PŘEDNÁŠKA 10

Lokální extrém funkce dvou proměnných

10.1. Lokální extrémy: definice a příklady

DEFINICE 10.1. Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě (x_0, y_0) *lokálního minima*, jestliže existuje okolí G bodu (x_0, y_0) takové, že je

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \qquad \text{pro všechna } (x, y) \in G.$$

Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě (x_0, y_0) *lokálního maxima*, jestliže existuje okolí G bodu (x_0, y_0) takové, že je

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \qquad \text{pro všechna } (x, y) \in G.$$

Lokální maximum a minimum se nazývají *lokální extrémy*. Jsou-li nerovnosti ostré pro $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, jedná se o *ostré lokální extrémy*.

PŘÍKLAD 10.2. Funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ má v bodě $(0, 0)$ lokální minimum.

Řešení. Je zřejmé, že $f(0, 0) = 0$ a $f(x, y) > 0$, je-li $|x| + |y| > 0$ (obrázek 10.1a). □

PŘÍKLAD 10.3. Funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2$ má v bodě $(0, 0)$ lokální maximum.

Řešení. Je zřejmé, že $f(0, 0) = 0$ a $f(x, y) < 0$, je-li $|x| + |y| > 0$ (obrázek 10.1b). □

PŘÍKLAD 10.4. Funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ v bodě $(0, 0)$ lokální extrém nemá.

Řešení. V bodě $(0, 0)$ je $f(0, 0) = 0$. Je-li $|x| + |y| > 0$, platí

$$f(0, y) = -y^2 < 0, \quad f(x^2, 0) = x^2 > 0,$$

přičemž $|x|$ a $|y|$ mohou být libovolně malé. Toto znamená, že libovolné okolí bodu $(0, 0)$ obsahuje body (x, y), kde je $f(x, y) > f(0, 0)$, a také body, kde je $f(x, y) < f(0, 0)$ (obrázek 10.1c). Extrém v tomto bodě není. □

Bod $(0, 0)$ v příklade 10.4 je pro danou funkci tzv. *sedlovým* bodem.

10.2. Nutná podmínka pro lokální extrém

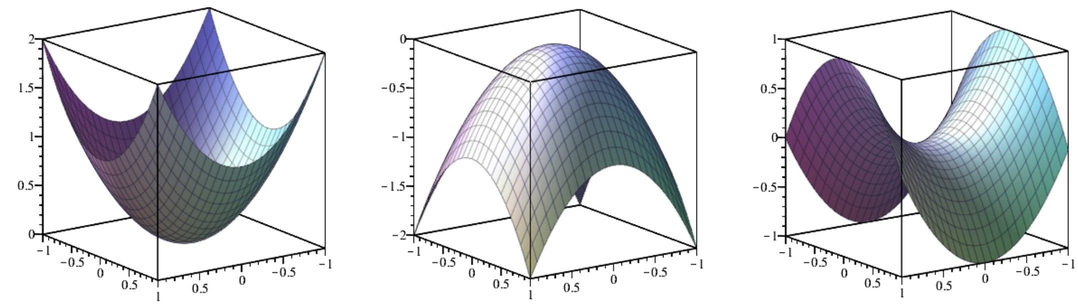
DEFINICE 10.5. *Stacionárním* (nebo *kritickým*) bodem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je bod (x_0, y_0), kde existují parciální derivace 1. řádu a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

anebo alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje.

VĚTA 10.6. Má-li funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém, pak všechny parciální derivace této funkce, které v tomto bodě existují, jsou rovny 0.

Funkce tedy může mít lokální extrém pouze v nějakém stacionárním bodě.



(A) (B) (C)

Obrázek 10.1

10.3. Postačující podmínka pro lokální extrém

10.3.1. Postačující podmínka

Věta 10.7. Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce mající v okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace 2. řádu. Nechť (x_0, y_0) je pro f stacionárním bodem. Položme

$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2. \tag{1}$$

(1) Jestliže $D(x_0, y_0) > 0$, pak má f v (x_0, y_0) ostrý lokální extrém (minimum, je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ a maximum, je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$)

(2) Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$, pak nemá f v (x_0, y_0) lokální extrém.

Poznámka 10.8. Jestliže $D(x_0, y_0) = 0$, pak v (x_0, y_0) muže, ale nemusí být lokální extrém. Takové případy se musí vyšetřit zvlášť.

Tuto podmínku lze formulovat pomocí Hessovy matice funkce f v bodě (x_0, y_0).

