkce f má v x_0:

(1) lokální maximum, jestliže v tomto bodě mění f' znaménko z „+" na „–" (f roste a poté klesá).
(2) lokální minimum, jestliže v tomto bodě mění f' znaménko z „–" na „+" (f klesá a poté roste).

Jestliže ke změně znaménka derivace v bodě x_0 nedochází, nemá funkce v tomto bodě extrém.

§ 6.2.4.2. Určení lokálního extrému podle vyšších derivací

VĚTA 6.10. Nechť x_0 je stacionárním bodem a existuje $f'(x_0) = 0$. Nechť má f v bodě x_0 druhou derivaci. Pak platí:

(1) jestliže $f''(x_0) < 0$, pak má f v bodě x_0 lokální maximum
(2) jestliže $f''(x_0) > 0$, pak má f v bodě x_0 lokální minimum.

Poznámka 6.11. Lze doporučit jednoduchou *pomůcku k zapamatování* podmínky věty 6.10: $f(x) = x^2$ má v 0 minimum $(2 > 0)$, $f(x) = -x^2$ má v 0 maximum $(-2 < 0)$.

Jestliže $f''(x_0) = 0$, věta 6.10 neumožňuje rozhodnout o tom, zda v stacionárním bodě x_0 je nebo není lokální extrém funkce. V takových případech lze využít vyšších derivací.

VĚTA 6.12. Nechť má f v bodě x_0 konečnou derivaci $(n+1)$ho řadu $(n > 1)$ a platí

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0, \quad \dots \quad f^{(n)}(x_0) = 0, \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0. \tag{6.2}$$

Potom:

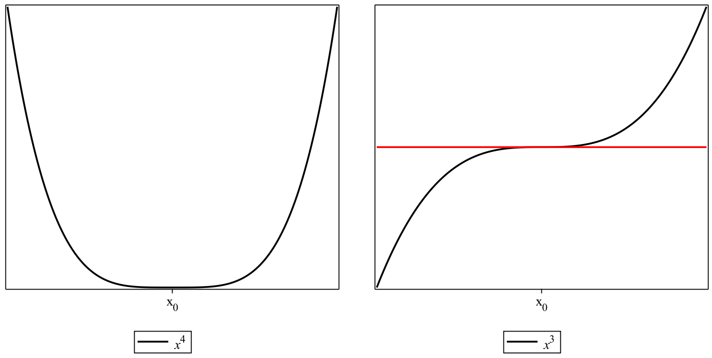
(1) je-li n liché, pak má f v bodě x_0 lokální extrém (minimum pro $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, maximum pro $f^{(n+1)}(x_0) < 0$)
(2) je-li n je sudé, nemá f v bodě x_0 lokální extrém.

Důkaz věty 6.12 je založen na Taylorově větě (věta 7.10). Věta 6.10 je důsledkem věty 6.12 pro $n = 1$.

PŘÍKLAD 6.13. Pro funkci $f(x) = x^4$ platí $f'(x) = 4x^3$; $f'(x_0) = 0$ pro $x_0 = 0$; $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$. Platí tedy $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Cislo $n = 3$ je liché a tudíž f v bodě 0 má lokální minimum.

PŘÍKLAD 6.14. Pro $f(x) = x^3$ je $f'(x) = 3x^2$; $f'(x_0) = 0$ pro $x_0 = 0$; $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6 > 0$. Číslo $n = 2$ je sudé, a proto nemá f v bodě 0 extrém.

Obrázek 6.2 znázorňuje skutečnosti, uvedené v příkladech 6.13 a 6.14.



(A) (B)

OBRÁZEK 6.2

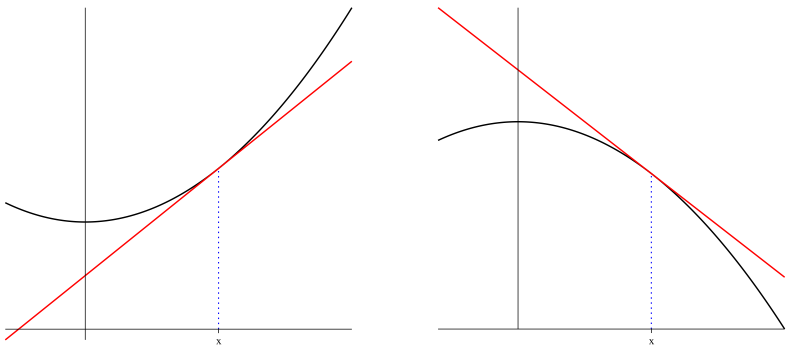
P o m ů c k a k z a p a m a t o v á n í podmínky (6.2): je-li první nenulová derivace v stacionárním bodě *sudého* řádu, pak se v jeho okolí funkce chová podle vzoru věty 6.10 (má minimum nebo maximum, je-li tato derivace kladná resp. záporná); v opačném případě v tomto bodě extrém není.

§ 6.3. Konvexnost a konkávnost, inflexní body

Buď f reálná funkce na otevřeném intervalu I, která má v každém bodě derivaci.[25]

DEFINICE 6.15. Funkce f se nazývá *konvexní* na I, jestliže její graf leží *nad* tečnou sestrojenou v bodě $(x, f(x))$ pro každé $x \in I$. Funkce f se nazývá *konkávní* na I, jestliže její graf leží *pod* tečnou sestrojenou v bodě $(x, f(x))$ pro každé $x \in I$.

Tyto vlastnosti určují směr zakřivení grafu funkce. Jejich geometrické znázornění nalezneme na obrázku 6.3.



(A) konvexní (B) konkávní

OBRÁZEK 6.3

Konvexnost a konkávnost lze rozlišit podle druhé derivace.

[25] Charakterizace konexnosti pomocí tečny vyžaduje existenci derivace funkce, tj. hladkost jejího grafu. Bez použití derivace se dá konvexnost funkce popsat tak, že graf funkce na každém intervalu (x_0, x_1) leží pod spojnicí krajních bodů tohoto intervalu. Obdobně pro konkávnost. Konkávanost a konvexnost nehladké funkce zde vyšetřovat nebudeme.

VĚTA 6.16. Nechť má funkce f na I druhou derivaci. Pak platí:

(1) je-li $f''(x) > 0$ pro $x \in I$, pak f je konvexní na I
(2) je-li $f''(x) < 0$ pro $x \in I$, pak f je konkávní na I.

Možná pomůcka k zapamatování podmínky věty 6.16 je podobná uvedené v poznámce 6.11: $f(x) = x^2$ je konvexní ($f'' = 2 > 0$ a $f(x) = -x^2$ je konkávní ($f'' = -2 < 0$).

Idea důkazu. Pro konvexní funkci směrnice tečny při zvetšení argumentu roste. Toto znamená, že f' je rostoucí funkce a tudíž v daném intervalu je $(f')' = f'' > 0$. □

DEFINICE 6.17. Bod x_0 je *inflexní* pro funkci f, jestliže v tomto bodě se konvexní charakter chování mění na konkávní nebo naopak, konkávní na konvexní.

Příkladem inflexního bodu je bod $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = x^3$ (viz obrazek 6.2).

VĚTA 6.18 (nutná podmínka pro inflexní bod). Je-li x_0 inflexní bod funkce f a existuje-li $f''(x_0)$, pak platí
$$f''(x_0) = 0.$$

Při vyšetřovaní konvexnosti funkce je tedy vhodné začít určením bodů x_0, *podezřelých z inflexe*, tj. takových, kde $f''(x_0) = 0$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje. O tom, zda takový bod je nebo není inflexním, rozhodneme podle znaménka druhé derivace funkce vlevo a vpravo od x_0 (věta 6.16): bod x_0 bude inflexním, jestliže v něm dochází ke změně znaménka f''. Jednu z postačujících podmínek inflexe poskytuje

VĚTA 6.19. Buď x_0 bod podezřelý z inflexe: $f''(x_0) = 0$. Jestliže
$$f'''(x_0) \neq 0,$$
pak je x_0 inflexním bodem funkce f.

Následující věta je upřesněním věty 6.12.

VĚTA 6.20. Nechť má f v bodě x_0 derivaci $(n+1)$ho řadu $(n > 1)$ a platí
$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0, \quad \dots \quad f^{(n)}(x_0) = 0, \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$
Potom:

(1) je-li n liché, pak má f v bodě x_0 lokální extrém (minimum pro $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, maximum pro $f^{(n+1)}(x_0) < 0$)
(2) je-li n sudé, pak je x_0 inflexním bodem funkce f.

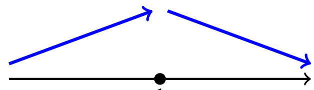
§ 6.4. Příklady

PŘÍKLAD 6.21. Vyšetřeme průběh funkce $f(x) = xe^{-x}$.

Řešení. Funkce je spojitá a má derivaci na $(-\infty, \infty)$. Je zřejmé, že $f(x) > 0$ pro $x > 0$, $f(x) < 0$ pro $x < 0$ a $f(0) = 0$. Pro vyšetření intervalů růstu a poklesu vypočtěme derivaci:
$$f'(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}. \tag{6.3}$$
Vzhledem k (6.3) je $f'(x)$ kladná pro $x < 1$ a záporná pro $x > 1$. Funkce je tedy rostoucí na $(-\infty, 1)$ a klesající na $(1, \infty)$. Je praktické si takové vlastnosti znázornit graficky (obrázek 6.4).

Jelikož v bodě 1 se růst funkce mění na pokles, podle věty 6.9[26] má funkce f v tomto bodě lokální maximum o hodnotě $f(1) = e^{-1} \doteq 0{,}3$.

[26]Jelikož ve vzorci (6.4) je vypočítaná druhá derivace f'', lze využit i věty 6.10: v bodě 1 má funkce f lokální maximum, neboť je $f''(1) = -e^{-1} < 0$.



OBRÁZEK 6.4

Směr zakřivení grafu této funkce (intervaly konvexnosti a konkávnosti) určeme podle druhé derivace. Zderivováním vzorce (6.3) obdržíme

$$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}. \tag{6.4}$$

Vidíme, že $f''(x)$ právě tehdy, když $x = 2$, přičemž $f''(x) < 0$ pro $x < 2$ a $f''(x) > 0$ pro $x > 2$. Funkce je tedy konvexní na $(2, \infty)$ a konkávní na $(-\infty, 2)$. Bod 2 je inflexním bodem.

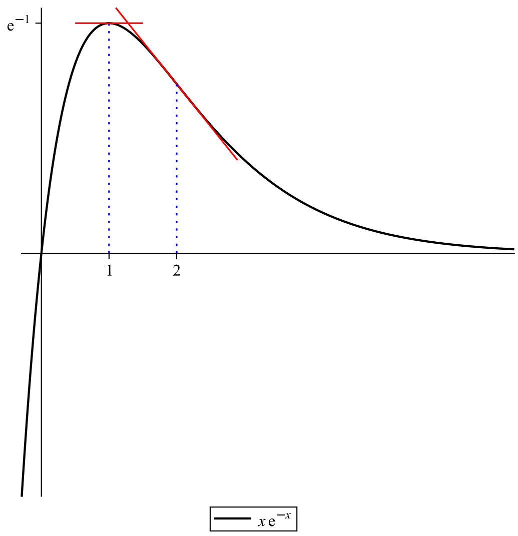
Nyní vyšetřeme, jak se funkce chová ve směru $-\infty$ a ∞. Pro $x \to +\infty$ s využitím l'Hôpitalova pravidla obdržíme

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

přičemž $f(x)$ je kladné pro kladná x. Pro $x \to -\infty$ bude

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = \lim_{t\to+\infty} (-t)e^t = -\lim_{t\to+\infty} te^t = -\infty.$$

Zjištěné informace již umožňují načrtnout graf funkce. Kreslení grafu je vhodné začít hodnotami funkce v důležitých bodech: $f(0) = 0$ (změna znaménka funkce), $f(1) = 1/e$ (bod lokálního maxima), $f(2) = 2/e^2$ (inflexní bod); dále pokračujeme podle schématu na obrázku 6.4 s využitím informací o směru zakřivení grafu. Výsledek je na obrázku 6.5. Všimněme si různých směrů zakřivení grafu v okolí inflexního bodu (pro věrnější zakreslení je vhodné sestrojit tečnu). $\square$



OBRÁZEK 6.5

Uveďme příklad využití vlastností derivace pro vyřešení jedné praktické úlohy.

ÚLOHA 6.22. Továrna vyrábí hliníkové kanystry o objemu V. Kanystry jsou ve tvaru válce. Je potřeba určit rozměry tak, aby náklady na použitý hliník byly nejnižší.

Řešení. Povrch válce S musí být minimální. Nechť má válec výšku h a poloměr podstavy r. Dle známých geometrických vzorců platí

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h, \quad V = \pi r^2 h.$$

Objem je vždy V, proto $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Dosadíme-li to do vzorce pro povrch válce, obdržíme funkci proměnné $r > 0$:

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Zderivováním dostaneme

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2}{r^2}\left(2\pi r^3 - V\right), \tag{6.5}$$

a rovnice pro určení stacionárních bodů bude mít tvar $2\pi r^3 = V$. Jediným stacionárním bodem je $r_* = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ a tudíž pouze v tomto bodě r_* se může měnit charakter monotonnosti funkce S. Funkce $r \mapsto r^3$ je rostoucí a proto, vzhledem k (6.5), je-li $r > r_*$ (resp. $r < r_*$), bude $S'(r) > 0$ (resp. $S'(r) < 0$). Toto znamená, že r_* je bodem lokálního minima pro S. Žádná jiná minima tato funkce nemá.[27]

Dosadíme-li teď $r = r_* = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ do vzorce pro h, obdržíme optimální hodnotu $h = h_*$:

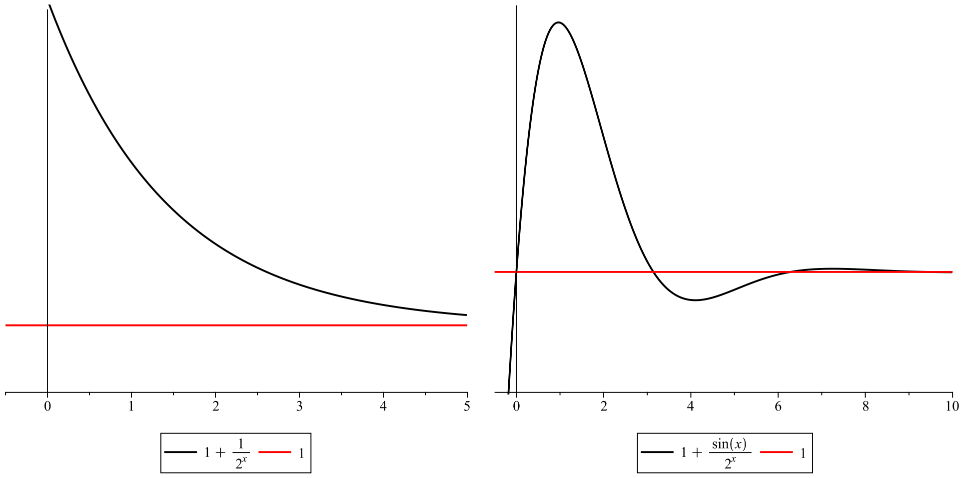
$$h_* = \frac{V}{\pi r_*^2} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V^2}{(2\pi)^2}\right)^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{4V^3}{\pi V^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2r_*.$$

Pro splnění stanovené podmínky optimální spotřeby materiálu se tedy musí vyrábět kanystry ve tvaru válce, jehož výška je dvojnásobkem poloměru podstavy. □

[27]Zde lze využit charakteru chování funkce v hraničních bodech intervalu $(0, +\infty)$: je zřejmé, že

$$\lim_{r\to 0^+} S(r) = +\infty, \quad \lim_{r\to+\infty} S(r) = +\infty,$$

a tudíž v jediném stacionárním bodě $r_* > 0$ bude funkce S mít minimální hodnotu.



(A) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0$ (monotonně) (B) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{2^x} = 0$ (nemonotonně)

OBRÁZEK 6.6. Typ funkce, mající vodorovnou asymptotu: má konečnou limitu v $+\infty$ anebo $-\infty$.

§ 6.5. Asymptoty, jejich druhy a způsob určení

§ 6.5.1. Vyznám asymptoty

U některých funkcí lze pozorovat, že pro dostatečně velké hodnoty argumentu se její vývoj postupně stabilizuje a čim dal, tím vice se graf podobá přímce. V takových případech má funkce tzv. asymptotu. Znalost asymptoty významně pomáhá při zobrazení funkce na grafu.

Buď f funkce definovaná na neohraničeném intervalu.

DEFINICE 6.23. *Asymptota* je přímka, ke které se graf funkce v $+\infty$ nebo $-\infty$ neustále blíží. Je-li $y = kx + b$ rovnicí této přímky, znamená to, že platí

$$f(x) - kx - b \to 0 \tag{6.6}$$

pro $x \to +\infty$ (asymptota v $+\infty$) anebo pro $x \to -\infty$ (asymptota v $-\infty$).

§ 6.5.2. Druhy asymptot

Asymptoty bývají se směrnicí anebo bez směrnice, to jest svislé.

§ 6.5.2.1. Asymptoty se směrnicí

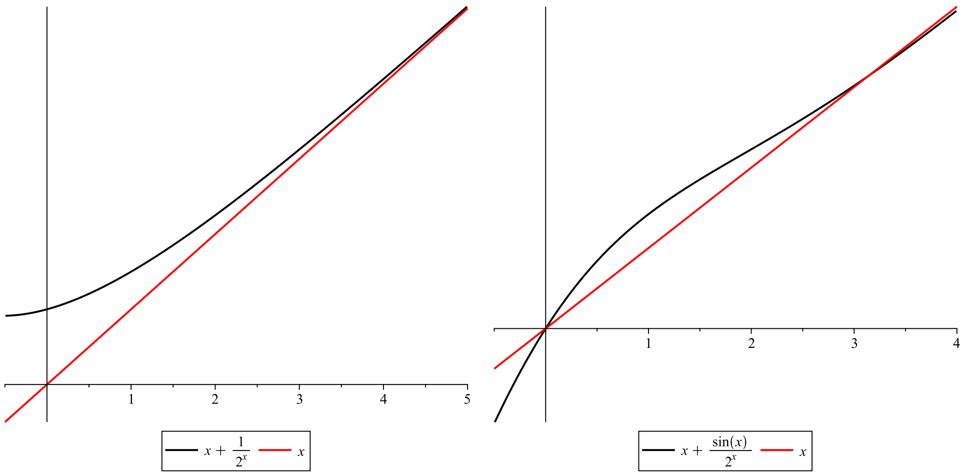
DEFINICE 6.24. *Asymptotou se směrnicí* rozumíme asymptotu o rovnicí tvaru $y = kx + b$.

V závislosti na směrnicí může být taková asymptota *šikmou* ($k \neq 0$) anebo *vodorovnou* ($k = 0$). Z definice 6.23 je zřejmé, že vodorovnou asymptotu má funkce, pro níž existuje konečná limita v $+\infty$ anebo $-\infty$.

PŘÍKLAD 6.25. Funkce $f(x) = 2^{-x}$, $g(x) = 2^{-x} \sin x$ mají vodorovnou asymptotu $y = 0$ pro $x \to +\infty$ (obrázek 6.6).

Asymptotu *šikmou* má funkce, jež konečnou limitu v $\pm\infty$ nemá, avšak chová se v $+\infty$ nebo $-\infty$ skoro jako lineární funkce. Přesněji řečeno, existují konstanty k a b takové, že pro $x \to +\infty$ anebo $x \to -\infty$ platí (6.6). Vodorovná asymptota formálně je speciálním případem šikmé pro směrnici $k = 0$.

Šikmé asymptoty hledáme podle následujícího pravidla.



(A) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0$ (monotonně) (B) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{2^x} = 0$ (nemonotonně)

OBRÁZEK 6.7. Typ funkce, mající šikmou asymptotu: skoro lineární v $+\infty$ anebo $-\infty$.

.

VĚTA 6.26. Existují-li limity

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b \tag{6.7}$$

anebo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = b \tag{6.8}$$

pak je přímka s rovnicí $y = kx + b$ asymptotou pro funkci f při $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$)

Pro určení šikmých asymptot ověřujeme existenci limit (6.7) a (6.8).

Poznámka 6.27. Může se stát, že má funkce různé asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$ (viz příklady 6.34, 6.35).

Důkaz věty 6.26. Uvažujme pouze směr $+\infty$. Nechť má funkce $y = f(x)$ v $+\infty$ asymptotu $y = kx + b$. Znamená to, že se graf funkce f k této přímce ve směru $+\infty$ neustále blíží a tudíž dle definice 6.23 musí platit

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0.$$

Jinými slovy, $f(x) - kx - b = \alpha(x)$, kde $\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Pak $f(x) - kx = b + \alpha(x)$ a tudíž

$$\frac{f(x)}{x} - k = \frac{b + \alpha(x)}{x} \to 0$$

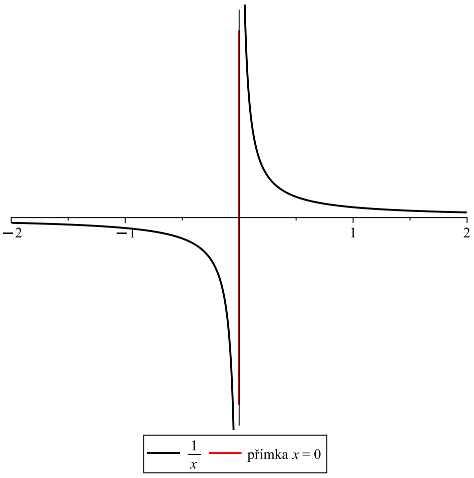
pro $x \to +\infty$. Proto je $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$. Hodnotu b pak nalezneme ze vztahu

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b,$$

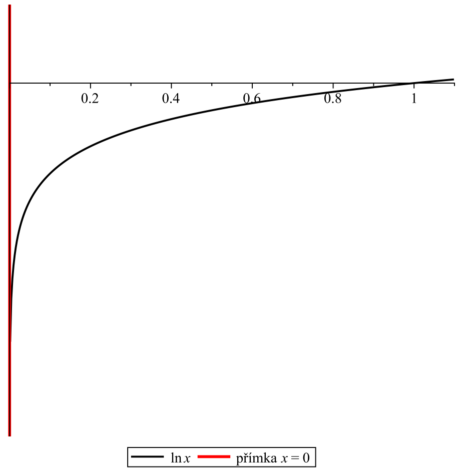
jelikož dle předpokladu tato limita existuje. □

PŘÍKLAD 6.28. Funkce $f(x) = x + 2^{-x}$, $g(x) = x + 2^{-x} \sin x$ mají asymptotu $y = x$ pro $x \to +\infty$ (obrázek 6.7).

