PŘEDNÁŠKA 11

Globální extrémy funkce dvou proměnných

11.1. Weierstrassova věta

Funkce jedné proměnné, jež je spojitá na ohraničeném uzavřeném intervalu, nabývá na tomto intervalu své největší a nejmenší hodnoty (Weierstrassova věta). Tato věta platí i pro funkce dvou a více proměnných. Pro formulaci je potřeba zavést některé definice. Buď M množina v $\mathbb{R}^2$.

DEFINICE 11.1. Množina M je *ohraničená*, jestliže celá leží v nějaké kouli.

DEFINICE 11.2. Bod $P \in M$ je *vnitřním* bodem množiny M, jestliže spolu s P v M leží i nějaké okolí tohoto bodu. Množina M se nazývá *otevřena*, je-li každý její bod vnitřním.

V jistém smyslu opačnou vlastnost má tzv. bod hraniční.

DEFINICE 11.3. Bod P je *hraničním* bodem pro množinu M, jestliže v každém okolí bodu P jsou jak body patřící do M, tak i body, jež do M nepatří. Množina všech bodů, jež jsou hraniční pro M, se nazývá *hranicí* množiny M.

Bod hraniční pro množinu M může ležet buď v M nebo mimo M.

PŘÍKLAD 11.4. Hranicí množiny

$$M = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$$

je $K_1 \cup K_2$, kde K_1, K_2 jsou kružnice se středem v $(0, 0)$ o poloměrech 1 a 2. Přitom $K_2 \subset M$ a $K_1 \cap M = \varnothing$.

DEFINICE 11.5. Množina M je *uzavřená*, jestliže obsahuje svou hranici.[1]

VĚTA 11.6 (Weierstrassova věta o extremálních hodnotách). Funkce spojitá na ohraničené uzavřené množině nabývá v ní své největší a nejmenší hodnoty.

Všechny předpoklady věty 11.6 jsou podstatné a nelze je vynechat.[2]

11.2. Největší a nejmenší hodnota funkce v ohraničené uzavřené oblasti

Řešení praktických úloh často přivádí k potřebě nalezení extremálních hodnot spojité funkce na uzavřené omezené množině. Takových hodnot funkce nabývá buď v bodech lokálního extrému nebo na hranici množiny, a pro jejich určení lze postupovat takto.

(1) Nalézt stacionární body a hodnoty funkce v těchto bodech.

[1] Z uvedených definic odvodíme, že otevřenou je množina, jež neobsahuje žádné body své hranice.

[2] Toto poznáme již pro funkce jedné proměnné. Např. funkce $f_1(x) = 1/x$, $f_2(x) = 1 - x$ nenabývají maximální hodnoty na $M = (0, 1]$ (M není uzavřená); $f_3(x) = \frac{x}{x+1}$ je omezená na $M = [0, +\infty)$, avšak nenabývá tam maximální hodnoty (M je neomezená).

(2) Vypočítat největší a nejmenší hodnoty funkce na hranici oblasti.
(3) Vzít největší a nejmenší z nalezených hodnot.

11.3. Příklady

PŘÍKLAD 11.7. Pro libovolné $a > 0$ najděme největší a nejmenší hodnoty funkce

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2a^2$$

v kruhu $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Řešení. Jelikož $f'_x = 2x$, $f'_y = -2y$, jediným stacionárním bodem je $(0, 0)$, v němž $f(0, 0) = 2a^2$.

Nalezněme největší a nejmenší hodnotu f na hranici kruhu, tj. na kružnici $x^2+y^2 = a^2$. Pro (x, y) ležící na této kružnicí máme

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2a^2 = x^2 - (a^2 - x^2) + 2a^2 = 2x^2 + 2a^2,$$

a tudíž se jedná o minimalizaci a maximalizaci funkce jedné proměnné $g(x) = 2x^2 + a^2$ pro $-a \leq x \leq a$ (neboť body kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ mají $|x| \leq a$).