Definice 10.9. *Hessova matice* $H(x_0, y_0)$ pro f v bodě (x_0, y_0) je

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Připomeňme si, že dle Schwarzovy věty, jsou-li f''_{xy} a f''_{yx} v (x_0, y_0) spojité, bude $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. Pak je $D(x_0, y_0)$ v (1) determinantem matice $H(x_0, y_0)$:

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

10.3.2. Případ funkce jedné proměnné

Je-li f funkcí pouze jedné proměnné x (speciální případ, když $f(x, y)$ nezávisí na y, tj. $f'_y = 0$), bude

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a typ lokálního extrému pak lze určit podle znaménka $f''_{xx}(x_0, y_0)$: minimum, pokud je kladné, a maximum, pokud je záporné. Obdržíme tak již známou postačující podmínku druhého řádu pro určení lokálního extrému funkce jedné proměnné. Uvedenou větu tedy lze chápat jako její zobecnění pro případ funkce dvou proměnných. Roli derivace druhého řádu pak hraje Hessova matice, jejíž kladnost nebo zápornost chápeme pomocí pojmu *pozitivní* a *negativní definitnosti* tzv. *kvadratických forem.*

10.4. Postup určení lokálních extrémů

Potřebujeme-li určit lokální extrémy funkce dvou proměnných, obvykle postupujeme takto.

(1) Ujistíme se, že má funkce v daném oboru spojité parciální derivace druhého řádu.
(2) Vypočteme parciální derivace 1. řádu a najdeme stacionární body z rovnic

$$f'_x(x,y) = 0, \quad f'_y(x,y) = 0.$$

(3) Najdeme parciální derivace 2. řádu a v každém ze stacionárních bodů vypočteme hodnotu determinantu Hessovy matice. V závislosti na výsledku s využitím věty 10.7 rozhodneme o tom, zda v jednotlivých stacionárních bodech má funkce extrémy. Je-li v určitém stacionárním bodě (x_0, y_0) extrém, vypočítáme i hodnotu $f(x_0, y_0)$, což bude hodnota maxima nebo minima.

10.4.1. Příklady

PŘÍKLAD 10.10. Vyšetřeme extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Řešení. Jelikož $f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y$ $f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x$, stacionární body se určují soustavou rovnic

$$3x^2 - 3y = 0, \quad 3y^2 - 3x = 0,$$

to jest $x^2 = y$, $y^2 = x$; $x^4 - x = 0$. Funkce tedy má dva stacionární body: $(0,0)$ a $(1,1)$. Pro ověření existence extrému v těchto bodech vypočtěme parciální derivace druhého řádu

$$f''_{xx}(x,y) = 6x, \quad f''_{yy}(x,y) = 6y, \quad f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -3$$

a zapišme Hessovu matici:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

V bodě $(0,0)$ je $\det H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$, extrém tedy v $(0,0)$ není.

V bodě $(1,1)$ dostaneme $\det H(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$, a proto v $(1,1)$ lokální extrém je (je to lokální minimum, neboť $f''_{xx}(1,1) = 6 > 0$).

Pomocí věty 10.7 jsme tedy zjistili, že v bodě $(0,0)$ funkce extrém nemá a v bodě $(1,1)$ má lokální minimum o hodnotě $f(1,1) = -1$ (obrázek 10.2). □

PŘÍKLAD 10.11. Vyšetřeme lokální extrémy funkce $f(x,y) = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Řešení. Platí $f'_x = 6xy - 3x^2$, $f'_y = 3x^2 - 4y^3$, a proto z rovnic

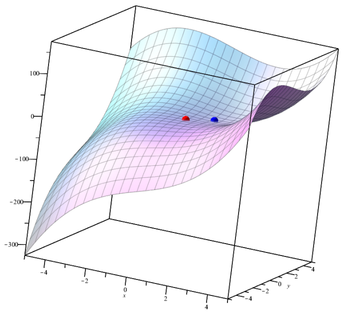
$$6xy - 3x^2 = 0, \quad 3x^2 - 4y^3 = 0,$$

obdržíme dva stacionární body: $(6,3)$, $(0,0)$. Po výpočtu parciálních derivací 2. řádu

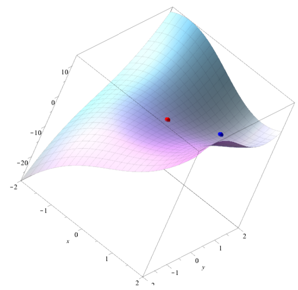
$$f''_{xx} = 6y - 6x, \quad f''_{xy} = 6x, \quad f''_{yy} = -12y^2$$

obdržíme Hessovu matici

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6y - 6x & 6x \\ 6x & -12y^2 \end{pmatrix}.$$



(A)



(B)

OBRÁZEK 10.2

V bodě $(6,3)$ je

$$\det H(6,3) = \begin{vmatrix} -18 & 36 \\ 36 & -108 \end{vmatrix} = 18 \cdot 108 - 36^2 = 648 > 0,$$

a proto dle věty 10.7 v bodě $(6,3)$ funkce f lokální extrém má. Je to lokální maximum, neboť $f''_{xx}(6,3) = -18 < 0$.

V bodě $(0,0)$ věta 10.7 informaci neposkytuje, jelikož je

$$\det H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Charakter změny funkce v okolí tohoto bodu tedy musíme vyšetřit zvlášť. Uvažujme $(x,y) \neq (0,0)$ z libovolného okolí bodu $(0,0)$ a vypočtěme

$$f(0,y) = -y^4 < 0. \tag{2}$$

Vezmeme-li pak $x < 0$, $y = 0$, obdržíme

$$f(x,0) = -x^3 > 0. \tag{3}$$

Poznamenejme, že (2) a (3) platí pro $x \neq 0$, $y \neq 0$, avšak $|x|$ a $|y|$ mohou být libovolně malé. Z uvedeného plyne, že v libovolně malém okolí bodu $(0,0)$, v němž $f(0,0) = 0$, nabývá funkce jak kladných, tak i záporných hodnot. Extrém zde není.