Vysvětlení. Stačí si všimnout, že $f(x) - x \to 0$ pro $x \to +\infty$. □



(A) $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty$



(B) $\lim_{x\to 0+}\ln x = -\infty$

OBRÁZEK 6.8. Typ funkce, mající svislou asymptotu: má body nespojitosti; v nějakém z bodů nespojitosti alespoň jedna z jednostranných limit je nekonečná

§ 6.5.2.2. Asymptoty bez směrnice (svislé)

Svislá přímka s rovnicí $x = x_0$ bude asymptotou funkce f pro $x \to x_0\pm$, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit $\lim_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ je nevlastní.

PŘÍKLAD 6.29. Svislá přímka $x = 0$ je asymptotou funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \to 0\pm$ a funkce $g(x) = \ln x$ pro $x \to 0+$ (obrázek 6.8).

PŘÍKLAD 6.30. Určeme asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}.$$

Řešení. Funkce má bod nespojitosti a pravděpodobně i svislou asymptotu. Bodem nespojitosti je $x_0 = -1$. Vyšetřeme, jak se funkce chová v blízkosti bodu -1:

(1) pro $x \to -1$ s $x > -1$ je $\frac{2x-1}{x+1} = 2\frac{x-\frac{1}{2}}{x+1} < 0$ a tudíž $\frac{2x-1}{x+1} \to -\infty$;
(2) pro $x \to -1$ s $x < -1$ je $\frac{2x-1}{x+1} = 2\frac{x-\frac{1}{2}}{x+1} > 0$ a $\frac{2x-1}{x+1} \to +\infty$.

Je tedy $\lim_{x\to -1+}\frac{2x-1}{x+1} = -\infty$, $\lim_{x\to -1-}\frac{2x-1}{x+1} = +\infty$ a tudíž je přímka s rovnicí $x = -1$ pro tuto funkci asymptotou.

Dále je zřejmé, že má f konečnou limitu v $+\infty$ a $-\infty$:

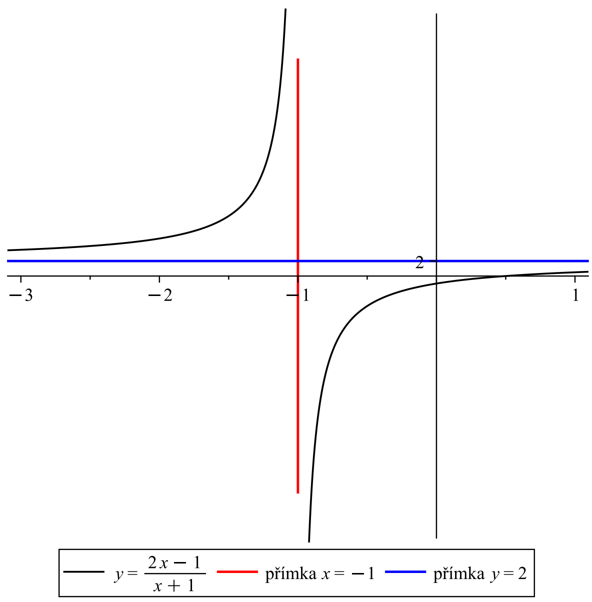
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 2,$$

a proto je vodorovná přímka $y = 2$ pro tuto funkci asymptotou (obrázek 6.9).

Šikmé asymptoty funkce nemá (v rovnici $y = kx + b$ je $k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\frac{2x-1}{x+1} = 0$, což dává asymptotu vodorovnou). □

§ 6.6. Příklady vyšetření průběhu funkce

PŘÍKLAD 6.31. Vyšetřeme průběh funkce $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + x$



OBRÁZEK 6.9

Řešení. Definičním oborem je $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. Je zřejmé, že $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$ a svislá přímka s rovnicí $x = 2$ je asymptotou. Vypočtěme derivaci:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^4}2(x-2) + 1 = -\frac{2}{(x-2)^3} + 1 = \frac{(x-2)^3 - 2}{(x-2)^3}.$$

Stacionární body určeme z rovnice $(x-2)^3 = 2$, jediným stacionárním bodem je[28] $x = 2 + \sqrt[3]{2} \doteq 2 + 1{,}3 = 3{,}3$. Typ extrému určeme podle druhé derivace, jíž rovněž budeme potřebovat pro vyšetření konvexnosti. Máme

$$f''(x) = -2\left((x-2)^{-3}\right)' = 6(x-2)^{-4} > 0$$

pro $x \neq 2$. Proto je funkce všude konvexní a nabývá ve stacionárním bodě $2 + \sqrt[3]{2}$ lokálního minima o hodnotě

$$\begin{aligned} f(2+\sqrt[3]{2}) &= \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2} + 2 + \sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^2\sqrt[3]{2}} + 2 + \sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^3} + 2 + \sqrt[3]{2} \\ &= 2 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \doteq 2 + \frac{3}{2}\cdot 1{,}3 = 3{,}95. \end{aligned}$$

Ověřme, zda má funkce asymptoty, odlišné od již nalezené svislé procházející bodem nespojitosti. Je-li pro $x \to +\infty$ asymptota ve tvaru $y = kx + b$, musí být

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\,(x-2)^2} + 1\right) = 1,$$

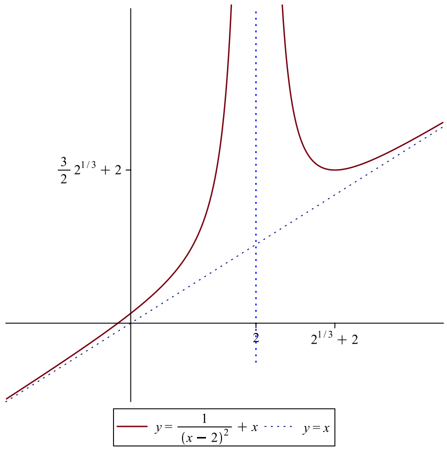
[28] Hodnotu $\sqrt[3]{2}$ lze přibližně odhadnout pomocí *diferenciálu* funkce $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$ (§ 7.1.4), to jest s využitím vzorce

$$u(x) - u(x_0) \doteq u'(x_0)(x - x_0),$$

kde položíme $x = 2$, $x_0 = 1$:

$$\sqrt[3]{2} \doteq 1 + \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(2-1) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \doteq 1{,}3.$$

Pak bude stacionární bod $x = 2 + \sqrt[3]{2} \doteq 3{,}3$.



OBRÁZEK 6.10. Graf funkce $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + x$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{(x-2)^2} + x - x \right) = 0.$$

Asymptotou je tedy přímka $y = x$. Znalost asymptot nám významné pomůže při sestrojení grafu (obrázek 6.10).

PŘÍKLAD 6.32. Vyšetřeme průběh funkce $f(x) = x^x$ na množině $(0, +\infty)$.

Řešení. Definičním oborem je neomezený otevřeny interval $(0, +\infty)$, v bodě 0 není funkce definována (vzniká tam neurčitý výraz typu 0^0). V oboru $(0, +\infty)$ nabývá funkce kladných hodnot. Abychom zjistili, jak se funkce chová, když $x \to 0+$ a $x \to +\infty$, potřebujeme určit odpovídajících limity. Pro $x \to 0+$ bude

0^∞

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to 0+} x \ln x} = e^0 = 1,$$

jelikož dle l'Hôpitalova pravidla je

$0 \cdot \infty$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+} x = 0$$

a funkce $x \mapsto e^x$ je spojitá. Pro $x \to \infty$ je, samozrejmě, $\lim_{x\to+\infty} x^x = +\infty$.

Vypočtěme derivaci:

$$f'(x) = (x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\,(x\ln x)' = x^x\,(\ln x + 1) = f(x)\,(\ln x + 1)\,. \tag{6.9}$$

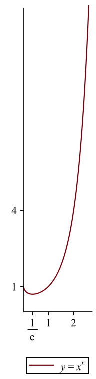
Pro $x > 0$ je $f(x) > 0$, a tudíž znaménko derivace $f'(x)$ je určeno znaménkem výrazu $\ln x + 1$, jenž je kladný pro $x > \frac{1}{e}$ a záporný pro $x < \frac{1}{e}$ (jelikož logaritmus přirozený je funkcí rostoucí, $\ln x > -1$ znamená, že $x > e^{-1}$). V jediném stacionárním bodě $x = \frac{1}{e}$ tedy je lokální minimum o hodnotě

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}. \tag{6.10}$$

Pro zakreslení grafu je vhodné alespoň přibližně odhadnout hodnotu minima (6.10): jelikož $e \doteq 2{,}7 \doteq 3$, bude $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} \doteq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Pro odhad $\sqrt[3]{3}$ lze využít diferenciálu funkce $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$ (§ 7.1.4), což vede na vzorec

$$u(x) - u(x_0) \doteq u'(x_0)(x - x_0)$$

s $x = 3$, $x_0 = 1$: $\sqrt[3]{3} \doteq 1 + \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(3-1) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. Proto je $f\left(\frac{1}{e}\right) \doteq \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \doteq \frac{3}{5} = 0{,}6$.



OBRÁZEK 6.11. Graf funkce $f(x) = x^x$

Pro zjištěni směru zakřivení grafu vypočítáme druhou derivaci. K tomuto účelu použijme již vypočtenou derivaci první (viz (6.9)):

$$f''(x) = f'(x)(\ln x + 1) + f(x)\frac{1}{x} = f(x)\,(\ln x + 1)^2 + f(x)\frac{1}{x} > 0,$$

neboť $f(x) > 0$. Toto znamená, že je f na $(0, \infty)$ konvexní.

Na základe zjištěných informací po přidaní vhodných pomocných bodů (např. $f(1) = 1$, $f(2) = 4$) lze schematicky načrtnout graf (obrázek 6.11). S růstem x roste tato funkce mimořádně rychle. Např. $f(4) = 256$, $f(5) = 3125$.

PŘÍKLAD 6.33. Vyšetřeme průběh funkce $f(x) = \frac{x^3}{2x^2+3}$.

Řešení. Definičním oborem je $(-\infty, \infty)$. Pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$ máme

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x)^2 + 3} = \frac{-x^3}{2x^2 + 3} = -\frac{x^3}{2x^2 + 3} = -f(x).$$

Funkce je lichá, její graf je souměrný podle počátku.

Pro vyšetření monotonnosti vypočtěme derivaci:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{2x^2 + 3}\right)' = \frac{3x^2(2x^2 + 3) - x^3 4x}{(2x^2 + 3)^2} = \frac{2x^4 + 9x^2}{(2x^2 + 3)^2}.$$

Je zřejmé, že $f'(x) > 0$ pro všechna $x \neq 0$, proto je funkce neklesající na $(-\infty, \infty)$, přičemž mimo bod 0 je funkce ryze rostoucí.

Jediným stacionárním bodem je $x = 0$. V tomto bodě lokální extrém není, neboť je funkce f monotonní, a ke změně znaménka derivace nedochází. Lokální extrémy tedy funkce nemá žádné.

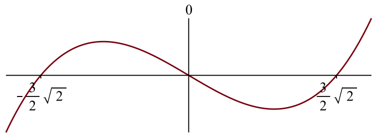
Intervaly konvexnosti a konkávnosti zjistíme podle znaménka f''. Vypočtěme druhou derivaci:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(8x^3 + 18x)(2x^2 + 3)^2 - (2x^4 + 9x^2)2(2x^2 + 3)4x}{(2x^2 + 3)^4} \\ &= \frac{(8x^3 + 18x)(2x^2 + 3) - 8(2x^4 + 9x^2)x}{(2x^2 + 3)^4} = \frac{-12x^3 + 54x}{(2x^2 + 3)^3} = \frac{-x(54 - 12x^2)}{(2x^2 + 3)^3}. \end{aligned}$$

Jelikož je vždy $(2x^2 + 3)^3 > 0$, znaménko $f''(x)$ určuje pouze člen $-x(54 - 12x^2) = -6x(9 - 2x^2)$. Intervaly konvexnosti a konkávnosti zjistíme podle znaménka derivace f'', kterou upravíme takto:

$$f''(x) = \frac{-x(54-12x^2)}{(2x^2+3)^3} = \frac{-6x(9-2x^2)}{(2x^2+3)^3} = \frac{-12x\left(\frac{9}{2}-x^2\right)}{(2x^2+3)^3} = 12\frac{x\left(x-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}{(2x^2+3)^3}.$$

Rovnost $f''(x) = 0$ platí pravě pro $x = 0$, $x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. V každém z těchto bodů nastává změna znaménka f'', proto jsou to inflexní body (obrázky 6.12, 6.13b).



OBRÁZEK 6.12. Změna znaménka f''

Dále vypočtěme limity v nevlastních bodech $+\infty$ a $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}} = -\infty.$$

Mimo jiné, je to funkce neomezená.

Zjistěme, zda má funkce asymptoty. Má-li funkce asymptoty tvaru $y = kx+b$ pro $x \to +\infty$, musí být

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x(2x^2+3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^3+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+3} - \frac{x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-2x^3-3x}{2(2x^2+3)} = -\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2(2x^2+3)} = 0$$

Stejné hodnoty k a b vychází pro $x \to -\infty$. Asymptotou pro $x \to \pm\infty$ je tedy přímka $y = kx + b$ s $k = \frac{1}{2}$, $b = 0$:

$$y = \frac{x}{2}.$$

Zjištěné vlastnosti lze uplatnit při sestrojení grafu funkce (obrázek 6.13). □

PŘÍKLAD 6.34. Vyšetřeme průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - x.$$

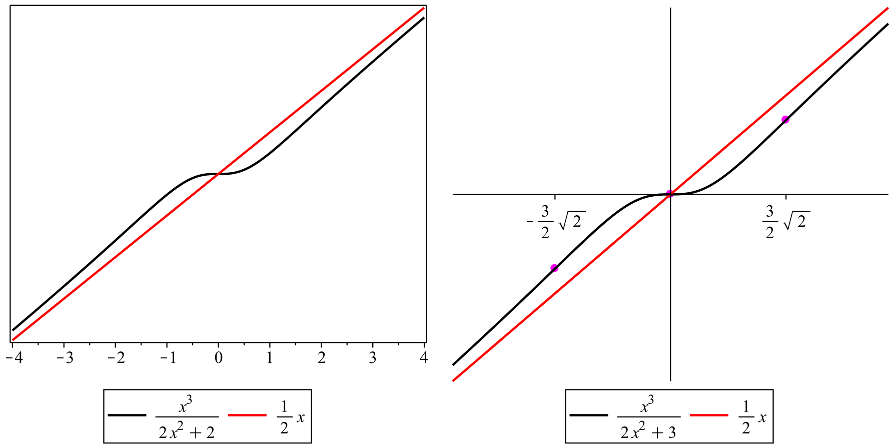
Řešení. Definičním oborem je $(-\infty, \infty)$. Pro vyšetření monotonnosti vypočtěme derivaci:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - 1 = \frac{1-x^2-1}{x^2+1} = -\frac{x^2}{x^2+1} < 0.$$

Tudíž je funkce f všude klesající. Lokální extrémy proto nejsou. Dále pomocí druhé derivace zjistěme směr zakřivení grafu. Jelikož

$$f''(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2},$$

je funkce konkávní pro $x > 0$ a konvexní pro $x < 0$. Inflexním bodem je $x = 0$.



(A) (B)

OBRÁZEK 6.13

Podívejme se, jak se funkce chová v $\pm\infty$. Vzhledem k tomu, že $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$, můžeme si všimnout, že[29] platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{\pi}{2}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{\pi}{2}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

to jest přímka $y=\frac{\pi}{2}-x$ je pro f asymptotou při $x\to+\infty$ a $y=-\frac{\pi}{2}-x$ je asymptotou při $x\to-\infty$.

Kreslení grafu (obrázek 6.15a) začneme nějakým jeho významným bodem. Přichází v úvahu nulový bod $(0,0)$ (jelikož $f(0)=0$). Navíc je funkce lichá. Jiné nulové body funkce nemá vzhledem k tomu, že je ryze klesající. □

Uvažujme ještě jeden podobný příklad (všimněme si však odlišnosti!).

PŘÍKLAD 6.35. Vyšetřeme průběh funkce

$$f(x)=\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}.$$

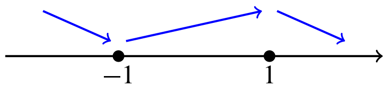
Řešení. Definičním oborem je $(-\infty,\infty)$. Jelikož

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}=\frac{2-x^2-1}{2(x^2+1)}=\frac{1-x^2}{2(x^2+1)}.$$

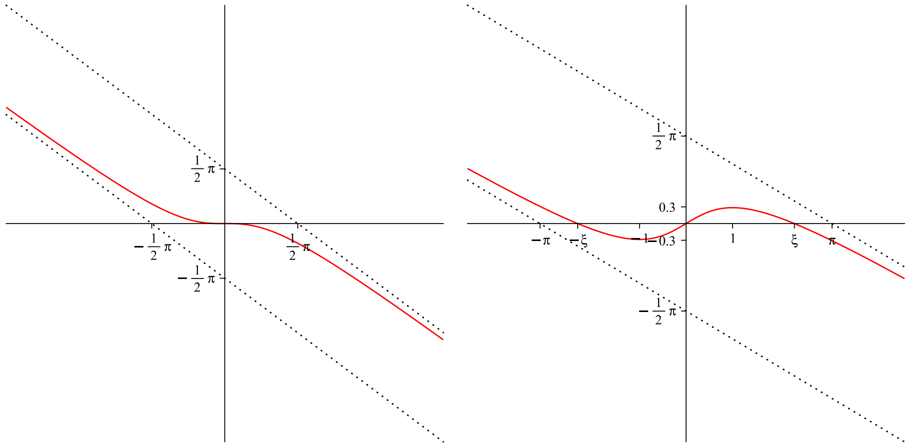
má funkce dva stacionární body $x=\pm1$. Znaménko derivace určíme, zapíšeme-li ji ve tvaru $f'(x)=-\frac{(x-1)(x+1)}{2(x^2+1)}$. Obdržíme, že $f'(x)<0$ pro $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ a $f'(x)>0$ pro $x\in(-1,1)$. Výsledné intervaly monotonnosti si můžeme označit graficky (obrázek 6.14). V bodě -1 pak bude lokální minimum a v 1 lokální maximum.

Zderivujeme-li podruhé, vychází $f''(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$. Funkce je konkávní pro $x>0$ a konvexní pro $x<0$, bod 0 je inflexním.

[29] Samozřejmé, mohli bychom zde postupovat i bezprostředně podle věty 6.26: platí $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}-1=-1$, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x-x-(-x)=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}$, odkud obdržíme asymptoty $y=-x+\frac{\pi}{2}$ pro $x\to+\infty$ a $y=-x-\frac{\pi}{2}$ pro $x\to-\infty$.



OBRÁZEK 6.14. Diagram monotonnosti funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$.



(A) $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$ (B) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$

OBRÁZEK 6.15

Podobně příkladu 6.34 zjistíme asymptoty $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$ pro $x \to +\infty$ a $y = -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$ pro $x \to -\infty$.

Kreslení grafu začneme nulovým bodem $(0, 0)$, dále použijme bod lokálního maxima $(1, f(1))$, kde je $f(1) = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \doteq 0{,}3$. Bod lokálního minima bude $(-1, f(-1)) = (1, -f(-1))$ (funkce je lichá).

Při poklesu od hodnoty lokálního maxima v bodě $x = 1$ s růstem x se křivka neustále přibližuje k asymptotě $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$. Jelikož hodnota maxima je kladná a funkce f je spojitá, musí existovat nějaký bod $\xi > 1$, kde je $f(\xi) = 0$. Asymptota $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$ osu x protíná při $x = \pi$, tudíž je $1 < \xi < \pi$. Na $(-\infty, 0)$ křivku kreslíme podle souměrnosti (obrázek 6.14). $\square$

§ 7

Přibližné určení hodnoty funkce jedné proměnné

§ 7.1. Diferencovatelnost a diferenciál

§ 7.1.1. Diferencovatelnost funkce

DEFINICE 7.1. Funkce f je *diferencovatelná* v bodě x_0, jestliže existuje konstanta k taková, že platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-kh}{h} = 0. \tag{7.1}$$

VĚTA 7.2. Funkce jedné proměnné $f : I \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě x_0 právě tehdy, když má v tomto bodě konečnou derivaci.

Diferencovatelnost funkce znamená, že v okolí daného bodu ji lze libovolně přesně aproximovat lineární funkcí, jejíž grafem je tečna v tomto bodě (dle věty 7.2 číslo k v (7.1) je rovno $f'(x_0)$, což je směrnice tečny v tomto bodě).