Stacionárním bodem g je $x = 0$, pak $g(0) = a^2$. V krajních bodech intervalu, tj. v bodech $x = \pm a$, máme $g(\pm a) = 3a^2$.

Pak odvodíme, že f nabývá největší hodnoty $3a^2$ v bodech $(-a, 0)$ a $(a, 0)$ a nejmenší hodnoty a^2 v bodech $(0, -a)$ a $(0, a)$. (Nejmenší hodnoty a^2 funkce nabývá v bodech kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ pro $x = 0$, tj. $y = \pm a$). □

PŘÍKLAD 11.8. Určeme největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x, y) = x^2y + xy^2 + xy$$

v uzavřené oblasti M ohraničené křivkami $x = 1$, $x = 2$, $y = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{x}$.

Řešení. Zderivováním obdržíme $f'_x(x, y) = 2xy + y^2 + y$, $f'_y(x, y) = 2xy + x^2 + x$. Stacionární body se pak určují ze soustavy rovnic $2xy + y^2 + y = 0$, $2xy + x^2 + x = 0$, tj.

$$y(2x + y + 1) = 0, \quad x(x + 2y + 1) = 0.$$

Dostáváme stacionární body $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, dále pak z rovnic

$$2x + y + 1 = 0, \quad x + 2y + 1 = 0.$$

obdržíme třetí bod $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Žádný z těchto bodů však neleží v množině M (viz obrázek 11.1). Musíme tedy vyšetřovat hodnoty funkce na hranici oblasti M.

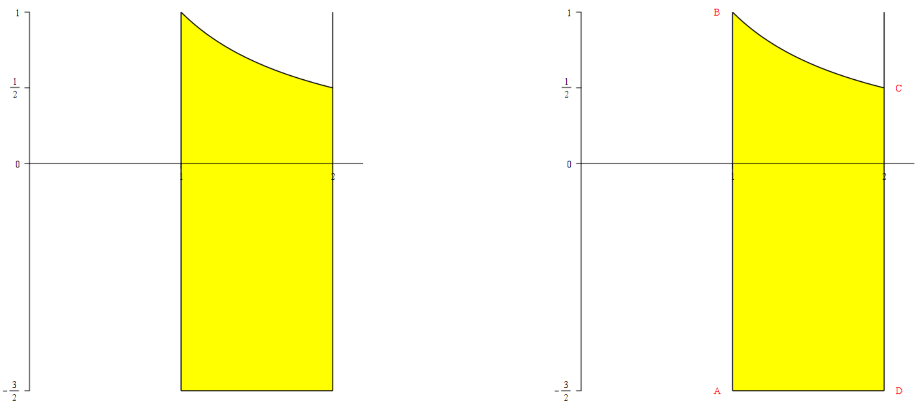
Vyšetřeme extremální hodnoty funkce na hranici množiny M. Hranicí je křivka sestavená z úseků AB, BC, CD a DA, na nichž extremální hodnoty funkce vyšetříme zvlášť.

Na úseku AB je $x = 1$, $f(1, y) = y^2+2y =: g_1(y)$, kde $-\frac{3}{2} \leq y \leq 1$. Pak $g'_1(y) = 2y+2$, stacionární bod je $y = -1$. Hodnoty funkce g_1 v stacionárním bodě a v koncových bodech intervalu jsou

$$g_1(-1) = -1, \quad g_1(1) = 3, \quad g_1\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}. \tag{1}$$

Na BC je $y = \frac{1}{x}$, $f\left(x, \frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x} + 1 =: g_2(x)$, kde $1 \leq x \leq 2$. Pak $g'_2(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, stacionární body jsou $x = \pm 1$. V intervalu $[1, 2]$ leží pouze bod $x = 1$. Dostaneme hodnoty

$$g_2(1) = 3, \quad g_2(2) = \frac{7}{2}. \tag{2}$$



(A) (B)

OBRÁZEK 11.1. Oblast ohraničená křivkami $x = 1$, $x = 2$, $y = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{x}$.