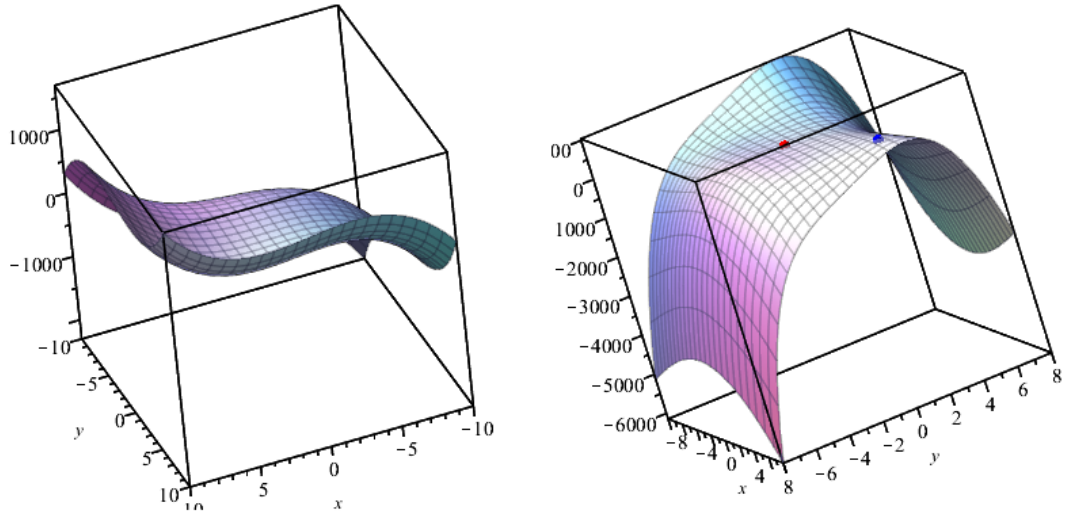
Zjistili jsme, že v bodě $(0,0)$ funkce extrém nemá a v bodě $(6,3)$ má lokální maximum o hodnotě $f(6,3) = 27$ (obrázek 10.3). □

PŘÍKLAD 10.12. Určeme lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 3$.

Řešení. Platí $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y$, a stacionární body pak určujeme ze soustavy rovnic

$$x^3 - x + y = 0, \quad y^3 + x - y = 0. \tag{4}$$

Sečteme-li tyto rovnice, bude $y^3 + x^3 = 0$ a dostaneme $y^3 = -x^3$, $y = -x$. Dosadíme-li $y = -x$ do první rovnice v (4), bude $x^3 - x - x = 0$, $x^3 - 2x = 0$, $x(x^2 - 2) = 0$. Pro x tedy obdržíme hodnoty $x = 0$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$. Odpovídající hodnoty y jsou $y = 0$, $y = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$. Dostáváme stacionární body $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.



(A) (B)

OBRÁZEK 10.3

Parciální derivace 2. řádu jsou $f''_{xx} = 12x^2 - 4$, $f''_{yy} = 12y^2 - 4$, $f''_{xy} = 4$ a determinant Hessovy matice je

$$\det H(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix}.$$

V bodě $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ je

$$\det H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 12 \cdot 2 - 4 & 4 \\ 4 & 12 \cdot 2 - 4 \end{vmatrix} = 400 - 16 = 384 > 0,$$

$f''_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20 > 0$. Je zde lokální minimum.

V bodě $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ mají $\det H(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $f''_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ stejné hodnoty, jako v bodě $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Jedná se o lokální minimum o hodnotě $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^4 - 2(-\sqrt{2})^2 + 4 \cdot (-\sqrt{2})\sqrt{2} - 2(\sqrt{2})^2 + 3 = -5$.

V bodě $(0,0)$ je $\det H(0,0) = 0$. Jelikož např.

$$f(x,0) = x^4 + 0^4 - 2x^2 + 4x \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 + 3 = x^4 - 2x^2 + 3 = x^2(x^2 - 2) + 3,$$
$$f(x,x) = x^4 + x^4 - 2x^2 + 4x \cdot x - 2 \cdot x^2 + 3 = 2x^4 + 3,$$

extrém zde není. □

10.5. Taylorův vzorec

Pro funkci jedné proměnné lze Taylorův vzorec zapsat pomocí diferenciálů vyšších řádů takto:

$$f(x) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}^n f(x_0)(x - x_0) + R_n(x - x_0).$$

V této podobě za obdobných podmínek lze ho zobecnit pro funkce dvou proměnných:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0)(x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(x_0,y_0)(x - x_0, y - y_0) + \dots$$
$$+ \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}^n f(x_0,y_0)(x - x_0, y - y_0) + R_n(x - x_0, y - y_0).$$

Diferenciály vyšších řádů počítáme podle pravidla $\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}f)$ atd. Podrobněji se tomuto tématu věnovat nebudeme.