§ 7.1.2. Diferenciál

Nechť f má v bodě x_0 derivaci. *Diferenciálem* funkce f v bodě x_0 chápeme vyraz

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x,$$

kde symboly $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}f(x_0)$ mají následující vyznám:

(1) $\mathrm{d}x$ je *nekonečné malý* přírůstek argumentu v okolí bodu x_0;
(2) $\mathrm{d}f(x_0)$ je odpovídající přírůstek hodnoty funkce f.

Uvedený vztah obdržíme, budeme-li vzorec

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = f'(x_0)$$

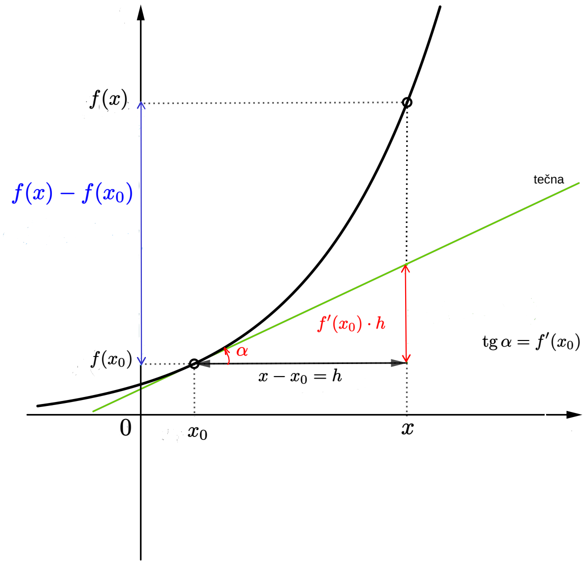
formálně chápat jako zlomek a vynásobíme obě dvě strany rovnosti členem $\mathrm{d}x$. Matematicky precizní definice diferenciálu zní takto.

DEFINICE 7.3. *Diferenciálem* funkce f v bodě x_0 se nazývá lineární funkce $h \mapsto \mathrm{d}f(x_0)(h) = kh$, kde hodnota konstanty k je taková, že platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-kh}{h} = 0.$$

Víme-li, že má funkce f v bodě x_0 derivaci, vzhledem k větě 7.2 lze definici 7.3 nahradit následující.

DEFINICE 7.4. Lineární funkce $h \mapsto f'(x_0)\,h$ se nazývá *diferenciálem* funkce f v bodě x_0.



OBRÁZEK 7.1

Diferenciál $f'(x_0)\,h$ vyjadřuje hlavní část přírůstku funkce $f(x_0 + h) - f(x_0)$, odpovídajícího změně argumentu h:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)\,h + \alpha(h),$$

kde $\alpha(h) \to 0$ pro $h \to 0$. Zanedbáme-li $\alpha(h)$ pro malá h, vychází

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \doteq f'(x_0)\,h.$$

Tohoto vzorce lze využít pro přibližný výpočet přírůstku funkce.

VĚTA 7.5. Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak pro malé hodnoty h platí vzorec

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \doteq \mathrm{d}f(x_0)(h), \tag{7.2}$$

přičemž chyba, jíž využitím tohoto vzorce dopustíme, směruje k 0 při zmenšení h.

Jinými slovy, pro x blízké k x_0 platí

$$f(x) - f(x_0) \doteq \mathrm{d}f(x_0)(x - x_0), \tag{7.3}$$

kde člen $\mathrm{d}f(x_0)(x - x_0)$ je přibližným vyjádřením chyby, jíž se dopustíme, nahradíme-li $f(x)$ hodnotou $f(x_0)$.

Diferenciál v bodě x_0 je tedy lineární funkce, jež v tomto bodě napodobuje funkci f nejlépe („lineární část“ funkce f). Lze pak dokázat, že k v definici bude rovné $f'(x_0)$, to jest směrnici tečny. Geometricky to znamená, že nahradíme-li část grafu funkce f v malém okolí bodu $(x_0, f(x_0))$ nějakou přímkou, nejmenší chyby se dopustíme, když to bude tečná přímka v tomto bodě.

§ 7.1.3. Geometrická interpretace diferenciálu

Směrnice tečny v bodě $(x_0, f(x_0))$ je $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha$ (viz obrázek 7.1). Připomeňme si také, že pro libovolné h je

$$f'(x_0)h = \mathrm{d}f(x_0)(h).$$

Z obrázku 7.1 je patrné, že pro x blízké k x_0 délky modré a červené úseček se liší málo, tj. $f(x) - f(x_0)$ je blízké k hodnotě $f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, což je hodnota diferenciálu $\mathrm{d}f(x_0)(x - x_0)$.

Tudíž pro x blízké k x_0 platí vzorec

$$f(x) - f(x_0) \doteq f'(x_0)(x - x_0), \tag{7.4}$$

jenž znamená totéž, co (7.3). Jelikož rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě x_0 je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

vzorec (7.4) lze obdržet i tak, že v okolí bodu x_0 přibližně nahradíme křivku tečnou, to jest místo $f(x)$ vezmeme hodnotu y z rovnice tečny:

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{7.5}$$

což je shodné s (7.4).

§ 7.1.4. Přibližné určeni hodnoty funkce pomocí diferenciálu

Pro přibližné určení hodnoty funkce v případech, když nám stačí aproximace pomocí lineárních funkcí, lze využit věty 7.5.

PŘÍKLAD 7.6. Určeme přibližně hodnotu $\sqrt[3]{67}$.

Řešení. Využijme vzorce (7.2):

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \doteq \mathrm{d}f(x_0)(h).$$

Vezmeme-li $f(x) = \sqrt[3]{x}$, pak zadaný ukol znamená, že přibližně počítáme $f(67)$.

Zvolme $x_0 = 64$. Pak $f(x_0) = \sqrt[3]{64} = 4$. Body $x = 67$ a $x_0 = 64$ lze považovat za relativně blízké, $h = x - x_0 = 3$, a podle vzorce (7.2) bude

$$\sqrt[3]{67} - \sqrt[3]{64} = f(x_0 + h) - f(x_0) \doteq \mathrm{d}f(x_0)(h).$$

Jelikož $f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, máme

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 = \frac{1}{3 \cdot 16} \cdot 3 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

a proto $\sqrt[3]{67} - \sqrt[3]{64} \doteq \frac{1}{16}$, odkud obdržíme

$$\sqrt[3]{67} \doteq \sqrt[3]{64} + \frac{1}{16} = 4 + 0{,}0625 = 4{,}0625.$$

Pro porovnání, dle kalkulačky vychází $\sqrt[3]{67} \doteq 4{,}0615\ldots$. □

PŘÍKLAD 7.7. Určeme přibližně hodnotu $\ln 2$.

Řešení. Lze využit vzorce (7.3)

$$f(x) - f(x_0) \doteq \mathrm{d}f(x_0)(x - x_0)$$

s $f(x) = \ln x$. Pak bude $\ln 2 = f(2)$. Víme, že $\ln e = 1$, proto zvolme $x_0 = e$, $x = 2$. Jelikož je $2 < e < 3$ (důsledek 2.33), lze body 2 a e považovat za dostatečně blízké a očekávat rozumnou přesnost vzorce. Zderivováním a dosazením obdržíme

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{e},$$

a proto dle vzorce (7.3) bude

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ &= f(e) + \frac{1}{e}(2 - e) = 1 + \frac{1}{e}(2 - e) = \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Takto obdržíme odhad $\ln 2 = f(2) \doteq \frac{2}{e} \doteq 0{,}74$ (ve skutečnosti je $\ln 2 \doteq 0{,}693$). □

§ 7.2. Taylorův vzorec

Velmi důležitým nástrojem matematické analýzy je Taylorův vzorec, jenž umožňuje hladkou funkci v okolí daného bodu libovolně přesně aproximovat polynomy.

§ 7.2.1. Idea aproximace funkce polynomem

Vzorec (7.4), který vzniká při aproximaci hodnoty funkce pomocí diferenciálu, lze zapsat ve tvaru (7.5), což znamená, že pro x v okolí bodu x_0 je $f(x) \doteq p(x)$, kde

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{7.6}$$

Takové p je lineární funkcí, to jest polynomem stupně 1, přičemž platí

$$f(x_0) = p(x_0), \quad f'(x_0) = p'(x_0), \tag{7.7}$$

a rozdíl mezi $f(x)$ a $p(x)$ směruje k 0:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - p(x)) = \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)) = 0.$$

Platí dokonce silnější vlastnost

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{1} = 0. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Poslední rovnost, kterou jsme obdrželi[30] pomocí l'Hôpitalova pravidla pro limitu typu $\frac{0}{0}$, znamená, že při $x \to x_0$ bude $f(x) - p(x) \to 0$ rychleji, než $x - x_0 \to 0$.

Poznámka 7.8. Je užitečné si uvědomit význam podmínek (7.7): graf polynomu p dle nich musí procházet bodem $(x_0, f(x_0))$ a navíc mít v tomto bodě stejnou směrnici tečny $f'(x_0)$.

Nabízí se otázka, jestli nemůžeme na stejný výsledek přijít, budeme-li se snažit v okolí bodu x_0 přiblížit $f(x)$ nějakým polynomem stupně 1

$$p(x) = a_1 x + a_0$$

tak, aby platily rovnosti (7.7) a limita v (7.8) byla rovna 0. Je tomu skutečně tak: jelikož pro splnění (7.7) musí být $f(x_0) = a_1 x_0 + a_0$, $f'(x_0) = a_1$, obdržíme $p(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$, což vede na již odvozený vzorec (7.6).

Nestačí-li nám hrubé přiblížení pomocí lineárních funkcí, mohli bychom takto postupovat i pro získání aproximace ve tvaru kvadratického polynomu, která bude, očividně, přesnější. Vskutku, budeme-li přibližovat $f(x)$ polynomem stupně 2, je logické požadovat, aby platilo

$$f(x_0) = p(x_0), \quad f'(x_0) = p'(x_0), \quad f''(x_0) = p''(x_0). \tag{7.9}$$

Vzhledem k uvedenému je přirozené takovou kvadratickou aproximaci hledat rovnou ve tvaru[31]

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + A(x - x_0)^2.$$

Jelikož $p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0) + 2A(x_0 - x_0) = f'(x_0)$, $p''(x_0) = 2A$, první dvě podmínky v (7.9) jsou splněny, a pro splnění té třetí musí být $A = \frac{1}{2} f''(x_0)$. Obdržíme tak, že pro x blízká k x_0 je $f(x) \doteq p(x)$ s

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2. \tag{7.10}$$

[30] za předpokladu, že f' je spojitou funkcí v bodě x_0

[31] Mohli bychom hledat p i ve tvaru $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Vezmeme-li pro jednoduchost $x_0 = 0$, bude $p(0) = a_0$, $p'(0) = a_1$, $p''(0) = 2a_2$, a pro splnění (7.9) musí být $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$, což vede na (7.10) s $x_0 = 0$. Pro $x_0 \neq 0$ polynom (7.10) obdržíme z předchozího po substitucí $x - x_0 = t$.

Navíc, podobně (7.8), dle l'Hôpitalova pravidla pro polynom (7.10) platí

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{2}=0,$$

je-li známo, že f'' je v bodě x_0 spojitá.

Má-li funkce f v bodě x_0 spojité derivace vyšších řádů, takto můžeme pokračovat pro získání aproximací polynomy stupňů 3, 4 atd.

§ 7.2.2. Konstrukce Taylorova polynomu

Buď f funkce, jež má v bodě x_0 derivace všech řádů. Vzhledem k uvedenému výše v § 7.2.1 je přirozené zkusit přiblížit $f(x)$ v okolí bodu x_0 polynomem stupně n

$$p(x)=a_n(x-x_0)^n+a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\cdots+a_2(x-x_0)^2+a_1(x-x_0)+a_0 \tag{7.11}$$

tak, aby platilo (viz poznámka 7.8)

$$f(x_0)=p(x_0),\quad f'(x_0)=p'(x_0),\quad \dots,\quad f^{(n)}(x_0)=p^{(n)}(x_0) \tag{7.12}$$

a navíc aby při $x\to x_0$ směřoval rozdíl $f(x)-p(x)$ k 0 rychleji, než $(x-x_0)^n\to 0$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n}=0. \tag{7.13}$$

Zderivujeme-li $p(x)$ v (7.11) opakovaně, po dosazení $x=x_0$ dostaneme

$$p'(x_0)=a_1,\quad p''(x_0)=2!\cdot a_2,\quad p'''(x_0)=3!\cdot a_3,\quad \dots,\quad p^{(n)}(x_0)=n!\cdot a_n \tag{7.14}$$

což znamená, že pro splnění rovností (7.14) máme v (7.11) zvolit $a_0, a_1, \dots, a_n$ takto:

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\quad \dots\quad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{7.15}$$

Určení koeficientů $a_0, a_1, \dots, a_n$ tak, aby se hodnota odpovídajícího polynomu (7.11) a jeho derivací shodovaly s příslušnými hodnotami funkce f (to jest, aby platilo (7.12)), vede na definici Taylorova polynomu.

DEFINICE 7.9. Buď f funkce, jež má v bodě x_0 spojité derivace do řádu n včetně. Polynom

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

se nazývá *Taylorův polynom* stupně n pro funkci f v bodě x_0. Je-li $x_0=0$, polynom se nazývá též *Maclaurinův*.

V případě, že je f polynomem stupně n, je Taylorův polynom T_n pro f shodný s f. Není-li f polynomem, bude $T_n(x)\doteq f(x)$ pouze přibližně.

VĚTA 7.10 (Taylorův vzorec). Buď f funkce, jež má v bodě x_0 spojité derivace do řádu n včetně. Pak pro x v okolí bodu x_0 je

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),$$

kde pro zbytkový člen $r_n(x)$ platí

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=0. \tag{7.16}$$

S c h é m a d ů k a z u. Pro dobrou aproximaci funkce f polynomem p stupně n je rozumné požadovat, aby měly ten polynom a funkce f stejné hodnoty derivací řádů $0, 1, \dots, n$ (to jest aby platilo (7.12)). Výše jsme se přesvědčili, že pro splnění rovností (7.12) musíme zvolit koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ podle vzorců (7.15).

Koeficienty polynomu již byly nalezeny z podmínek (7.12). Rovnost nule limity (7.16), podle níž se skutečně přesvědčíme o blízkosti $p(x)$ k $f(x)$ pro x blízké k x_0, se dokáže podobně § 7.2.1 opakovaným užitím l'Hôpitalova pravidla. $\square$

Vlastnost (7.16) zbytkového členu $r_n(x) = f(x) - T_n(x)$ Taylorova vzorce znamená, že existuje nějaké u takové, že $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$ a

$$r_n(x) = (x - x_0)^n u(x). \tag{7.17}$$

Pro zbytkový člen existují různá vyjádření, mimo jiné v *Lagrangeově* tvaru.

VĚTA 7.11 (Lagrangeův tvar zbytku Taylorova vzorce). Pro libovolné x v okolí x_0 platí

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{7.18}$$

kde ξ je jistý bod, nacházející se mezi x_0 a x.

P o z n á m k a 7.12 (o odhadu zbytku). Vzorec (7.18) přesněji specifikuje tvar členu u v (7.17). I když hodnotu ξ v (7.18) nelze explicitně určit, umožňuje tento vztah odhadnout velikost chyby, jíž se dopustíme, zanedbáme-li v Taylorově vzorci zbytkový člen: je-li $|f^{(n+1)}(x)| \le M_n$ pro x s $|x - x_0| \le R$, bude $|r_n(x)| \le \frac{M_n R^{n+1}}{(n+1)!}$.

§ 7.2.3. Taylorův vzorec pro některé elementární funkce

S využitím věty 7.10 se dokáží tyto vzorce:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x), \tag{7.19a}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+1}(x), \tag{7.19b}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n}(x), \tag{7.19c}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x), \tag{7.19d}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \\ &\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + r_n(x).\end{aligned} \tag{7.19e}$$

§ 7.2.3.1. Srovnání nekonečně malých veličin (asymptotické vzorce)

Jako důsledek lze z těchto rovností odvodit, mimo jiné, řadu významných limit, např.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \dots}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x}{2!} + \dots\right) = 1. \tag{7.20}$$

Poznamenejme, že poslední výraz v závorce, označený trojtečkou, obsahuje pouze členy řádu vyššího než 2. Zde si můžeme všimnout, že vzhledem k (7.19a) výraz $e^x - 1$ vzniká odečtením od e^x *prvního* členu Taylorova polynomu: $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \dots$, což se chová jako x při $x \to 0$. Logicky se nabízí myšlenka odečíst od e^x *první dva* členy Taylorova polynomu:

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \tag{7.21}$$

a, vydělíme-li (7.21) výrazem $\frac{x^2}{2!}$, podobně (7.20) dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x}{12} + \dots\right) = 1. \tag{7.22}$$

Vztah (7.22) znamená, že při $x \to 0$ se výraz $e^x - 1 - x$ chová stejně, jako $\frac{x^2}{2}$, a neuděláme chybu, nahradíme-li v nějaké jiné limitě[32] $e^x - 1 - x$ výrazem $\frac{x^2}{2}$.

Takto rovněž odvodíme vzorce typu $\sin x \sim x$, $\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$, $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2$ pro $x \to 0$, kde zápis $u(x) \sim v(x)$ pro $x \to 0$ znamená, že je $\lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{v(x)} = 1$. Takovým vzorcům se říká vzorce *asymptotické*.

PŘÍKLAD 7.13. Pro $x \to 0$ platí $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

Řešení 7.13.1. Pro $x \to 0$ je $\frac{1-\cos x}{x^2}$ neurčitým výrazem typu $\frac{0}{0}$. S využitím l'Hôpitalova pravidla dostaneme $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$. □

Řešení 7.13.2. Využijeme-li Taylorova vzorce (7.19b) pro $\cos x$, obdržíme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \dots\right) = \frac{1}{2},$$

což znamená, že $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2/2} = 1$. □

Takto se dokáže řada často využívaných vzorců, např.:

VĚTA 7.14. Pro $x \to 0$ platí

$$\begin{aligned} &\sin x \sim x, && \operatorname{tg} x \sim x, && e^x - 1 \sim x, && 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \\ &\arcsin x \sim x, && \operatorname{arctg} x \sim x, && \ln(1+x) \sim x, && (1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Poznámka 7.15. Ve vzorcích (7.23) místo x, samozřejmě, lze dosadit jakýkoliv nekonečně malý výraz $u(x)$ (to jest takový, že $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$ s nějakým x_0), např. při $x \to 0$ vzhledem k (7.23) je $\sin\left(\sqrt{x}\right) \sim \sqrt{x}$ (neboť $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$), $\sqrt{\operatorname{tg}(8x) + 1} \sim 1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}(8x) \sim 1 + \frac{1}{2} \cdot 8x = 1 + 4x$ (neboť $\lim_{x\to 0} \operatorname{tg}(2x) = 0$) apod.

VĚTA 7.16. Existuje-li $\lim_{x\to x_0} \frac{u_1(x)}{v_1(x)}$ a je-li $u_1(x) \sim u_2(x)$ a $v_1(x) \sim v_2(x)$ pro $x \to x_0$, pak

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u_2 x)}{v_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{u_1(x)}{v_1(x)}. \tag{7.24}$$

[32]samozřejmě, při $x \to 0$

Důkaz. Úpravou snadno dostaneme

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u_2x)}{v_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\frac{u_1(x)}{v_1(x)}\frac{v_1(x)}{v_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{u_1(x)}{v_1(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{v_1(x)}{v_2(x)}$$

a tudíž platí (7.24). □

Tato tvrzení v mnoha případech významně usnadňují vyšetřování neurčitých výrazů, neboť umožňují nahradit určité členy s nimi ekvivalentními jednoduššími.

PŘÍKLAD 7.17. Vypočtěme limity: (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)\operatorname{arctg}(9x^2)}{x\sin(9x)\operatorname{tg}(7x)}$; (2) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(5\operatorname{tg}(3x))}{\ln\left(2-\sqrt{3x^2+1}\right)}$.

Řešení. 1. Při $x\to 0$ je $7x\to 0$, $9x^2\to 0$ a vzhledem k větě 7.14 $\sin(7x)\sim 7x$, $\operatorname{arctg}(9x^2)\sim 9x^2$ atd. Dle vět 7.14, 7.16 dostáváme[33]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)\operatorname{arctg}(9x^2)}{x\sin(9x)\operatorname{tg}(7x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x\cdot 9x^2}{x\cdot 9x\cdot 7x}=1.$$

2. Jelikož pro $g(x)=\sqrt{3x^2+1}$ platí $\lim_{x\to 0}g(x)=1$, jedná se o výraz typu $\frac{0}{0}$. Výraz ve jmenovateli je $\ln(2-g(x))=\ln(1+1-g(x))$, kde $\lim_{x\to 0}(1-g(x))=0$. Dle věty 7.14 pak bude $\ln(2-g(x))\sim 1-g(x)$ při $x\to 0$. Stejně tak při $x\to 0$ je $\operatorname{tg}3x\sim 3x$ a proto $\sin(5(\operatorname{tg}3x))\sim\sin(15x)$. Takto obdržíme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(5\operatorname{tg}3x)}{\ln\left(2-\sqrt{3x^2+1}\right)}&=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(5\operatorname{tg}3x)}{\ln\left(1+\left(1-\sqrt{3x^2+1}\right)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(15x)}{1-\sqrt{3x^2+1}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 15x}{1-\sqrt{3x^2+1}}\frac{1+\sqrt{3x^2+1}}{1+\sqrt{3x^2+1}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 15x}{-3x^2}(1+\sqrt{3x^2+1})=-10.\end{aligned}$$

Využili jsme tedy vět 7.14, 7.16 a standardních úprav pro výrazy s radikály. □

§ 7.2.3.2. Využití Taylorova vzorce k přibližnému výpočtu hodnoty funkce

Pro přibližný výpočet hodnoty funkce je Taylorův vzorec přesnější, než vzorec využívající diferenciálu (§ 7.1.4). Příklady jsou na obrázku 7.2. Vidíme, že např. vzorec $\sqrt{x+1}\sim 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ pro $x\to 0$ je přesnější, než $\sqrt{x+1}\sim 1+\frac{1}{2}x$; vzorec $e^x\doteq 1+x+\frac{1}{2}x^2$ pro $x\to 0$ je přesnější, než $e^x\doteq 1+x$ apod.[34]

PŘÍKLAD 7.18. $\sqrt{0{,}992}=(1-0{,}008)^{\frac{1}{2}}\doteq 1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}008=0{,}996.$

Vysvětlení. Zanedbáme-li v (7.19e) členy řádů 2 a výš, dostaneme $(1+x)^\alpha\doteq 1+\alpha x$ pro x blízká k 0 (viz (7.23)). V daném případě je $\alpha=\frac{1}{2}$, $x=-0{,}008$. □

---

[33] Pro přímý důkaz tohotéž pomocí aritmetických vlastností limit (věta 3.14) bychom postupovali takto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)\operatorname{arctg}(9x^2)}{x\sin(9x)\operatorname{tg}(7x)}&=\frac{7}{9}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)}{7x}\frac{9x}{\sin(9x)}\frac{\operatorname{arctg}(9x^2)}{x\operatorname{tg}(7x)}=\frac{7}{9}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)}{7x}\lim_{x\to 0}\frac{9x}{\sin(9x)}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(9x^2)}{x\operatorname{tg}(7x)}\\&=\frac{7}{9}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(9x^2)}{x\cdot 9x}\frac{9x}{\operatorname{tg}(7x)}=\frac{7}{9}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(9x^2)}{x\cdot 9x}\frac{7x}{\operatorname{tg}(7x)}\frac{9}{7}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(9x^2)}{9x^2}\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\operatorname{tg}(7x)}=1.\end{aligned}$$

[34] Graficky lze proces aproximace funkce jejím Taylorovým polynomem znázornit např. pomocí aplikací na https://www.geogebra.org/.