Na CD je $x = 2$, $f(2, y) = 2y^2 + 6y =: g_3(y)$, kde $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$. Pak $g_3'(x) = 4y + 6$, stacionární bod je $y = -\frac{3}{2}$. Dostaneme hodnoty

$$g_3\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}, \quad g_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}. \tag{3}$$

Nakonec, na DA je $y = -\frac{3}{2}$, $f\left(x, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x =: g_4(x)$, kde $1 \leq x \leq 2$. Pak $g_4'(x) = -3x + \frac{3}{4}$, stacionární bod je $x = \frac{1}{4}$, ten však neleží v $[1, 2]$. Proto vypočtěme hodnoty v koncových bodech intervalu:

$$g_4(1) = -\frac{3}{4}, \quad g_4(2) = -\frac{9}{2}. \tag{4}$$

Porovnáme-li hodnoty vypočtené v (1), (2), (3), (4), obdržíme

$$f_{\max} = f\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}, \quad f_{\min} = f\left(2, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}.$$

Extremálních hodnot tedy funkce nabývá v bodech hranice uvažované množiny. □

PŘÍKLAD 11.9 (úloha o maximálním zisku). Vyrábí se dva druhy zboží, jejichž ceny jsou P_1 a P_2 za jednotku. Popište, jak určit maximální zisk z prodeje vyrobeného zboží, je-li známa funkce výrobních a vedlejších výdajů S. Určete maximální zisk za předpokladu, že $P_1 = 8$, $P_2 = 10$, a funkcí výdajů je

$$S(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

Řešení. Buďte x_1, x_2 množství vyrobeného zboží každého z druhů. Funkce zisku je

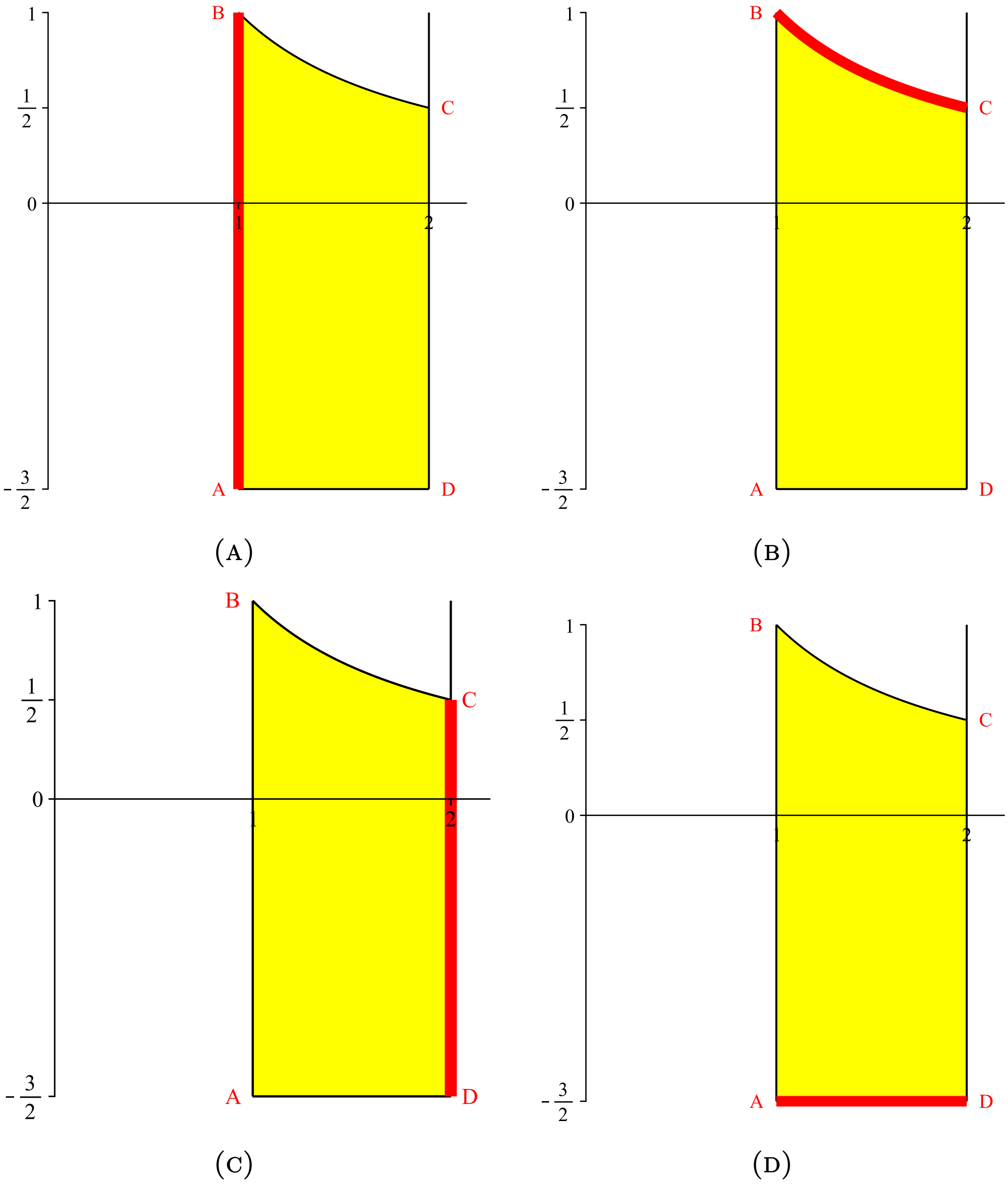
$$f(x_1, x_2) = P_1x_1 + P_2x_2 - S(x_1, x_2),$$