PŘÍKLAD 7.19. Platí

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8\left(1+\frac{1}{8}\right)} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\doteq 2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right) = \frac{25}{12} \doteq 2{,}0833, \tag{7.25}$$

$$\sqrt[3]{9} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \doteq 2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{1}{8^2}\right) = \frac{599}{288} \doteq 2{,}079861. \tag{7.26}$$

V y s v ě t l e n í. Vzorec (7.25) je důsledkem lineární aproximace $(1+x)^\alpha \doteq 1+\alpha x$ pro x blízká k 0 s $\alpha = \frac{1}{3}$. Tento vzorec obdržíme z (7.19e), ponecháme-li tam pouze lineární člen.

K odvození (7.26) využijeme vzorce $(1+x)^\alpha \doteq 1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2$, jenž vzniká z (7.19e) zanedbáním členů s x^3, x^4 atd. Poznamenejme, že vzorec (7.26) je přesnější, než (7.25), poněvadž $\left|\sqrt[3]{9}-\frac{25}{12}\right| \doteq 0{,}003$ a $\left|\sqrt[3]{9}-\frac{599}{288}\right| \doteq 0{,}0002$.

Důvodem pro úpravu $\sqrt[3]{9} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ je snaha využit přibližných vzorců pro $(1+x)^\alpha$ platných pro x blízká k 0 (viz poznámka 7.22).[35] □

Vzorce z příkladů 7.18, 7.19 jsou založeny na myšlence, že by hodnota $f(x)$ měla být dobře aproximována pomocí Taylorova polynomu dostatečně vysokého stupně n, přičemž n volíme podle vlastního uvažování. Takový postup považujeme za uspokojivý, není-li vyžadováno, aby bylo při výpočtu dosaženo určité předem stanovené přesnosti. Je-li potřeba zaručit, že chyba aproximace bude zajistě menší nějaké dané hodnoty, musíme využit vyjádření zbytkového členu Taylorova vzorce a vhodně ho odhadnout shora (poznámka 7.12).

PŘÍKLAD 7.20. Vypočtěme přibližně Eulerovo číslo s přesností na třetí desetinné místo.

Ř e š e n í. Pro funkci $f(x) = e^x$ při libovolném n platí $f(x) = f'(x) = \cdots = f^{(n)}(x)$ a Taylorův vzorec má tvar (7.19a):

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x), \tag{7.27}$$

kde zbytkový člen v Lagrangeově tvaru (věta 7.11) je

$$r_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{7.28}$$

s nějakým ξ ležícím mezi 0 a x. Poněvadž $e = f(1)$, klademe zde $x = 1$; pak bude $0 < \xi < 1$. Dle důsledku 2.33 je $2 < e < 3$ a proto z (7.28) obdržíme

$$|r_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!}. \tag{7.29}$$

Přesnost na třetí desetinné místo znamená, že $|r_n(1)| < 10^{-3}$. Vzhledem k (7.29) toto bude platit, jestliže $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$, to jest $(n+1)! > 3000$. Jelikož $6! = 720$ a $7! = 5040$, stačí v (7.27) vzít $n = 6$. Po zanedbání zbytkového členu pak dostaneme přibližný vzorec

$$e \doteq 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!} = \frac{1957}{720} \doteq 2{,}718.$$

[35] Pokus o bezprostřední aproximaci čísla $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{1+8}$ hodnotami McLaurinových polynomů nižších řádů vede na výsledky zcela nepoužitelné. Např. pro polynomy řádů 1 a 2 bude $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{1+8} \doteq 1+\frac{1}{3}\cdot 8 = \frac{11}{3} \doteq 3{,}67$ a $\sqrt[3]{9} \doteq 1+\frac{1}{3}\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot 8^2 \doteq -3.4$. Příčinou tak nízké kvality aproximace je zde skutečnost, že McLaurinovy polynomy jsou vhodné pro přiblížení hodnot funkce v okolí bodu 0, avšak číslo 8 nelze považovat za dostatečně blízké k 0 (viz poznámka 7.22).

Vzhledem k tomu, že vynechaný zbytek je zaručeně menší než 10^{-3}, všechny tři číslice po desetinné čárce jsou věrné. $\square$

PŘÍKLAD 7.21. Vypočtěme přibližně $\sqrt{e}$ s chybou menší, než $\varepsilon = 0{,}01$.

Řešení. Je zřejmé, že $\sqrt{e} = f\left(\frac{1}{2}\right)$, kde $f(x) = e^x$. V daném případě uvažujeme $x = \frac{1}{2}$ a proto je $0 < \xi < \frac{1}{2}$. Absolutní chyba, jíž se dopustíme, nahradíme-li $f\left(\frac{1}{2}\right)$ hodnotou Taylorova polynomu stupně n:

$$\sqrt{e} \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}, \tag{7.30}$$

je rovna $\left|r_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|$. Vzhledem k (7.28) bude

$$\left|r_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{e^{\frac{1}{2}}}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{2}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2^n},$$

neboť $2 < e < 3$ (§ 2.2.4.2) a tudíž $e^{\frac{1}{2}} < \sqrt{4} = 2$. Proto chyba aproximace v (7.30) bude zaručeně menší než ε, je-li n tak velké, že platí

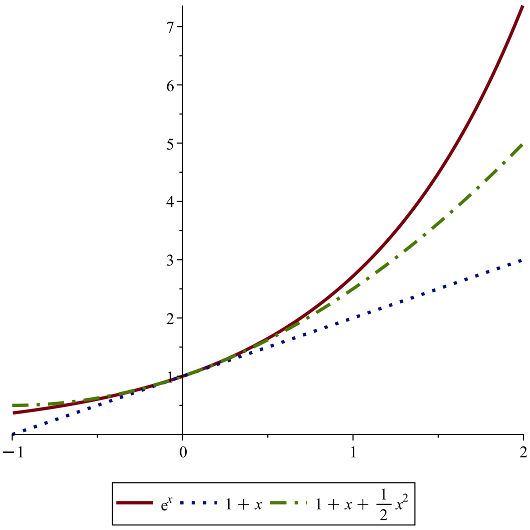
$$\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2^n} < \varepsilon. \tag{7.31}$$

Pro $\varepsilon = 0{,}01$ nerovnost (7.31) začíná platit při $n = 3$, což odpovídá vzorci $\sqrt{e} \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{2^3} = \frac{79}{48} \doteq 1{,}64583$. Kontrola pomocí kalkulačky dává $\sqrt{e} \doteq 1{,}64872$. $\square$

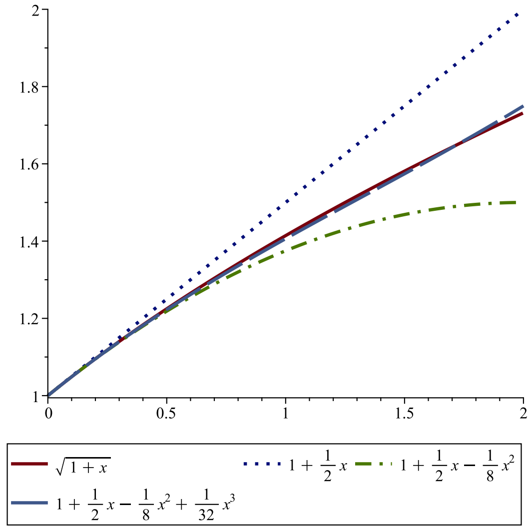
Poznámka 7.22 (lokální charakter aproximace). Aproximace hodnoty funkce v bodě x pomocí jejího Taylorova polynomu se středem v x_0 dává dobré výsledky za předpokladu, že x není příliš vzdálené od x_0. V opačném případě lze očekávat, že budeme potřebovat Taylorův polynom vyššího stupně.

Zkusíme-li v příkladě 7.21 místo $e^{\frac{1}{2}}$ stejným způsobem přibližně vyjádřit např. e^5, budeme muset garantovat malost výrazu $r_n(5) = e^{\xi}\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$. I když je $\lim \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (úloha 2.26), na začátku tato posloupnost čísel má dosti velké hodnoty. Odhadneme-li dále e^{ξ} při $0 < \xi < 5$, zjistíme, že pro menší[36] n (např. $n \leq 5$) nabývá $r_n(5)$ velkých hodnot a tudíž pro dosažení rozumné přesnosti se stává Taylorův polynom se středem v 0 málo použitelným.

[36]Protože $0 < \xi < 5$, je $r_n(5) = e^{\xi}\frac{5^{n+1}}{(n+1)!} < e^5\frac{5^{n+1}}{(n+1)!} < 3^5\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$. Čísla $m_n = 3^5\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$ se začínají zmenšovat pozvolna: je $m_{19} \doteq 0{,}038$, $m_{20} \doteq 0{,}0095$, a tudíž např. odhad chyby $r_n(5) < 0{,}01$ zaručíme teprve pro polynom stupně 20 anebo výš.



(A)



(B)

OBRÁZEK 7.2

§ 8

Funkce dvou proměnných: limity, spojitost

§ 8.1. Motivační úvahy

Mluvíme-li o funkci f jedné proměnné, představujeme si předpis

$$x \mapsto f(x), \tag{8.1}$$

kde $x \in D(f) \subset \mathbb{R}$. Vztah (8.1) obvykle zapisujeme formou $y = f(x)$, což vyjadřuje závislost veličiny y (*závisle* proměnné) na veličině x (*nezávisle* proměnné). Např. teplota vozovky dálnice v závilosti na vzdálenosti od počátečního bodu (pro popis stačí pouze jedna souřadnice, je to tedy závislost typu (8.1)).

Jedná-li se o teplotu podlahy v místnosti, pak pro určení polohy bodu je potřeba již souřadnice dvě; funkční závislost by pak byla ve tvaru

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2),$$

kde x_1 a x_2 jsou nezávisle proměnné veličiny, odpovídající souřadnicím uvažovaného bodu. Každému bodu roviny se souřadnicemi (x_1, x_2) přiřazujeme hodnotu teploty $f(x_1, x_2)$, naměřenou v tomto bodě. Definičním oborem takové funkce bude množina v rovině: $D(f) \subset \mathbb{R}^2$.

Měříme-li teplotu půdy nebo vzduchu, musíme přidat i třetí souřadnici, jelikož taková teplota závisí také na výšce resp. hloubce. Poloha měřeného bodu, a tudíž i naměřena hodnota tedy závisí na třech parametrech, což vede na funkci tří proměnných:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$$

s definičním oborem v $\mathbb{R}^3$. Kdybychom zde počítali i se změnou hodnoty v čase, musíme přidat i čtvrtou proměnnou, určující časový okamžik měření, atd.

Takové vzorce vyjadřují funkce několika proměnných. Závislost sledované veličiny na více faktorech přivádí k pojmu funkce více proměnných.

§ 8.2. Základní pojmy

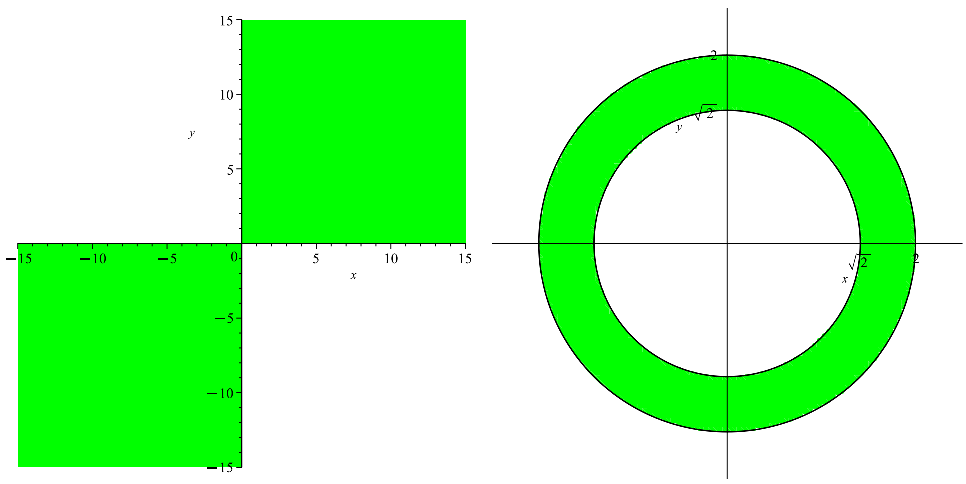
§ 8.2.1. Definiční obor a obor hodnot

Dále se budeme zabývat pouze funkcemi dvou proměnných. V tomto případě je zvykem značit nezávisle proměnné x a y, závisle proměnnou z a zapisovat předpis ve tvaru

$$z = f(x, y). \tag{8.2}$$

Definice 8.1. Nechť M je nějaká neprázdná množina bodů v rovině $\mathbb{R}^2$. Funkce f dvou proměnných, definovaná na M, je předpis, který každé dvojici čísel $(x, y) \in M$ přiřazuje právě jedno číslo $f(x, y)$: $(x, y) \mapsto f(x, y)$.

Množině M, obsahující povolené hodnoty dvojice (x, y), říkáme *definiční* obor funkce f a píšeme $D(f) = M$. Dosadíme-li za x, y nějaká konkretní čísla x_0, y_0, obdržíme číslo $f(x_0, y_0)$, jež je *hodnotou funkce* f *v bodě* (x_0, y_0).



(A) (B)

OBRÁZEK 8.1

Není-li obor M u předpisu (8.2) explicitně uveden, považujeme za definiční obor funkce tzv. *přirozený* definiční obor, to jest nejširší množinu bodů (x, y), na níž lze tímto předpisem funkci definovat.[37]

PŘÍKLAD 8.2. Určeme definiční obor funkce s předpisem

$$z = \sqrt{xy(x^2 + xy + y^2)}.$$

Řešení. Obor není explicitně specifikován, jedná se tedy o nejširší množinu, kde má vzorec smysl. Jediným omezením je podmínka nezápornosti výrazu pod druhou odmocninou. Jelikož úpravou na úplný čtverec dostaneme

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x\frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{y^2}{4} = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0,$$

bude výraz pod druhou odmocninou definován, je-li $xy \geq 0$. Toto znamená, že musí být buď $x \geq 0$, $y \geq 0$ anebo $x \leq 0$, $y \leq 0$ (obrázek 8.1a). □

PŘÍKLAD 8.3. Určeme definiční obor funkce s předpisem

$$z = \arcsin(3 - x^2 - y^2).$$

Řešení. Definičním oborem pro $\arcsin = \sin^{-1}$ je obor hodnot funkce sin, to jest uzavřený interval[38] $[-1, 1]$. Proto musí platit $3 - x^2 - y^2 \in [-1, 1]$, tj. $-1 \leq 3 - x^2 - y^2 \leq 1$, $1 \geq x^2 + y^2 - 3 \geq -1$, $4 \geq x^2 + y^2 \geq 2$. Ve výsledku obdržíme

$$D(f) = \{(x, y) :\ 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

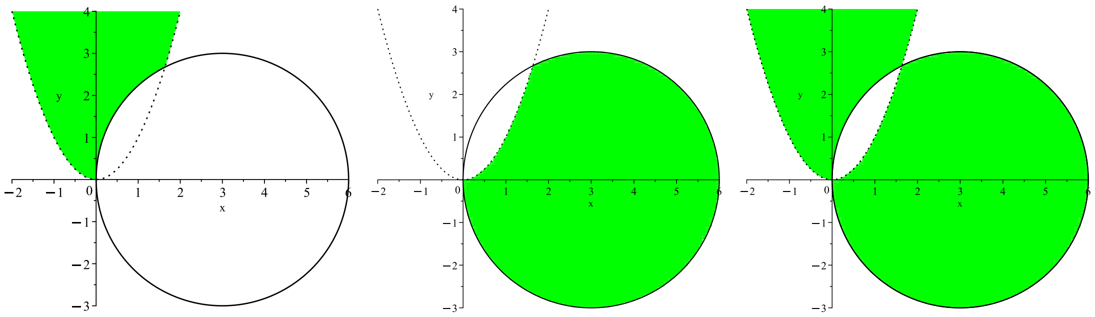
což je oblast mezi kružnicemi o poloměrech $\sqrt{2}$ a 2 a středem v počátku, a to včetně hranice (obrázek 8.1b). □

PŘÍKLAD 8.4. Popišme definiční obor funkce s předpisem

$$f(x, y) = \sqrt[4]{\frac{x^2 + y^2 - 6x}{y - x^2}}.$$

[37] Toto znamená, že, obsahuje-li předpis výrazy, jež nejsou definovány ve všech bodech, je potřeba předpis doplnit upřesněním definičního oboru, a sice vyloučením bodů, kde daným předpisem funkci definovat nelze.

[38] Zde a všude dále uzavřené intervaly značíme hranatými závorkami.



(A) (B) (C)

OBRÁZEK 8.2

Řešení. Pro $(x, y) \in D(f)$ musí platit buď

$$y - x^2 > 0, \quad x^2 + y^2 - 6x \geq 0 \tag{8.3a}$$

anebo

$$y - x^2 < 0, \quad x^2 + y^2 - 6x \leq 0. \tag{8.3b}$$

Buďte $D_{(8.3a)}$ a $D_{(8.3b)}$ množiny všech (x, y), splňujících (8.3a) resp. (8.3b). Pak je

$$D(f) = D_{(8.3a)} \cup D_{(8.3b)}. \tag{8.4}$$

Pro zjištění struktury těchto množin popišme vyznám jednotlivých podmínek v (8.3a), (8.3b). Pro (8.3a) máme

(1) $y > x^2$: bod (x, y) leží nad parabolou $y = x^2$ (hranice vyloučena);
(2) $x^2 + y^2 - 6x = x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 = (x - 3)^2 + y^2 - 9 \geq 0$: bod (x, y) patří vnějšku kruhu o poloměru 3 se středem v $(3, 0)$;

jedná se o množinu $D_{(8.3a)}$, znázorněnou na obrázku 8.2a. Pro (8.3b) je situace opačná:

(1) $y < x^2$: bod (x, y) leží pod parabolou $y = x^2$ (hranice vyloučena);
(2) $x^2 + y^2 - 6x = (x - 3)^2 + y^2 - 9 \leq 0$: bod (x, y) patří vnitřku kruhu o poloměru 3 se středem v $(3, 0)$,

což popisuje množinu $D_{(8.3b)}$ z obrázku 8.2b. Hledanou množinu $D(f)$ dle (8.4) obdržíme sjednocením dvou předchozích (obrázek 8.2c). □

§ 8.2.2. Graf, vrstevnice

Funkce $(x, y) \mapsto f(x, y)$ určuje množinu bodů $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pro něž platí (8.2). Toto je rovnicí plochy v $\mathbb{R}^3$, jež je *grafem* funkce f.

DEFINICE 8.5. *Grafem* funkce $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je množina

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D(f)\}.$$

Graf funkce dvou proměnných s předpisem

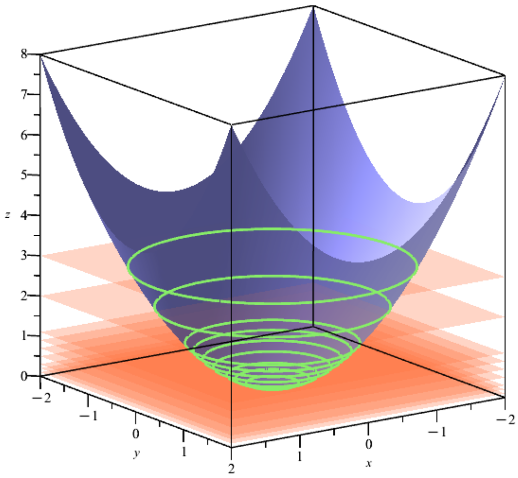
$$z = f(x, y)$$

je podmnožinou trojrozměrného prostoru a oproti funkcím jedné proměnné je grafické znázorněni takovýchto funkcí výrazně složitější. Pro získání základní představy o grafu lze použít jeho řezy soustavou rovin.

Vykonáme-li řez trojrozměrného grafu funkce f rovinami $z = c$, kde c je libovolné, obdržíme soustavu rovinných křivek, jejichž rovnice mají tvar

$$f(x, y) = c.$$

Příklad je na obrázku 8.3. Zde lze pozorovat, že v průmětu do roviny $z = 0$ obdržíme soustavy koncentrických kružnic.



OBRÁZEK 8.3. Plocha s rovnicí $z = x^2 + y^2$ a její řezy rovinami $z = c$ pro různá c

Toto připomíná *vrstevnice* v zeměpisu, což jsou rovinné křivky, tvořené body (x, y), kde je nadmořská výška stejná (to jest z je konstantní, kde $z = f(x, y)$ je nadmořská výška v bodě (x, y)). Pro obecnou funkci f dvou proměnných vrstevnice jsou určeny vzorcem

$$f(x, y) = c,$$

kde c je konstanta.

DEFINICE 8.6. *Vrstevnice* je kolmý průmět do roviny $z = 0$ křivky, vznikající řezem grafu funkce f rovinou $z = c$.

§ 8.3. Limita funkce jedné proměnné

Připomeňme si, že funkce jedné proměnné $x \mapsto f(x)$ má vlastní limitu $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že pro $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ platí

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Neexistenci limity $\lim_{x \to x_0} f(x)$ lze dokázat:

(1) pomocí jednostranných limit (ukázat, že hodnoty jednostranných limit $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ a $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ jsou různé anebo aspoň jedna z nich neexistuje);
(2) pomocí vybraných posloupností (sestrojit dvě posloupnosti $\{x_n : n \geq 1\}$ a $\{\bar{x}_n : n \geq 1\}$ tak, aby platilo $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \bar{x}_n = x_0$ a $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to +\infty} f(\bar{x}_n)$).

§ 8.4. Limita funkce dvou proměnných

Buďte f funkce dvou proměnných a $L \in (-\infty, \infty)$. Buď (x_0, y_0) nějaký bod (je možné, že $(x_0, y_0) \neq D(f)$). Zajímáme-li se o chování funkce f v okolí bodu (x_0, y_0), je přirozené uvažovat limitu $f(x, y)$ pro (x, y), blížící se k (x_0, y_0).

DEFINICE 8.7. Číslo L je limitou funkce f při $(x, y) \to (x_0, y_0)$:

$$L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y), \tag{8.5}$$

jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že pro všechna (x, y), splňující nerovnost $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_\varepsilon$, platí

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Z geometrie víme, že hodnota $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ udává vzdálenost mezi body (x, y) a (x_0, y_0). Zdůrazněme, že v (8.5) se (x, y) blíží k (x_0, y_0) *libovolným* způsobem, to jest podle jakékoliv cesty. Výsledek tedy nesmí na volbě cesty záviset.

Poznámka 8.8. Vyšetřování limit funkcí dvou proměnných je složitější oproti případu funkce jedné proměnné. Máme-li nějakou hypotézu ohledné možné hodnoty L, můžeme ji zkusit ověřit pomočí definice. Pro důkaz existence limity a její výpočet se snažíme využívat vhodných úprav a známých vztahů, popisujících chování elementárních funkcí v určitých bodech (např. $\sin x \sim x$ pro $x \to 0$ apod.). Obecný postup formulovat nelze (viz však § 8.4.1).

PŘÍKLAD 8.9. Platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - 3y + 4}{3x + y - 7} = -\frac{4}{7}.$$

Řešení. Limitu lze vypočítat přímým dosazením do předpisu $f(x, y) = \frac{x-3y+4}{3x+y-7}$ hodnot $x = 0$, $y = 0$, jelikož $f(0, 0)$ je korektně definováno a v okolí bodu $(0, 0)$ se funkce mění spojitě. □

PŘÍKLAD 8.10. Dokažme, že platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Řešení. Neurčitý člen typu $\frac{0}{0}$. Uvedené platí, jelikož

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

a $(x, y) \to (0, 0)$ právě tehdy, když $\sqrt{x^2 + y^2} \to 0$. □

PŘÍKLAD 8.11. Vypočítejme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = 2.$$

Řešení. Neurčitý člen typu $\frac{0}{0}$. Platí

$$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}$$
$$= \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{x^2 + y^2 + 1 - 1} = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1.$$

Pak je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right) = 2.$ □

§ 8.4.1. Důkaz existence limity přechodem do polárních souřadnic

Pro vyšetření dvojné limity $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ je občas vhodné přejít k polárním souřadnicím se středem v bodě (x_0, y_0): $x = x_0 + r\cos\phi$, $y = y_0 + r\sin\phi$.

VĚTA 8.12. Existují-li konstanta L a funkce $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ takové, že je $\lim_{r\to 0+} g(r) = 0$ a pro libovolné ϕ, $0 \le \phi \le 2\pi$, platí

$$|f(x_0 + r\cos\phi, y_0 + r\sin\phi) - L| \le g(r), \tag{8.6}$$

pak $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Důkaz. Skutečnost, že se bod (x,y) blíží k (x_0,y_0), znamená, že se jejich vzdálenost blíží k 0. Zavedeme-li polární souřadnice $x = x_0 + r\cos\phi$, $y = y_0 + r\sin\phi$, táto vzdálenost je $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$, a tudíž konvergence $(x,y) \to (x_0,y_0)$ znamená, že $r \to 0+$.

Jelikož $\lim_{r\to 0+} g(r) = 0$, k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze najít δ_ε tak, aby pro $r < \delta_\varepsilon$ bylo $g(r) < \varepsilon$. Proto dle (8.6) platí $|f(x,y) - L| < \varepsilon$, je-li vzdálenost bodu (x,y) od (x_0,y_0) menši, než δ_ε. Stačí se odkázat na definici 8.7. □

Na odhad (8.6) typicky přijdeme, obdržíme-li po zavedení polárních souřadnic vztah tvaru

$$f(x_0 + r\cos\phi, y_0 + r\sin\phi) = L + g(r)h(r,\phi), \tag{8.7}$$

kde $\lim_{r\to 0+} g(r) = 0$ a $|h(r,\phi)| \le K$ pro $(r,\phi) \in (0,r_0] \times [0,2\pi]$ s nějakým r_0.

DŮSLEDEK 8.13. Existují-li konstanty L, $r_0 > 0$ a funkce $g : (0,r_0] \to \mathbb{R}$, $h : (0,r_0] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ takové, že platí (8.7), přičemž $\lim_{r\to 0+} g(r) = 0$ a h je omezená na $(0,r_0]\times[0,2\pi]$, pak platí (8.5).

Důkaz. Jelikož je h omezená, lze najít K tak, že platí $|h(r,\phi)| \le K$ pro všechna $(r,\phi) \in (0,r_0] \times [0,2\pi]$. Pak z (8.7) obdržíme

$$|f(x_0 + r\cos\phi, y_0 + r\sin\phi) - L| \le |g(r)|\,|h(r,\phi)| \le K\,|g(r)|$$

a zbývá jen využít věty 8.12. □

PŘÍKLAD 8.14. Platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Vysvětlení. Zavedeme-li polární souřadnice $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, bude

$$\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 r\cos^2\phi\sin\phi}{r^2} = r\cos^2\phi\sin\phi,$$

to jest pro $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ platí (8.7) s $L = 0$ a $g(r) = r$ a $h(r,\phi) = \cos^2\phi\sin\phi$. Jelikož $|h(r,\phi)| = \cos^2\phi\,|\sin\phi| \le 1$, dle důsledku 8.13 je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. □

Poznámka 8.15. Podmínka (8.6) věty 8.12 je podstatná. Zjistíme-li totiž, že limita $\lim_{r\to 0+} f(x_0 + r\cos\phi, y_0 + r\sin\phi)$ má stejnou hodnotu pro libovolná ϕ, toto samo o sobě ještě neznamená existenci limity $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ (viz příklad 8.25, poznámka 8.26).

§ 8.4.2. Dvojnásobné limity

Může se zdát, že přechod $(x, y) \to (x_0, y_0)$ v (8.5) lze provést i tak, že vypočítáme např. $\lim_{x\to x_0} f(x, y)$ a následně přejdeme k limitě pro $y \to y_0$. Toto ovšem může vést na nesprávný výsledek, jelikož limity

$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y), \quad \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y), \tag{8.8}$$

jimž se říká *dvojnásobné*, obecně řečeno, nemusí být shodné s $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$. Na rozdíl od (8.8), limitě $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$, chápané dle definice 8.7, se říká limita *dvojná*.

VĚTA 8.16. Nechť existuje $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$. Pak platí následující.

(1) Existuje-li $\lim_{x\to x_0} f(x, y)$ pro libovolné y v okolí bodu y_0, pak existuje i limita $\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y)$, přičemž platí

$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y).$$

(2) Existuje-li $\lim_{y\to y_0} f(x, y)$ pro libovolné x v okolí bodu x_0, pak existuje i limita $\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y)$, přičemž platí

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y).$$

Věty 8.16 lze využít pro důkaz neexistence dvojné limity.

DŮSLEDEK 8.17. Jsou-li hodnoty limit $\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y)$ a $\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y)$ různé, pak dvojná limita $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ neexistuje.

Důkaz. Dle věty 8.16 z existence třech zmíněných limit plyne, že všechny mají stejnou hodnotu. □

PŘÍKLAD 8.18. Vypočtěme dvojnásobné limity funkce

$$f(x, y) = \frac{y - x}{y + x}$$

při $x \to 0$, $y \to 0$.

Řešení. Dle definice dvojnásobné limity je

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{y - x}{y + x} = \lim_{y\to 0} \frac{y - 0}{y + 0} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{y - x}{y + x} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - x}{0 + x} = -1.$$

Hodnoty dvojnásobných limit jsou tedy různé. Dle důsledku 8.17 z toho lze odvodit, že dvojná limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y-x}{y+x}$ neexistuje. □

Obecně řečeno, nejenže se hodnoty dvojnásobných limit mohou lišit, nějaká z nich nemusí ani existovat.

PŘÍKLAD 8.19. Vypočtěme dvojnásobné limity funkce

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$$

při $x \to 0$, $y \to 0$.

Řešení. Jelikož $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{y} = (\lim_{x\to 0} x) \sin \frac{1}{y} = 0$ pro libovolné $y \neq 0$, platí

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{y} = 0.$$

Limita $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} x \sin \frac{1}{y}$ neexistuje, neboť pro $x \neq 0$ neexistuje ani $\lim_{y\to 0} x \sin \frac{1}{y}$. □

Poznámka 8.20. Při prací s dvojnásobnými limitami je potřeba si uvědomit, že:

(1) z existence a rovnosti dvojnásobných limit obecně *neplyne* existence dvojné limity $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ (příklad 8.21);
(2) z existence dvojné limity *neplyne* existence limity dvojnásobné (příklad 8.22).

PŘÍKLAD 8.21. Pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

dvojnásobné limity jsou rovny 0, avšak dvojná limita neexistuje.

Vysvětlení. Vzhledem k tomu, že $\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = 0$, je zřejmé, že dvojnásobné limity jsou rovny 0. Zkoumáme-li dvojnou limitu, můžeme si všimnout, že druhý člen ve jmenovateli mizí na přímce $y = x$ a proto bude $f(x,x) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+0} = 1$. Pak pro obdržení sporu se stačí k $(0,0)$ přibližovat, např. podle vodorovné souřadné osy, což dává $f(x,0) = 0$. Podrobněji viz § 8.4.3. □

PŘÍKLAD 8.22. Pro funkci

$$f(x,y) = y \sin\frac{1}{x} \tag{8.9}$$

neexistuje $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$, avšak existuje $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Vysvětlení. I když $\sin\frac{1}{x}$ nemá limitu pro $x\to 0$, je to však veličina omezená a v (8.9) se vyskytuje v součinu s y, kde $y \to 0$. Lze proto předpokládat, že je limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ rovna 0. Dokažme to podle definice 8.7.

Zvolme libovolně malé kladné ε. Vzhledem k nerovnosti $\left|y \sin\frac{1}{x}\right| \le |y|$ bude $|f(x,y)| < \varepsilon$, je-li $|y| < \varepsilon$, což znamená, že v definici 8.7 můžeme vzít $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, a hodnota dvojné limity je skutečně 0. Na druhou stranu, $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$ a $\lim_{x\to 0} y \sin\frac{1}{x}$ neexistuje. □

§ 8.4.3. Případy neexistence limity

Skutečnost, že $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, dle definice 8.7 znamená, že hodnota $f(x,y)$ se neomezeně přibližuje k L, když se vzdálenost bodu (x,y) od (x_0,y_0) blíží k 0. Rozhoduje *vzdálenost*, nikoliv jednotlivé *cesty*, kudy $(x,y)\to(x_0,y_0)$. Hodnota f se tedy musí blížit k L na každé cestě do (x_0,y_0). Této skutečnosti lze využit, máme-li podezření, že daná limita s největší pravděpodobností neexistuje, a chtěli bychom to dokázat.

§ 8.4.3.1. Různé limitní hodnoty funkce podle určitých cest

Pomocí uvedené úvahy neexistenci limity $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ dokážeme, najdeme-li dvě cesty Γ_1 a Γ_2 tak, že při přibližování (x,y) k (x_0,y_0) podle Γ_1 bude $f(x,y)\to L_1$ a podle Γ_2 bude $f(x,y)\to L_2$ s $L_2 \ne L_1$. Takové cesty lze často najít, uvažujeme-li přibližování $(x,y)\to(x_0,y_0)$

(1) podle přímek (to jest, uvažujeme-li (x,y) spojené vztahem $y - y_0 = k(x-x_0)$, kde k je konstanta);
(2) podle parabol ($y - y_0 = k(x-x_0)^2$).

§ 8.4.3.2. Využití polárních souřadnic

Občas je vhodné přejít k polárním souřadnicím (r,ϕ) podle vzorců $x = x_0 + r\cos\phi$, $y = y_0 + r\sin\phi$; pak bude $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, a $(x,y)\to(x_0,y_0)$ znamená, že

$r \to 0+$. Obdržíme-li po přechodu k limitě v $f(x_0 + r\cos\phi, y_0 + r\sin\phi)$ při $r \to 0+$ výsledek závislý na směru ϕ, můžeme z toho odvodit, že $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ neexistuje.[39]

§ 8.4.3.3. Využití dvojnásobných limit

Neexistenci dvojné limity dokážeme, zjistíme-li, že odpovídající dvojnásobné limity nemají stejnou hodnotu (důsledek 8.17).

§ 8.4.3.4. Příklady důkazů neexistence limity

Ukažme užití hořejšího na příkladech.

PŘÍKLAD 8.23. Limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

neexistuje.

Řešení 8.23.1. Limita neexistuje, neboť změna hodnoty $\frac{xy}{x^2+y^2}$ *záleží na cestě*, podle jaké $(x,y) \to (0,0)$. Nechť $(x,y) \to (0,0)$ např. tak, že $(x,y) = (x,0)$. Pak je vždy

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = 0.$$

Vezmeme-li $(x,y) = (x,x)$, kde $x \to 0$, obdržíme

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Limita tedy existovat nemůže. □

Řešení 8.23.2. Jiný způsob: zaveďme polární souřadnice

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi.$$

Potom $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi} = r$, a tudíž $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ znamená, že $r \to 0$. Nesmí tedy záležet na uhlu ϕ (tj. směru). Vyjádříme-li výraz pod limitou pomocí polárních souřadnic, dostaneme

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{r^2\cos\phi\sin\phi}{r^2} = \cos\phi\sin\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi. \tag{8.10}$$

Při $\phi = 0$ vychází $f(x,y) = f(r\cos 0, r\sin 0) = f(r,0) = 0$ pro libovolné $r \geq 0$. Vezmeme-li $\phi = \frac{\pi}{4}$, dle (8.10) dostaneme $f(x,y) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$. □

Řešení 8.23.3. Zkusme $(x,y) \to (0,0)$ podle přímek $y = kx$, to jest zvolme (x,y) ve tvaru $(x,y) = (x,kx)$. Pak bude

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Vidíme, že se funkce blíží k různým hodnotám, zvolíme-li např. $k = 0$ ($\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$) a $k = 1$ ($\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$). Pro tyto hodnoty směrnice k obdržíme řešení 8.23.1, jež je tudíž speciálním případem stávajícího. □

PŘÍKLAD 8.24. Vyšetřeme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

[39] Můžeme si všimnout, že, je-li $\phi \in [0, \frac{\pi}{2})$ pevně dané, pohyb bodu $(x_0 + r\cos\phi, y_0 + r\sin\phi)$ při $r \to 0+$ odpovídá přibližování k (x_0, y_0) podle přímek $y = y_0 + k(x - x_0)$ se směrnicí $k = \operatorname{tg}\phi$. Při $\phi = \frac{\pi}{2}$ se jedná o přibližování podle svislé souřadné osy.

Řešení 8.24.1. Položme $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Jelikož

$$f(x,x) = 0, \quad f(0,y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

pro $y > 0$, lze usoudit, že limita neexistuje. □

Řešení 8.24.2. Pro důkaz neexistence lze využít dvojnásobných limit. Jelikož

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\right) = 1, \quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{-y^2}{y^2}\right) = -1,$$

dvojná limita neexistuje dle důsledku 8.17. □

Řešení 8.24.3. V polárních souřadnicích $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ pro libovolné r bude

$$f(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{\cos^2\phi - \sin^2\phi}{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = \cos 2\phi,$$

což explicitně závisí na hodnotě ϕ. □

PŘÍKLAD 8.25. Vyšetřeme existenci limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

Řešení. Blíží-li se bod (x,y) k $(0,0)$ podle parabol $x = ky^2$, bude

$$f(ky^2, y) = \frac{ky^4}{k^2y^4 + y^4} = \frac{k}{k^2+1},$$

což závisí na hodnotě k, a tudíž limita neexistuje. □

Poznámka 8.26. Zavedeme-li v příkladě 8.25 polární souřadnice $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, dostaneme

$$f(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{r^3\cos\phi\sin^2\phi}{r^2\cos^2\phi + r^4\sin^4\phi} = \frac{r\cos\phi\sin^2\phi}{r\cos^2\phi + \sin^4\phi} \to 0 \qquad (8.11)$$

pro $r \to 0+$, a to při libovolném ϕ. Limita $\lim_{r\to 0+} f(r\cos\phi, r\sin\phi)$ tedy nezávisí na hodnotě ϕ. Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ však neexistuje. Zdánlivý spor s větou 8.12 rozřešíme, všimneme-li si, že i když dle (8.11) pro $f(r\cos\phi, r\sin\phi)$ platí (8.7) s $L = 0$, $g(r) = r$ a $h(r,\phi) = \frac{\cos\phi\sin^2\phi}{r\cos^2\phi+\sin^4\phi}$, nemůžeme zde zaručit[40] omezenost výrazu $h(r,\phi)$ pro všechna $0 < r \le r_0$ a $0 \le \phi \le 2\pi$.

[40] Všimněme si, že pro $h(r,\phi) = \frac{\cos\phi\sin^2\phi}{r\cos^2\phi+\sin^4\phi}$ platí

$$\lim_{\phi\to 0+}\lim_{r\to 0+} h(r,\phi) = \lim_{\phi\to 0+}\frac{\cos\phi\sin^2\phi}{\sin^4\phi} = \lim_{\phi\to 0+}\frac{\cos\phi}{\sin^2\phi} = +\infty$$

a tudíž nemůže být $h(r,\phi)$ omezené v okolí bodu $(0,0)$.

§ 8.5. Spojitost funkce dvou proměnných

DEFINICE 8.27. Funkce f je *spojitou* v bodě (x_0, y_0), jestliže

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Podle analogie s funkcí jedné proměnné, graf funkce spojité v bodě (x_0, y_0), v okolí tohoto bodu představuje nepřerušenou plochu bez děr a trhlin.

Řada dříve uvažovaných vlastností spojitých funkcí platí i v případě funkce dvou proměnných (např. součet a součin spojitých funkcí je funkce spojitá). Platí rovněž tvrzení podobná některým větám využívajícím spojitost funkce jedné proměnné. Uveďme pouze Weierstrassovu větu o extrémních hodnotách spojité funkce.

VĚTA 8.28 (Weierstrassova věta). Funkce spojitá na omezené uzavřené[41] množině nabývá na ní svých největší a nejmenší hodnot.

§ 8.5.1. Příklady

PŘÍKLAD 8.29. Funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = y = 0 \end{cases}$$

není spojitá v $(0,0)$, neboť dle příkladu 8.24 limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje.

PŘÍKLAD 8.30. Funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{pro } x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = y = 0 \end{cases}$$

je spojitá v $(0,0)$, neboť $f(0,0) = 0$ a dle příkladu 8.23 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Body nespojitosti funkce nemusí být izolované a mohou sestavovat i souvislé množiny.

PŘÍKLAD 8.31. Funkce

$$f(x,y) = \frac{3x - y + 1}{y - x^2}$$

je spojitá všude, kromě bodů paraboly $y = x^2$.

PŘÍKLAD 8.32. Funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt[5]{y^2 - x^2}}$$

je spojitá všude, kromě bodů přímek $y = x$ a $y = -x$.

§ 8.5.2. Poznámka o spojitosti podle jednotlivých proměnných

Poznámka 8.33. Ze spojitosti funkcí $x \mapsto f(x, y_0)$ v bodě x_0 a $y \mapsto f(x_0, y)$ v bodě y_0 *neplyne* spojitost funkce $(x,y) \mapsto f(x,y)$ ve smyslu definice 8.27.

PŘÍKLAD 8.34. Funkce

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

není spojitou v bodě $(0,0)$, avšak je spojitou podle jednotlivých proměnných.

Vysvětlení. V bodě $(0,0)$ funkce není spojitá, neboť $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje (příklad 8.23). Spojitost podle x znamená spojitost funkce $x \mapsto f(x,0) = 0$, což platí triviálním způsobem. Obdobně pro spojitost podle y. □

[41] *Uzavřenou* množinou v rovině rozumíme množinu, obsahující svoji hranici. Přesnější vyjádření této vlastnosti zde rozebírat nebudeme.

§ 9

Funkce dvou proměnných: parciální derivace, diferenciál

§ 9.1. Parciální derivace prvního řádu

Mějme funkci f dvou proměnných. Zapišme výraz $f(x, y)$ a „zmrazme“ v něm y (to jest budeme v tomto okamžiku považovat y za konstantní hodnotu). Zderivujme tento vyraz podle x. Výsledkem bude tzv. *parciální derivace* funkce f vzhledem k proměnné x. Značí se obvykle $f'_x(x, y)$ nebo jinak $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$. Podobně se definuje $f'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$.

Poznámka 9.1. Máme-li předpis $z = f(x, y)$, píšeme $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ a rozumíme každý ze symbolů $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ jako celek. Písmeno „d“ se zde tradičně zapisuje v podobě „∂“, aby se zdůraznila odlišnost od derivace $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ funkce jedné proměnné.

Pro výpočet parciálních derivací vesměs využíváme postupů, již známých pro derivaci funkce jedné proměnné.

PŘÍKLAD 9.2. Nalezněme parciální derivace 1. řádu funkce

$$f(x, y) = 3\,x^3 y^2 - \sin(x + 4y)\,.$$

Řešení. Derivujeme podle x s konstantním y:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 9x^2 y^2 - \cos(x + 4y).$$

Derivujeme podle y; pak je x konstantní:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 6\,x^3 y - 4\,\cos(x + 4\,y)\,.$$

PŘÍKLAD 9.3. Vypočtěme parciální derivace 1. řádu funkce

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2).$$

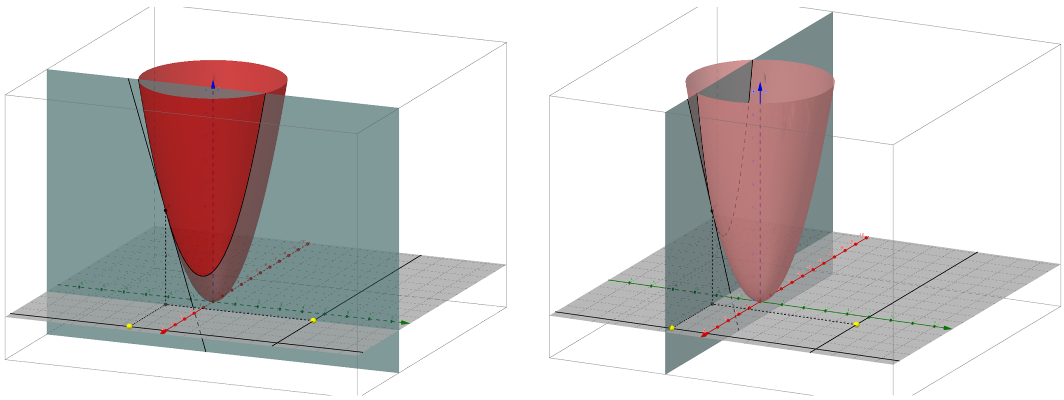
Řešení. Podle vzorce pro derivaci složené funkce dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y^2) = \frac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y^2) = \frac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

Všimneme-li si symetrického charakteru předpisu funkce ($f(x, y) = f(y, x)$ pro všechna x, y), můžeme $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ obdržet záměnou x a y v již vypočítané derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. □

PŘÍKLAD 9.4. Pro $x > 0$ vypočtěme parciální derivace 1. řádu funkce

$$f(x, y) = x^y.$$



(A) (B)

OBRÁZEK 9.1

Řešení. Dle proměnné x je to funkce mocninná, a tudíž bude

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^y) = yx^{y-1}.$$

Podle y pak derivujeme funkci exponenciální o základu x,

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^y) = x^y \ln x.$$

§ 9.2. Geometrický význam parciálních derivací

Parciální derivace funkce podle jednotlivých proměnných udávají *směrnice křivek*, vznikajících v *řezu* grafu funkce rovinami rovnoběžnými s příslušnými osami. Toto znamená, že v jakémkoliv bodě (x_0, y_0), kde má funkce f parciální derivace, hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ (resp. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$) udává směrnici tečny ke grafu křivky $z = f(x, y_0)$ (resp. $z = f(x_0, y)$).

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ udává rychlost změny funkce f v bodě (x_0, y_0) v kladném směru osy x. Analogicky pro $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Geometrické znázornění je na obrázku 9.1.

§ 9.3. Diferencovatelnost a totální diferenciál

Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v okolí nějakého bodu (x, y) spojité parciální derivace 1. řádu. Analogicky případu funkce jedné proměnné, jejíž diferenciál $\mathrm{d}f$ udává přírůstek hodnoty funkce, způsobený nekonečně malou změnou argumentu, je přirozené zavést diferenciál funkce dvou proměnných.

INTUITIVNÍ „DEFINICE“ 9.5. *Totálním diferenciálem* funkce f je výraz

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y, \tag{9.1}$$

jenž vyjadřuje přírůstek hodnoty f, odpovídající nekonečně malým přírůstkům argumentů $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$.

Chceme-li popsat tento pojem přesněji, lze říci, že diferenciál $\mathrm{d}f(x, y)$ v bodě (x, y) je tzv. „bilineární forma“ dvou proměnných h a k:

$$\mathrm{d}f(x, y)(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot k, \tag{9.2}$$

to jest výraz, obsahující proměnné h a k a lineární podle každé z nich. Toto však ještě neurčuje jasně to, kdy a jakým způsobem $\mathrm{d}f$ popisuje změnu f. Pro precizní zavedení pojmu diferenciálu musíme hovořit o *diferencovatelnosti* funkce dvou proměnných.

DEFINICE 9.6. Říkáme, že je funkce f v bodě (x_0, y_0) *diferencovatelná*, jestliže existují konstanty A a B takové, že platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \tag{9.3}$$

Lineární funkce $(h, k) \mapsto Ah + Bk$ se nazývá *diferenciálem*[42] funkce f v bodě (x_0, y_0) a značí se $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$: $\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k) = Ah + Bk$.

Hovoříme-li o diferencovatelnosti funkce f v bodě (x_0, y_0), jedná se, v podstatě, o existenci diferenciálu $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$, což znamená, že její přírůstek v okolí bodu (x_0, y_0) lze vyjádřit ve tvaru

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \alpha(h, k), \tag{9.4}$$

kde $\alpha(h, k)$ je výraz vyššího řádu malosti, než je velikost vektoru (h, k):

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\alpha(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \tag{9.5}$$

Ukáže se, že pro diferencovatelnou funkci výraz $Ah + Bk$ je právě (9.2), to jest (9.2) je diferenciálem f ve smyslu definice 9.6.

VĚTA 9.7. Je-li f diferencovatelná v bodě (x_0, y_0), pak má v tomto bodě parciální derivace a v (9.3) je $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Důkaz. Buď f diferencovatelná v (x_0, y_0). Pak její přírůstek v okolí tohoto bodu lze vyjádřit ve tvaru (9.4), kde A, B jsou konstanty a $\alpha(h, k)$ splňuje (9.5). Budeme-li uvažovat speciálně přírůstky argumentu ve směru souřadných os, vyjde

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = Ah + \alpha(h, 0), \quad f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Bk + \alpha(0, k),$$

přičemž vzhledem k (9.5) je $\lim_{h\to 0} \alpha(h, 0) = \lim_{k\to 0} \alpha(0, k) = 0$. Vydělíme-li zde členy h a k, po přechodu k limitě při $h \to 0$, $k \to 0$ dostaneme $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. □

Poznámka 9.8 (o nediferencovatelnosti jistých funkcí majících parciální derivace). Tvrzení opačné větě 9.7 neplatí: z existence v daném bodě parciálních derivací neplyne diferencovatelnost funkce v tomto bodě (viz příklad 10.4).

PŘÍKLAD 9.9. Ověřme, zda funkce definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} y & \text{pro } y \neq x \\ 0 & \text{pro } y = x \end{cases} \tag{9.6}$$

je diferencovatelná v bodě $(0, 0)$.

---

[42] Říká se přesněji „totální“ anebo „Fréchetův“ diferenciál

Řešení. Podle (9.6) je $f(0,0) = 0$ a pro $x \neq 0$, $x \to 0$, bude $f(x,0) = 0$. Proto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0.$$

Pro $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ bude

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{y - 0}{y - 0} = 1.$$

Vzhledem k (9.4) pro diferencovatelnost f v $(0,0)$ je potřeba, aby s nějakými A a B bylo

$$f(h,k) - f(0,0) = Ah + Bk + \alpha(h,k), \tag{9.7}$$

kde $\alpha(h,k)$ pro $(h,k) \to (0,0)$ konverguje k 0 rychleji než $\sqrt{h^2+k^2}$. V bodě $(0,0)$ existují $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$ a tudíž, je-li f v $(0,0)$ diferencovatelná, musí být $A = 0$, $B = 1$ (věta 9.7). Navíc podle (9.6) je $f(0,0) = 0$ a proto (9.7) znamená, že

$$f(h,k) - k = \alpha(h,k). \tag{9.8}$$

Hodnota na levé straně (9.8) však závisí na tom, zda $h = k$ nebo nikoliv: pro $h \neq k$ vztah (9.8) znamená $k - k = \alpha(h,k)$, což platí s $\alpha(h,k) = 0$, ale při $h = k$ má být $\alpha(h,k) = -k$, což nekonverguje k 0 rychleji než $\sqrt{h^2+k^2}$ (tj. nesplňuje (9.5)): $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-k}{\sqrt{h^2+k^2}} = -1 \neq 0$. Funkce tedy není v bodě $(0,0)$ diferencovatelná. Geometricky to znamená, že v bodě $(0,0)$ nemá graf této funkce tečnou rovinu (tento pojem rozebíráme v § 9.8). □

Příklad 10.4 ukazuje, že některé „nepříliš pěkné“ funkce v určitých bodech mají parciální derivace, avšak nejsou v nich diferencovatelné (nelze je okolí takových bodů dobré přiblížit lineární funkcí, nemají tam diferenciál ani tečnou rovinu; viz § 9.8.2). Vzhledem k následující větě tyto případy lze však považovat za, v jistém smyslu, výjimečné.[43]

VĚTA 9.10. Jsou-li parciální derivace funkce f definovány v okolí bodu (x_0, y_0) a spojité, pak má funkce f v tomto bodě diferenciál.

Diferencovatelnost funkce vyjadřuje hladkost jejího grafu v okolí daného bodu (viz dále § 9.8). Mimo jiné, diferencovatelná funkce je vždy spojitá.

VĚTA 9.11. Je-li f diferencovatelná v bodě (x_0, y_0), pak je v tomto bodě spojitá.

§ 9.4. Využití diferenciálu pro odhad přírůstku funkce

Zanedbáme-li v (9.4) malý člen $\alpha(h,k)$, dostaneme vzorec

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \doteq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k, \tag{9.9}$$

jehož lze využit pro přibližný výpočet přírůstku funkce.

PŘÍKLAD 9.12. Pomocí diferenciálu odhadněme absolutní a relativní chybu výpočtu objemu rotačního válce s poloměrem podstavy $r = 5$ a výškou $H = 10$, jsou-li rozměry r a H známy s chybami $\Delta r < 0.02$, $\Delta H < 0.01$.

[43] Poznamenejme, že pro funkce jedné proměnné takové případy vůbec nejsou, jelikož existence derivace v bodě zaručuje v něm diferencovatelnost funkce.

Řešení. Objem rotačního válce s poloměrem podstavy r a výškou H je

$$V = \pi r^2 H. \tag{9.10}$$

Jsou-li r a H známy s malými chybami Δr, ΔH, dle vzorce (9.9) bude výsledná chyba výpočtu objemu $\Delta V = V(r + \Delta r, H + \Delta H) - V(r, H)$ přibližně rovna

$$\Delta V \doteq \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial H}\Delta H = 2\pi r H \Delta r + \pi r^2 \Delta H = \pi r(2H\Delta r + r\Delta H),$$

což v uvažovaném případě dává

$$\Delta V \doteq 5\pi\,(20\Delta r + 5\Delta H) < 5\pi\left(20 \cdot \frac{2}{100} + 5 \cdot \frac{1}{100}\right) = \frac{225\pi}{100} = \frac{9\pi}{4} \doteq 7.07.$$

Jelikož dle (9.10) pro dané rozměry válce je $V = 250\pi$, relativní chyba bude přibližně $\frac{\Delta V}{V} = \frac{9\pi}{4 \cdot 250\pi} = 0.009$. □

PŘÍKLAD 9.13. Pomocí diferenciálu vypočtěme přibližně hodnotu $f(2.9, 3.8)$ pro funkci

$$f(x, y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Položme $x_0 = 3$, $y_0 = 4$. Vypočtěme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} 2x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

a využijme vzorce

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \doteq \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$$

s $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $x = 2.9$, $y = 3.8$:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &\doteq \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(3, 4) \cdot (-0.1) + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 4) \cdot (-0.2). \end{aligned}$$

Po vykonání výpočtů dostaneme $f(3, 4) = 3 + 4 - \sqrt{3^2 + 4^2} = 2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3, 4) = 1 - \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1 - \frac{3}{5} = 0.4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(3, 4) = 1 - \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1 - \frac{4}{5} = 0.2.$$

Pak bude

$$\begin{aligned} f(2.9, 3.8) - f(3, 4) &\doteq \frac{\partial f}{\partial x}(3, 4) \cdot (-0.1) + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 4) \cdot (-0.2) \\ &= 0.4 \cdot (-0.1) + 0.2(-0.2) = -0.08, \end{aligned}$$

a vyjde $f(2.9, 3.8) \doteq f(3, 4) - 0.08 = 1.92$. Kontrola výsledku pomocí počítače dává: $f(2.9, 3.8) \doteq 1.9198\ldots$. □

§ 9.5. Parciální derivace složených výrazů

Platí jistá zobecnění vzorce pro derivaci složené funkce. Mějme funkci s předpisem $u = f(x, y, z)$ a uvažujme x, y, z jako funkce jiné proměnné t. Obdržíme tak funkci $u = u(t)$. Pak, existují-li příslušné derivace a jsou-li spojité, bude

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{9.11}$$

Závisí-li funkce pouze na jedné z proměnných, z (9.11) obdržíme obvyklé řetězové pravidlo pro derivování složené funkce jedné proměnné.

§ 9.6. Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů vznikají postupným výpočtem jednotlivých parciálních derivací již nalezených parciálních derivací. Parciální derivace druhého řádu jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Značíme je také f''_{xx}, f''_{xy} atd.

VĚTA 9.14 (Schwarzova věta). Existují-li v bodě (x_0, y_0) smíšené parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ a jsou-li v bodě (x_0, y_0) spojité, pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

§ 9.7. Gradient

DEFINICE 9.15. Vypočítaný v bodě definičního oboru vektor

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

se nazývá *gradientem* funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v tomto bodě. Jinak se značí[44] $\operatorname{grad} f = \nabla f$.

VĚTA 9.16. V každém bodě (x_0, y_0) ukazuje vektor $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$ směr největšího růstu funkce f a je kolmý vrstevnici, tímto bodem procházející.

Idea důkazu. Představme si, že vrstevnice s rovnicí $f(x, y) = c$ je dána parametricky: $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ a bod (x_0, y_0) odpovídá hodnotě parametru $t = t_0$: $\phi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$. Vektor $(\phi'(t_0), \psi'(t_0))$ pak bude směrovým vektorem tečny k dané vrstevnici v bodě (x_0, y_0).[45] Dosadíme-li $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ do rovnice vrstevnice, obdržíme, že pro všechna t je

$$f(\phi(t), \psi(t)) = c,$$

odkud zderivováním podle t (viz § 9.5, (9.11)) a dosazením $t = t_0$ dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\phi'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\psi'(t_0) = 0. \tag{9.12}$$

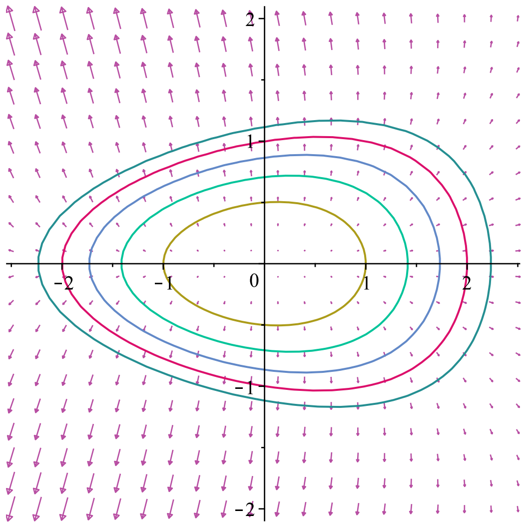
Jelikož $(\phi'(t_0), \psi'(t_0))$ je směrový vektor tečny k vrstevnici v (x_0, y_0), vztah (9.12) znamená jeho kolmost s gradientem $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$. □

---

[44] ∇ je Hamiltonův symbol, čte se „nabla“.

[45] Podle pravidla pro derivování složené funkce je $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, odkud $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\phi'(t)}{\psi'(t)}$. Proto $\frac{\phi'(t_0)}{\psi'(t_0)} = \operatorname{tg}\alpha_0$, kde α_0 je úhel, jenž svírá tečna k dané vrstevnici v bodě (x_0, y_0) s kladným směrem vodorovné souřadné osy. Úhel vektoru $(\phi'(t_0), \psi'(t_0))$ a kladného směru vodorovné osy je tedy α_0.

Zakreslíme-li v každém bodě (x, y) úsečku přímky ve směru gradientu $\operatorname{grad} f(x, y)$, obdržíme tzv. pole gradientů funkce f (obrázek 9.2).



OBRÁZEK 9.2. Vrstevnice pro $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - xy^2$ a pole gradientů. Směr gradientu je vždy kolmý vrstevnici.

§ 9.8. Tečná rovina a normála

Existence diferenciálu funkce jedné proměnné znamená existenci tečné přímky a vyjadřuje hladkost grafu funkce v okolí daného bodu. Toto lze přirozeným způsobem zobecnit pro případ funkce dvou proměnných, budeme-li mluvit o tečné rovině.

§ 9.8.1. Tečna ke grafu funkce jedné proměnné

Připomeňme si definici diferencovatelnosti funkce jedné proměnné: funkce f je diferencovatelná v bodě x_0, jestliže existuje konstanta A taková, že platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0, \tag{9.13}$$

přičemž se dokáže, že v (9.13) bude $A = f'(x_0)$. Platí tedy, že je

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)\, h = \alpha(h),$$

kde $\alpha(h)$ je veličinou řádu malosti vyššího, než h: $\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{h} = 0$. Tento vzorec lze zapsat ve tvaru

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \alpha(h).$$

Výraz $f(x_0) + f'(x_0)h$ je hodnotou v bodě $x = x_0 + h$ funkce $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, jejíž grafem je tečna v bodě $(x_0, f(x_0))$. Diferencovatelnost funkce v x_0 tedy znamená, že má graf v bodě $(x_0, f(x_0))$ tečnu a lze funkci v okolí tohoto bodu aproximovat příslušnou lineární funkcí.

Tyto úvahy umožňují formulovat jinou definici tečny ke grafu funkce, jíž jsme původně chápali jako limitní polohu sečny.

DEFINICE 9.17. Přímka o rovnici $y = ax + c$, procházející bodem $(x_0, f(x_0))$, je tečnou přímkou ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$, jestliže platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - ax - c}{x - x_0} = 0. \tag{9.14}$$

Podle hořejšího vyjde[46] v (9.14) $a = f'(x_0)$, $c = f(x_0) - f'(x_0)x_0$, což odpovídá rovnici tečny $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

§ 9.8.2. Definice tečné roviny

Přirozeným zobecněním definice 9.17 lze zavést pojem tečné roviny.

DEFINICE 9.18. Říkáme, že rovina o rovnici $z = ax + by + c$, procházející bodem $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, je *tečnou rovinou* ke grafu funkce f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, jestliže platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - ax - by - c}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0. \tag{9.15}$$

VĚTA 9.19. Tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ existuje tehdy a právě tehdy, když je f v (x_0, y_0) diferencovatelná. Rovnicí této tečné roviny je

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{9.16}$$

kde $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Důkaz. Z předpokladu, že prochází rovina $z = ax + by + c$ bodem $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, obdržíme $f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c$. Proto v (9.15) je $c = f(x_0, y_0) - ax_0 - by_0$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0. \tag{9.17}$$

Dle definice 9.6 však tato vlastnost znamená diferencovatelnost f v bodě (x_0, y_0), a proto musí být $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Dostáváme tak rovnici (9.16). □

Poznámka 9.20 (o geometrickém významu tečné roviny). Tečná rovina ke grafu $z = f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ je určena tečnými přímkami o směrnicích $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ křivek, vznikajících v řezu plochy rovinami $x = x_0$ a $y = y_0$ (obrázek 9.3).

Má-li f v (x_0, y_0) parciální derivace a existuje-li tam tečná rovina, musí pak mít rovnici (9.16). Rovina o rovnicí (9.16) je skutečné tečnou rovinou, jestliže platí (9.17) s $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Z věty 9.19 a poznámky 9.8 plyne, že pouhá existence parciálních derivací v nějakém bodě nezaručuje existenci v něm tečné roviny (příklad 9.21).

PŘÍKLAD 9.21. Funkce f zadaná vzorcem (9.6) z příkladu 10.4 není v bodě $(0, 0)$ diferencovatelná a tudíž nemá v tomto bodě tečnou rovinu.

Vysvětlení. Diferencovatelnost je potřeba dle věty 9.19. Dle vzorce (9.16) z věty 9.19 rovnice tečné roviny v $(0, 0)$ by zde byla $z = y$, což určuje graf shodný s grafem funkce f vyjma bodů přímky $y = x$. Povaha funkce (9.6) však neumožňuje této roviny využít k přibližnému znázornění grafu funkce v žádném malém okolí bodu $(0, 0)$ (obrázek 9.4). Formálně to plyne z neexistence v tomto bodě diferenciálu (poznámka 9.20).[47] □

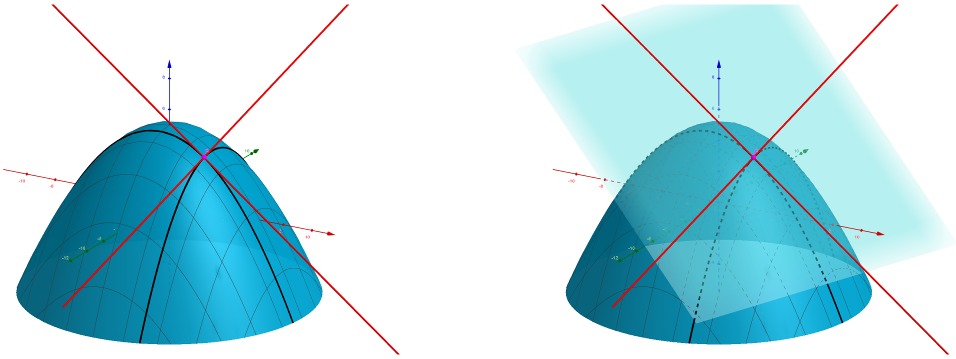
---

[46]Vskutku, přímka $y = ax + c$ prochází bodem $(x_0, f(x_0))$, a proto $f(x_0) = ax_0 + c$. Musí tedy být $c = f(x_0) - ax_0$, což znamená, že má (9.14) tvar

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

a dostaneme $a = f'(x_0)$.

[47]Poznamenejme rovněž, že nesplnění v daném případě rovnosti (9.17) je důsledkem, v podstatě, stejných úvah, jež vedly v příkladě 10.4 na nediferencovatelnost f v $(0, 0)$.



(A) (B)

OBRÁZEK 9.3

§ 9.8.3. Normála

Rovnici (9.16) lze upravit na tvar

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + (-1)(z - z_0) = 0,$$

což znamená, že vektor

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) \tag{9.18}$$

je kolmý s vektorem $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ pro každý bod (x, y, z) tečné roviny v bodě (x_0, y_0, z_0) (připomeňme si, že $z_0 = f(x_0, y_0)$). Vektor $\vec{n}$ je tudíž kolmý s tečnou rovinou v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

DEFINICE 9.22. Vektor (9.18) se nazývá *normálním vektorem* plochy $z = f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Přímka, protínající plochu $z = f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ve směru tohoto vektoru, se nazývá *normálou*.

Parametrické rovnice normály jsou

$$x = x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad y = y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad z = z_0 - t.$$

§ 9.9. Věta o střední hodnotě

Pro funkce dvou proměnných platí obdoba Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

VĚTA 9.23. Buď f funkce dvou proměnných, definovaná na nějakém obdélníku $M = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ a mající parciální derivace v každém bodě z M. Pak pro libovolná (x_0, y_0) a (x, y) v M platí

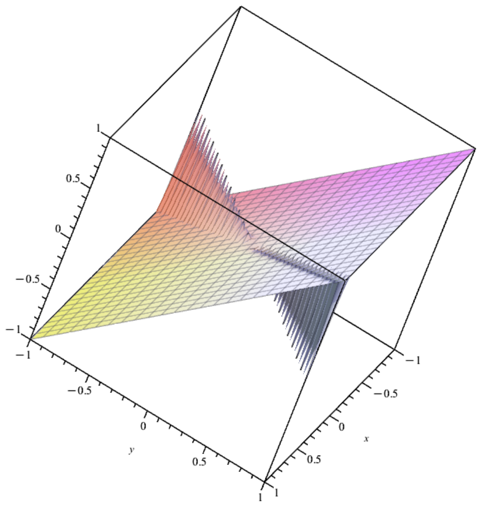
$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y - x_0),$$

kde ξ, η jsou jisté body takové, že ξ leží mezi x_0 a x a η leží mezi y_0 a y.

Důkaz. Stačí přírůstek $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ upravit do podoby

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y_0) - f(x_0, y_0) + f(x, y) - f(x, y_0)$$

a dvakrát využít Lagrangeovy věty pro funkce jedné proměnné. □



OBRÁZEK 9.4. Graf funkce (9.6), jež má v bodě $(0,0)$ parciální derivace, avšak nemá v něm tečnou rovinu.

§ 9.10. Směrová derivace

Buďte $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ nenulový vektor a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce. Zaveďme $\vec{r} = (x, y)$; pak máme zobrazení $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$.

Parciální derivace funkce f podle x udává rychlost změny její hodnoty podle proměnné x, neboli, jinak řečeno, ve směru jednotkového vektoru $\vec{i}$ vodorovné souřadné osy. Podobné lze říci ohledně $\frac{\partial f}{\partial y}$. *Směrová* derivace udává rychlost změny hodnoty funkce ve směru nějakého jednotkového vektoru $\vec{u}$ v obecné poloze.

DEFINICE 9.24. Derivace funkce f ve směru $\vec{u}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{r}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{r} + t\vec{u}) - f(\vec{r})}{t}.$$

S odkazem na definici 4.1 derivace funkce jedné proměnné jinak by se dalo zapsat $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{r})$ jako $\varphi'(0)$, kde $\varphi(t) = f(\vec{r} + t\vec{u})$.

VĚTA 9.25. Je-li funkce f v bodě (x, y) diferencovatelná, pak pro libovolný vektor $\vec{u}$ o velikosti 1 platí

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = (\operatorname{grad} f(x, y), \vec{u}). \tag{9.19}$$

Zde je $(\operatorname{grad} f, \vec{u}) = \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2$ (skalární součin). Vzorec (9.19) lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin\alpha,$$

vyjádříme-li souřadnice jednotkového[48] vektoru $\vec{u}$ přes úhel α, jenž tento vektor svírá s kladným směrem vodorovné osy. Potřebujeme-li počítat derivaci ve směru $\vec{u}$, kde je velikost $|\vec{u}|$ vektoru $\vec{u}$ odlišná od 1, použijeme normovaný vektor $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$.

---

[48] Dále využíváme názvosloví z následující tradiční definice.

DEFINICE 9.26. Vektor o velkosti 1 se nazývá *jednotkovým* (anebo *normovaným*).

Z každého nenulového vektoru u vydělením jeho velikostí získáme jemu kolineární jednotkový vektor $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$.

PŘÍKLAD 9.27. Pro funkci
$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$$
vypočtěme $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, kde je $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Řešení. Dle příkladu 9.3 je $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}$ a tudíž
$$\operatorname{grad} f = \frac{2}{1 + (x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
Velikost vektoru $\vec{u}$ je $|\vec{u}| = \sqrt{5}$, normovaný směrový vektor bude $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{u}$. Pak dle věty 9.25
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{2}{\sqrt{5}(1 + (x^2 + y^2)^2)} (x \cdot 1 + y \cdot 2) = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{x + 2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

§ 9.11. Diferenciály vyšších řádů a Taylorův vzorec

§ 9.11.1. Případ funkce jedné proměnné

Pro funkci jedné proměnné lze Taylorův vzorec zapsat pomocí tzv. *diferenciálů vyšších řádů* takto:
$$f(x) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(x_0)(x - x_0) + r_n(x - x_0), \quad (9.20)$$
kde $\mathrm{d}^n f$ značí diferenciál řádu n. Pro funkci jedné proměnné diferenciály vyšších řádů v bodě x_0 počítáme podle pravidla $\mathrm{d}^n f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} f)$:
$$\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(f'(x_0)\,\mathrm{d}x) = f''(x_0)(\mathrm{d}x)^2,$$
dále $\mathrm{d}^3 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2 f) = f'''(x_0)(\mathrm{d}x)^3$ a obecně $\mathrm{d}^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(\mathrm{d}x)^n$. Přesněji řečeno, $\mathrm{d}^n f(x_0)$ je funkce n-ho stupně
$$\mathrm{d}^n f(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n.$$
Pro $n = 1$ takto obdržíme již známý diferenciál prvního řádu $\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$, jenž je funkcí lineární.

§ 9.11.2. Případ funkce dvou proměnných

V podobě (9.20) za obdobných podmínek lze Taylorův vzorec zobecnit pro funkce dvou proměnných:
$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + \dots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + r_n(x - x_0, y - y_0), \quad (9.21)$$
kde $\mathrm{d}^n f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$ je *diferenciál řádu n* v bodě (x_0, y_0) na přírůstcích $x - x_0$, $y - y_0$. Připomeňme si, že pro funkci dvou proměnných je
$$\mathrm{d}f = f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y \quad (9.22)$$
anebo, přesněji řečeno, diferenciál v bodě (x_0, y_0) je lineární funkce
$$\mathrm{d}f(x_0, y_0)(h, k) = f'_x(x_0, y_0) \cdot h + f'_y(x_0, y_0) \cdot k.$$

Diferenciály vyšších řádů lze i v tomto případě počítat podle pravidla $\mathrm{d}^n f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} f)$, přičemž je pohodlné využít neformálního zápisu (9.22). Pro tento účel „d“ v „df“ chápeme jako operaci, jež tvoří součet parciálních derivací výrazu f, vynásobených diferenciálem příslušných proměnných, tj. derivujeme podle x a y a považujeme $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ za konstanty. Pro druhý diferenciál $\mathrm{d}^2 f$ takto vyjde[49]

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 f &= \mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y) = (f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y)'_x \cdot \mathrm{d}x + (f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y)'_y \cdot \mathrm{d}y \\ &= f''_{xx} \cdot (\mathrm{d}x)^2 + f''_{yx} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}x + f''_{xy} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + f''_{yy} \cdot (\mathrm{d}y)^2 \\ &= f''_{xx} \cdot (\mathrm{d}x)^2 + 2f''_{xy} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + f''_{yy} \cdot (\mathrm{d}y)^2,\end{aligned}$$

což určuje kvadratickou funkci

$$\mathrm{d}^2 f(x_0, y_0)(h,k) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot h^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot h \cdot k + f''_{yy}(x_0, y_0) \cdot k^2. \tag{9.23}$$

Nasleduje pak diferenciál třetího řádu $\mathrm{d}^3 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2 f)$, což po výpočtech vede na vzorec

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3 f(x_0, y_0)(h,k) = f'''_{xxx}(x_0, y_0) \cdot h^3 + 3f'''_{xxy}(x_0, y_0) \cdot h^2 k + 3f'''_{xyy}(x_0, y_0) \cdot hk^2 \\ + f'''_{yyy}(x_0, y_0) \cdot k^3\end{aligned}$$

atd. Obecně lze postup výpočtu $\mathrm{d}^n f$ vyjádřit vzorcem

$$\mathrm{d}^n f(x_0, y_0)(h,k) = \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f, \tag{9.24}$$

kde „umocnění“ $\left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^n$ značí operaci, vznikající *formálním násobením* symbolů

$$\left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \dots \cdot \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

takto:

$$\begin{aligned}\left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f &= \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right) f \\ &= \left(h^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + hk \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + kh \cdot \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + k^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right) f \\ &= \left(h^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + 2hk \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + kh \cdot \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + k^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right) f \\ &= \left(h^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f \\ &= h^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\end{aligned} \tag{9.25}$$

dále pak $\left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f = \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$ atd. Můžeme si všimnout, že (9.25) skutečně vede na (9.23). Zde $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u = u''_{xx}$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u = u''_{xy}$ apod., to jest násobení operací výpočtu parciálních derivací v (9.24) chápeme jako příslušnou parciální derivaci vyššího řádu.

[49]Připomeňme si, že podle Schwarzovy věty 9.14 bude $f''_{yx} = f''_{xy}$.

§ 10

Lokální extrém funkce dvou proměnných

Podobně případu funkce jedné proměnné je přirozené se zajímat i o lokálně extremální hodnoty funkcí dvou proměnných. Není překvapující, že vzhledem k přítomnosti další nezávisle proměnné technika vyšetřovaní lokálních extrému bude v tomto případě složitější. Odpovídající věty však vznikají jako logická zobecnění obdobných tvrzení z analýzy funkcí jedné proměnné a význam jednotlivých podmínek, byť vypadajících úplně jinak, je velmi podobný.

§ 10.1. Lokální extrémy: definice a příklady

DEFINICE 10.1. Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě (x_0, y_0) *lokálního minima*, jestliže existuje okolí G bodu (x_0, y_0) takové, že je

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \qquad \text{pro všechna } (x, y) \in G.$$

Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě (x_0, y_0) *lokálního maxima*, jestliže existuje okolí G bodu (x_0, y_0) takové, že je

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \qquad \text{pro všechna } (x, y) \in G.$$

Lokální maximum a minimum se nazývají *lokální extrémy*. Jsou-li nerovnosti ostré pro $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, jedná se o *ostré lokální extrémy*.

PŘÍKLAD 10.2. Funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ má v bodě $(0, 0)$ lokální minimum.

Řešení. Je zřejmé, že $f(0, 0) = 0$ a $f(x, y) > 0$, je-li $|x| + |y| > 0$ (obrázek 10.1a). □

PŘÍKLAD 10.3. Funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2$ má v bodě $(0, 0)$ lokální maximum.

Řešení. Je zřejmé, že $f(0, 0) = 0$ a $f(x, y) < 0$, je-li $|x| + |y| > 0$ (obrázek 10.1b). □

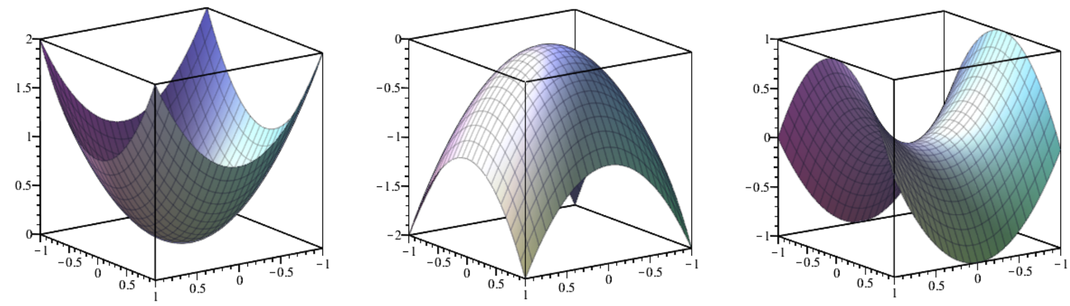
PŘÍKLAD 10.4. Funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ v bodě $(0, 0)$ lokální extrém nemá.

Řešení. V bodě $(0, 0)$ je $f(0, 0) = 0$. Je-li $|x| + |y| > 0$, platí

$$f(0, y) = -y^2 < 0, \quad f(x^2, 0) = x^2 > 0,$$

přičemž $|x|$ a $|y|$ mohou být libovolně malé. Toto znamená, že libovolné okolí bodu $(0, 0)$ obsahuje body (x, y), kde je $f(x, y) > f(0, 0)$, a také body, kde je $f(x, y) < f(0, 0)$ (obrázek 10.1c). Extrém v tomto bodě není. □

Bod $(0, 0)$ v příklade 10.4 je pro danou funkci tzv. *sedlovým* bodem.



(A) (B) (C)

OBRÁZEK 10.1

§ 10.2. Nutná podmínka pro lokální extrém

DEFINICE 10.5. *Stacionárním* (nebo *kritickým*) bodem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je bod (x_0, y_0), kde existují parciální derivace 1. řádu a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

anebo alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje.

VĚTA 10.6. Má-li funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém, pak všechny parciální derivace této funkce, které v tomto bodě existují, jsou rovny 0.

Funkce tedy může mít lokální extrém pouze v nějakém stacionárním bodě.

§ 10.3. Postačující podmínka pro lokální extrém

§ 10.3.1. Postačující podmínka

VĚTA 10.7. Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce mající v okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace 2. řádu. Nechť (x_0, y_0) je pro f stacionárním bodem. Položme

$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2. \tag{10.1}$$

(1) Jestliže $D(x_0, y_0) > 0$, pak má f v (x_0, y_0) ostrý lokální extrém (minimum, je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ a maximum, je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$)
(2) Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$, pak nemá f v (x_0, y_0) lokální extrém.

Poznámka 10.8. Jestliže $D(x_0, y_0) = 0$, pak v (x_0, y_0) muže, ale nemusí být lokální extrém. Takové případy se musí vyšetřit zvlášť.

Tuto podmínku lze formulovat pomocí Hessovy matice funkce f v bodě (x_0, y_0).

DEFINICE 10.9. *Hessova matice* $H(x_0, y_0)$ pro f v bodě (x_0, y_0) je

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Připomeňme si, že dle Schwarzovy věty, jsou-li f''_{xy} a f''_{yx} v (x_0, y_0) spojité, bude $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. Pak je $D(x_0, y_0)$ v (10.1) determinantem matice $H(x_0, y_0)$:

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

§ 10.3.2. Případ funkce jedné proměnné

Je-li f funkcí pouze jedné proměnné x (speciální případ, když $f(x, y)$ nezávisí na y, tj. $f'_y = 0$), bude

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a typ lokálního extrému pak lze určit podle znaménka $f''_{xx}(x_0, y_0)$: minimum, pokud je kladné, a maximum, pokud je záporné. Obdržíme tak již známou postačující podmínku druhého řádu pro určení lokálního extrému funkce jedné proměnné. Uvedenou větu tedy lze chápat jako její zobecnění pro případ funkce dvou proměnných. Roli derivace druhého řádu pak hraje Hessova matice, jejíž kladnost nebo zápornost chápeme pomocí pojmu *pozitivní* a *negativní definitnosti* tzv. *kvadratických forem.*

§ 10.4. Postup určení lokálních extrémů

Potřebujeme-li určit lokální extrémy funkce dvou proměnných, obvykle postupujeme takto.

(1) Ujistíme se, že má funkce v daném oboru spojité parciální derivace druhého řádu.
(2) Vypočteme parciální derivace 1. řádu a najdeme stacionární body z rovnic

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

(3) Najdeme parciální derivace 2. řádu a v každém ze stacionárních bodů vypočteme hodnotu determinantu Hessovy matice. V závislosti na výsledku s využitím věty 10.7 rozhodneme o tom, zda v jednotlivých stacionárních bodech má funkce extrémy. Je-li v určitém stacionárním bodě (x_0, y_0) extrém, vypočítáme i hodnotu $f(x_0, y_0)$, což bude hodnota maxima nebo minima.

§ 10.4.1. Příklady

PŘÍKLAD 10.10. Vyšetřeme extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Řešení. Jelikož $f'_x(x, y) = 3x^2 - 3y$ $f'_y(x, y) = 3y^2 - 3x$, stacionární body se určují soustavou rovnic

$$3x^2 - 3y = 0, \quad 3y^2 - 3x = 0,$$

to jest $x^2 = y$, $y^2 = x$; $x^4 - x = 0$. Funkce tedy má dva stacionární body: $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Pro ověření existence extrému v těchto bodech vypočtěme parciální derivace druhého řádu

$$f''_{xx}(x, y) = 6x, \quad f''_{yy}(x, y) = 6y, \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -3$$

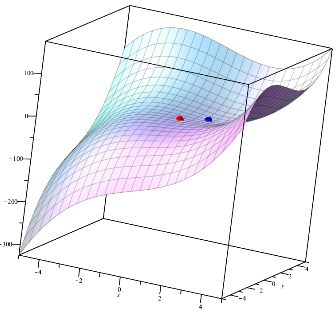
a zapišme Hessovu matici:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{xy}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

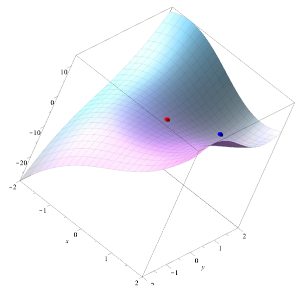
V bodě $(0, 0)$ je $\det H(0, 0) = \left|\begin{smallmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{smallmatrix}\right| = -9 < 0$, extrém tedy v $(0, 0)$ není.

V bodě $(1, 1)$ dostaneme $\det H(1, 1) = \left|\begin{smallmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{smallmatrix}\right| = 36 - 9 = 27 > 0$, a proto v $(1, 1)$ lokální extrém je (je to lokální minimum, neboť $f''_{xx}(1, 1) = 6 > 0$).

Pomocí věty 10.7 jsme tedy zjistili, že v bodě $(0, 0)$ funkce extrém nemá a v bodě $(1, 1)$ má lokální minimum o hodnotě $f(1, 1) = -1$ (obrázek 10.2). □



(A)



(B)

OBRÁZEK 10.2

PŘÍKLAD 10.11. Vyšetřeme lokální extrémy funkce $f(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Řešení. Platí $f'_x = 6xy - 3x^2$, $f'_y = 3x^2 - 4y^3$, a proto z rovnic

$$6xy - 3x^2 = 0, \quad 3x^2 - 4y^3 = 0,$$

obdržíme dva stacionární body: $(6, 3)$, $(0, 0)$. Po výpočtu parciálních derivací 2. řádu

$$f''_{xx} = 6y - 6x, \quad f''_{xy} = 6x, \quad f''_{yy} = -12y^2$$

obdržíme Hessovu matici

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6y - 6x & 6x \\ 6x & -12y^2 \end{pmatrix}.$$

V bodě $(6, 3)$ je

$$\det H(6, 3) = \begin{vmatrix} -18 & 36 \\ 36 & -108 \end{vmatrix} = 18 \cdot 108 - 36^2 = 648 > 0,$$

a proto dle věty 10.7 v bodě $(6, 3)$ funkce f lokální extrém má. Je to lokální maximum, neboť $f''_{xx}(6, 3) = -18 < 0$.

V bodě $(0, 0)$ věta 10.7 informaci neposkytuje, jelikož je

$$\det H(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Charakter změny funkce v okolí tohoto bodu tedy musíme vyšetřit zvlášť. Uvažujme $(x, y) \neq (0, 0)$ z libovolného okolí bodu $(0, 0)$ a vypočtěme

$$f(0, y) = -y^4 < 0. \tag{10.2}$$

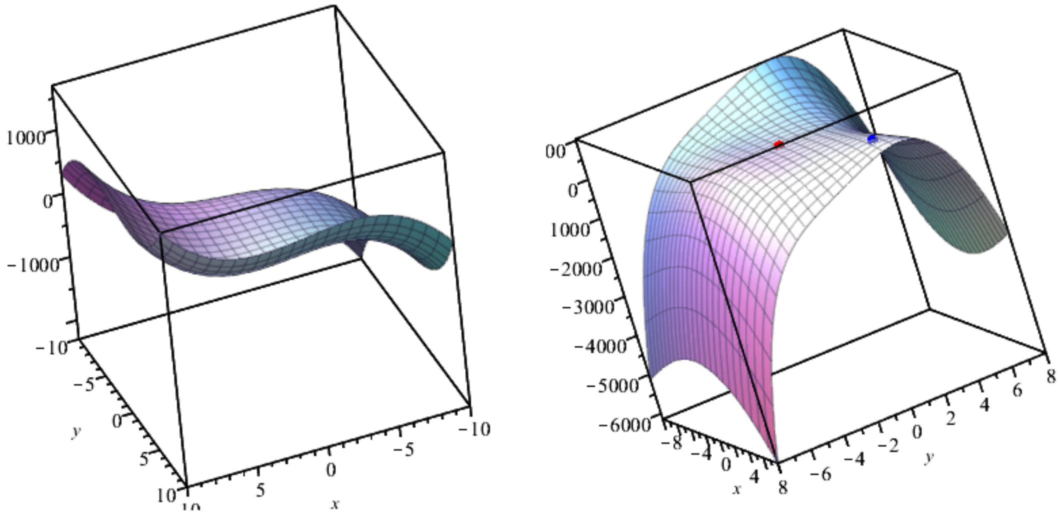
Vezmeme-li pak $x < 0$, $y = 0$, obdržíme

$$f(x, 0) = -x^3 > 0. \tag{10.3}$$

Poznamenejme, že (10.2) a (10.3) platí pro $x \neq 0$, $y \neq 0$, avšak $|x|$ a $|y|$ mohou být libovolně malé. Z uvedeného plyne, že v libovolně malém okolí bodu $(0, 0)$, v němž $f(0, 0) = 0$, nabývá funkce jak kladných, tak i záporných hodnot. Extrém zde není.

Zjistili jsme, že v bodě $(0, 0)$ funkce extrém nemá a v bodě $(6, 3)$ má lokální maximum o hodnotě $f(6, 3) = 27$ (obrázek 10.3). □

PŘÍKLAD 10.12. Určeme lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 3$.



(A) (B)

OBRÁZEK 10.3

Řešení. Platí $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y$, a stacionární body pak určujeme ze soustavy rovnic

$$x^3 - x + y = 0, \quad y^3 + x - y = 0. \tag{10.4}$$

Sečteme-li tyto rovnice, bude $y^3 + x^3 = 0$ a dostaneme $y^3 = -x^3$, $y = -x$. Dosadíme-li $y = -x$ do první rovnice v (10.4), bude $x^3 - x - x = 0$, $x^3 - 2x = 0$, $x\left(x^2 - 2\right) = 0$. Pro x tedy obdržíme hodnoty $x = 0$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$. Odpovídající hodnoty y jsou $y = 0$, $y = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$. Dostáváme stacionární body $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Parciální derivace 2. řádu jsou $f''_{xx} = 12x^2 - 4$, $f''_{yy} = 12y^2 - 4$, $f''_{xy} = 4$ a determinant Hessovy matice je

$$\det H(x, y) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix}.$$

V bodě $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ je

$$\det H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 12 \cdot 2 - 4 & 4 \\ 4 & 12 \cdot 2 - 4 \end{vmatrix} = 400 - 16 = 384 > 0,$$

$f''_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20 > 0$. Je zde lokální minimum.

V bodě $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ mají $\det H(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $f''_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ stejné hodnoty, jako v bodě $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Jedná se o lokální minimum o hodnotě $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^4 - 2(-\sqrt{2})^2 + 4 \cdot (-\sqrt{2})\sqrt{2} - 2(\sqrt{2})^2 + 3 = -5$.

V bodě $(0, 0)$ je $\det H(0, 0) = 0$. Jelikož např.

$$f(x, 0) = x^4 + 0^4 - 2x^2 + 4x \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 + 3 = x^4 - 2x^2 + 3 = x^2(x^2 - 2) + 3,$$
$$f(x, x) = x^4 + x^4 - 2x^2 + 4x \cdot x - 2 \cdot x^2 + 3 = 2x^4 + 3,$$

extrém zde není. □

§ 11

Globální extrémy funkce dvou proměnných

§ 11.1. Weierstrassova věta

Funkce jedné proměnné, jež je spojitá na ohraničeném uzavřeném intervalu, nabývá na tomto intervalu své největší a nejmenší hodnoty (Weierstrassova věta). Tato věta platí i pro funkce dvou a více proměnných. Pro formulaci je potřeba zavést některé definice. Buď M množina v $\mathbb{R}^2$.

DEFINICE 11.1. Množina M je *ohraničená*, jestliže celá leží v nějaké kouli.

DEFINICE 11.2. Bod $P \in M$ je *vnitřním* bodem množiny M, jestliže spolu s P v M leží i nějaké okolí tohoto bodu. Množina M se nazývá *otevřena*, je-li každý její bod vnitřním.

V jistém smyslu opačnou vlastnost má tzv. bod hraniční.

DEFINICE 11.3. Bod P je *hraničním* bodem pro množinu M, jestliže v každém okolí bodu P jsou jak body patřící do M, tak i body, jež do M nepatří. Množina všech bodů, jež jsou hraniční pro M, se nazývá *hranicí* množiny M.

Bod hraniční pro množinu M může ležet buď v M nebo mimo M.

PŘÍKLAD 11.4. Hranicí množiny

$$M = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$$

je $K_1 \cup K_2$, kde K_1, K_2 jsou kružnice se středem v $(0, 0)$ o poloměrech 1 a 2. Přitom $K_2 \subset M$ a $K_1 \cap M = \varnothing$.

DEFINICE 11.5. Množina M je *uzavřená*, jestliže obsahuje svou hranici.[50]

VĚTA 11.6 (Weierstrassova věta o extremálních hodnotách). Funkce spojitá na ohraničené uzavřené množině nabývá v ní své největší a nejmenší hodnoty.

Všechny předpoklady věty 11.6 jsou podstatné a nelze je vynechat.[51]

§ 11.2. Největší a nejmenší hodnota funkce v ohraničené uzavřené oblasti

Řešení praktických úloh často přivádí k potřebě nalezení extremálních hodnot spojité funkce na uzavřené omezené množině. Takových hodnot funkce nabývá buď v bodech lokálního extrému nebo na hranici množiny, a pro jejich určení lze postupovat takto.

(1) Nalézt stacionární body a hodnoty funkce v těchto bodech.
(2) Vypočítat největší a nejmenší hodnoty funkce na hranici oblasti.

[50] Z uvedených definic odvodíme, že otevřenou je množina, jež neobsahuje žádné body své hranice.

[51] Toto poznáme již pro funkce jedné proměnné. Např. funkce $f_1(x) = 1/x$, $f_2(x) = 1 - x$ nenabývají maximální hodnoty na $M = (0, 1]$ (M není uzavřená); $f_3(x) = \frac{x}{x+1}$ je omezená na $M = [0, +\infty)$, avšak nenabývá tam maximální hodnoty (M je neomezená).

(3) Vzít největší a nejmenší z nalezených hodnot.

§ 11.3. Příklady

PŘÍKLAD 11.7. Pro libovolné $a > 0$ najděme největší a nejmenší hodnoty funkce

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2a^2$$

v kruhu $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Řešení. Jelikož $f_x' = 2x$, $f_y' = -2y$, jediným stacionárním bodem je $(0, 0)$, v němž $f(0, 0) = 2a^2$.

Nalezněme největší a nejmenší hodnotu f na hranici kruhu, tj. na kružnici $x^2 + y^2 = a^2$. Pro (x, y) ležící na této kružnicí máme

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2a^2 = x^2 - (a^2 - x^2) + 2a^2 = 2x^2 + 2a^2,$$

a tudíž se jedná o minimalizaci a maximalizaci funkce jedné proměnné $g(x) = 2x^2 + a^2$ pro $-a \leq x \leq a$ (neboť body kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ mají $|x| \leq a$).

Stacionárním bodem g je $x = 0$, pak $g(0) = a^2$. V krajních bodech intervalu, tj. v bodech $x = \pm a$, máme $g(\pm a) = 3a^2$.

Pak odvodíme, že f nabývá největší hodnoty $3a^2$ v bodech $(-a, 0)$ a $(a, 0)$ a nejmenší hodnoty a^2 v bodech $(0, -a)$ a $(0, a)$. (Nejmenší hodnoty a^2 funkce nabývá v bodech kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ pro $x = 0$, tj. $y = \pm a$). □

PŘÍKLAD 11.8. Určeme největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x, y) = x^2 y + x y^2 + x y$$

v uzavřené oblasti M ohraničené křivkami $x = 1$, $x = 2$, $y = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{x}$.

Řešení. Zderivováním obdržíme $f_x'(x, y) = 2xy + y^2 + y$, $f_y'(x, y) = 2xy + x^2 + x$. Stacionární body se pak určují ze soustavy rovnic $2xy + y^2 + y = 0$, $2xy + x^2 + x = 0$, tj.

$$y(2x + y + 1) = 0, \quad x(x + 2y + 1) = 0.$$

Dostáváme stacionární body $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, dále pak z rovnic

$$2x + y + 1 = 0, \quad x + 2y + 1 = 0.$$

obdržíme třetí bod $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Žádný z těchto bodů však neleží v množině M (viz obrázek 11.1). Musíme tedy vyšetřovat hodnoty funkce na hranici oblasti M.

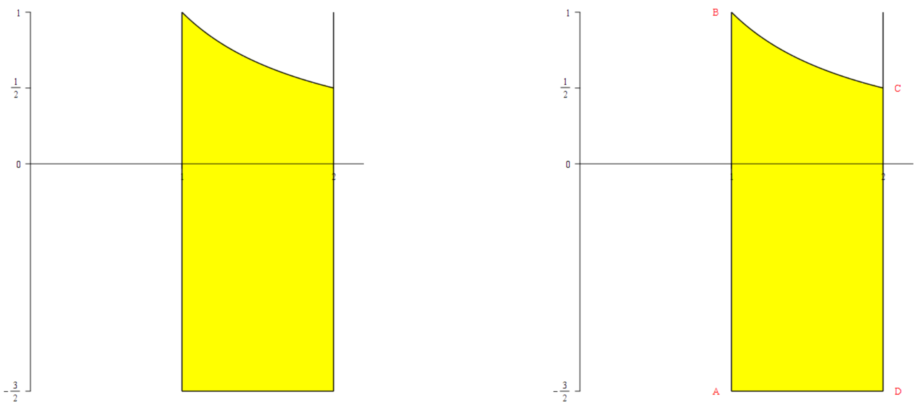
Vyšetřeme extremální hodnoty funkce na hranici množiny M. Hranicí je křivka sestavená z úseků AB, BC, CD a DA, na nichž extremální hodnoty funkce vyšetříme zvlášť.

Na úseku AB je $x = 1$, $f(1, y) = y^2 + 2y =: g_1(y)$, kde $-\frac{3}{2} \leq y \leq 1$. Pak $g_1'(y) = 2y + 2$, stacionární bod je $y = -1$. Hodnoty funkce g_1 v stacionárním bodě a v koncových bodech intervalu jsou

$$g_1(-1) = -1, \quad g_1(1) = 3, \quad g_1\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}. \tag{11.1}$$

Na BC je $y = \frac{1}{x}$, $f\left(x, \frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x} + 1 =: g_2(x)$, kde $1 \leq x \leq 2$. Pak $g_2'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, stacionární body jsou $x = \pm 1$. V intervalu $[1, 2]$ leží pouze bod $x = 1$. Dostaneme hodnoty

$$g_2(1) = 3, \quad g_2(2) = \frac{7}{2}. \tag{11.2}$$



(A) (B)

OBRÁZEK 11.1. Oblast ohraničená křivkami $x = 1$, $x = 2$, $y = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{x}$.

Na CD je $x = 2$, $f(2, y) = 2y^2 + 6y =: g_3(y)$, kde $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$. Pak $g_3'(x) = 4y + 6$, stacionární bod je $y = -\frac{3}{2}$. Dostaneme hodnoty

$$g_3\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}, \quad g_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}. \tag{11.3}$$

Nakonec, na DA je $y = -\frac{3}{2}$, $f\left(x, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x =: g_4(x)$, kde $1 \leq x \leq 2$. Pak $g_4'(x) = -3x + \frac{3}{4}$, stacionární bod je $x = \frac{1}{4}$, ten však neleží v $[1, 2]$. Proto vypočtěme hodnoty v koncových bodech intervalu:

$$g_4(1) = -\frac{3}{4}, \quad g_4(2) = -\frac{9}{2}. \tag{11.4}$$

Porovnáme-li hodnoty vypočtené v (11.1), (11.2), (11.3), (11.4), obdržíme

$$f_{\max} = f\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}, \quad f_{\min} = f\left(2, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}.$$

Extremálních hodnot tedy funkce nabývá v bodech hranice uvažované množiny. □

PŘÍKLAD 11.9 (úloha o maximálním zisku). Vyrábí se dva druhy zboží, jejichž ceny jsou P_1 a P_2 za jednotku. Popište, jak určit maximální zisk z prodeje vyrobeného zboží, je-li známa funkce výrobních a vedlejších výdajů S. Určete maximální zisk za předpokladu, že $P_1 = 8$, $P_2 = 10$ a funkcí výdajů je

$$S(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2.$$

Řešení. Buďte x_1, x_2 množství vyrobeného zboží každého z druhů. Funkce zisku je

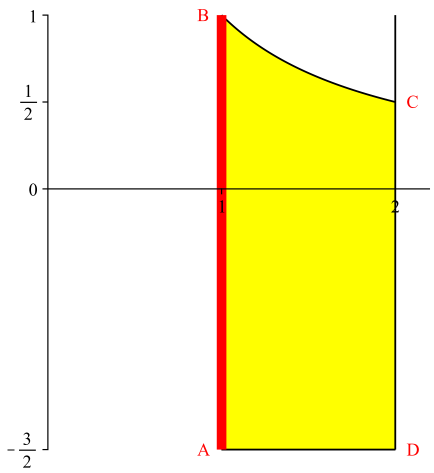
$$f(x_1, x_2) = P_1 x_1 + P_2 x_2 - S(x_1, x_2),$$

kde $S(x_1, x_2)$ jsou související výdaje. Maximalizovat zisk znamená najít maximum veličiny $f(x_1, x_2)$, kde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Jelikož $f'_{x_i} = P_i - S'_{x_i}$, $i = 1, 2$, rovnice pro určení stacionárních bodů budou

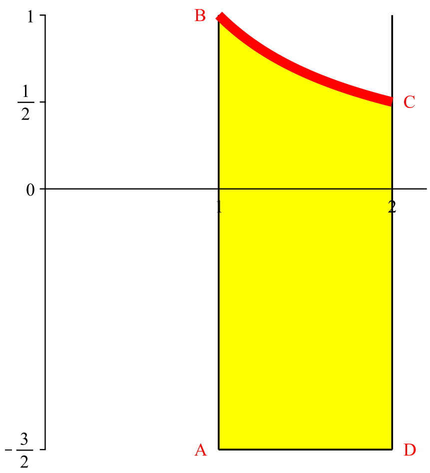
$$P_1 = S'_{x_1}(x_1, x_2), \quad P_2 = S'_{x_2}(x_1, x_2).$$

Pro stanovené konkretní parametry úlohy cílovou funkcí, jejíž maximum hledáme, bude

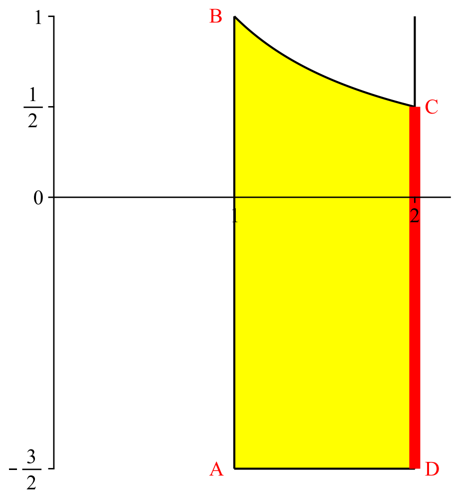
$$f(x_1, x_2) = 8x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2. \tag{11.5}$$



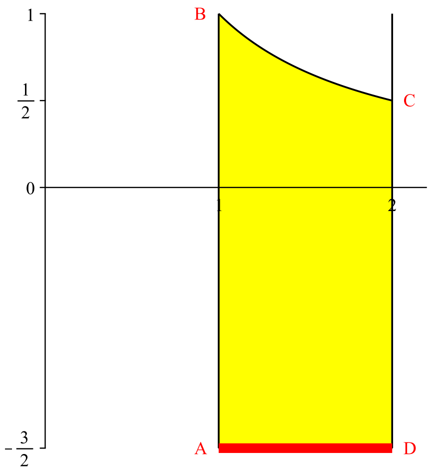
(A)



(B)



(C)



(D)

OBRÁZEK 11.2. Hranice oblasti ohraničené křivkami $x = 1$, $x = 2$, $y = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{x}$.

Jelikož $f'_{x_1}(x_1, x_2) = 8 - 2x_1 - x_2$ a $f'_{x_2}(x_1, x_2) = 10 - 2x_2 - x_1$, rovnice pro stacionární body budou

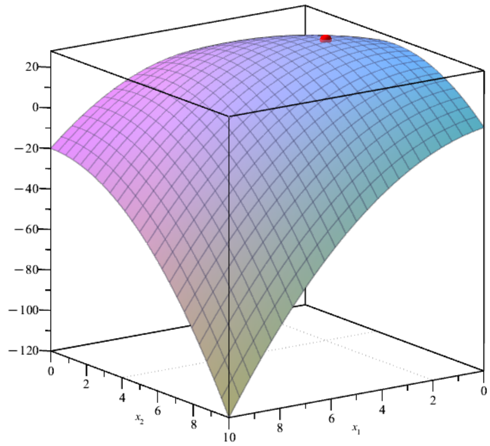
$$2x_1 + x_2 = 8, \quad 2x_2 + x_1 = 10.$$

Z těchto rovnic najděme stacionární body: $x_2 = 8 - 2x_1$, $2(8 - 2x_1) + x_1 = 10$, $6 - 3x_1 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 8 - 2x_1 = 4$. Jediným stacionárním bodem je tedy $(x_0, y_0) = (2, 4)$. Pro určení typu extrému zapišme derivace druhého řádu $f''_{x_1x_1} = (8 - 2x_1 - x_2)'_{x_1} = -2$, $f''_{x_1x_2} = (8 - 2x_1 - x_2)'_{x_2} = -1$, $f''_{x_1x_2} = (10 - 2x_2 - x_1)'_{x_2} = -2$ a sestrojme Hessovu matici

$$H(2,4) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(2,4) & f''_{x_1x_2}(2,4) \\ f''_{x_2x_1}(2,4) & f''_{x_2x_2}(2,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Jelikož $|H(2,4)| = 4 - 1 = 3 > 0$, extrém v tomto bodě je, přičemž je to lokální maximum, neboť $f''_{x_1x_1}(2,4) = -2 < 0$.

Zjistili jsme, že v bodě $(2, 4)$ má cílová funkce (11.5) lokální maximum o hodnotě $f(2,4) = 16 + 40 - 4 - 8 - 16 = 28$. Bod $(2, 4)$ je jediným bodem lokálního extrému, všude jinde tečna rovina není ve vodorovné poloze (obrázek 11.3).



OBRÁZEK 11.3

Na hranici množiny $M = [0, \infty) \times [0, \infty)$, jež je sjednocením kladných částí souřadných os, je $f(x_1, 0) = 8x_1 - x_1^2$, $f(0, x_2) = 10x_2 - x_2^2$. Jelikoz $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, 0) = 2\,(4 - x_1)$, $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, 0) = -2$, při $x_1 = 4$ má funkce $x_1 \mapsto f(x_1, 0)$ lokální maximum o hodnotě $f(4, 0) = 32 - 16 = 16$.

Pro $f(0, x_2)$ máme $\frac{\partial}{\partial x_2} f(0, x_2) = 2(5 - x_2)$, $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(0, x_2) = -2$, a tudíž při $x_2 = 5$ má funkce $x_2 \mapsto f(0, x_2)$ lokální maximum o hodnotě $f(0, 5) = 50 - 25 = 25$.

Hodnota $f(2, 4) = 28$ je vetší, než extremální hodnoty na hranici. Maximální zisk tedy zajistí volba $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, to jest pro dosažení maximálního zisku za daných podmínek je potřeba vyrobit 2 jednotky zboží 1. druhu a 4 jednotky zboží 2. druhu. □

Rejstřík