kde $S(x_1, x_2)$ jsou související výdaje. Maximalizovat zisk znamená najít maximum veličiny $f(x_1, x_2)$, kde $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Jelikož $f'_{x_i} = P_i - S'_{x_i}$, $i = 1, 2$, rovnice pro určení stacionárních bodů budou

$$P_1 = S'_{x_1}(x_1, x_2), \quad P_2 = S'_{x_2}(x_1, x_2).$$

Pro stanovené konkretní parametry úlohy cílovou funkcí, jejíž maximum hledáme, bude

$$f(x_1, x_2) = 8x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2. \tag{5}$$



Obrázek 11.2. Hranice oblasti ohraničené křivkami $x = 1$, $x = 2$, $y = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{x}$.

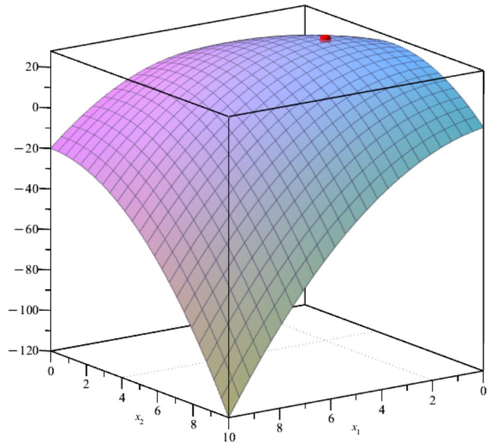
Jelikož $f'_{x_1}(x_1, x_2) = 8 - 2x_1 - x_2$ a $f'_{x_2}(x_1, x_2) = 10 - 2x_2 - x_1$, rovnice pro stacionární body budou

$$2x_1 + x_2 = 8, \quad 2x_2 + x_1 = 10.$$

Z těchto rovnic najděme stacionární body: $x_2 = 8 - 2x_1$, $2(8 - 2x_1) + x_1 = 10$, $6 - 3x_1 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 8 - 2x_1 = 4$. Jediným stacionárním bodem je $(x_0, y_0) = (2, 4)$. Pro určení typu extrému zapišme derivace druhého řádu $f''_{x_1x_1} = (8 - 2x_1 - x_2)'_{x_1} = -2$, $f''_{x_1x_2} = (8 - 2x_1 - x_2)'_{x_2} = -1$, $f''_{x_1x_2} = (10 - 2x_2 - x_1)'_{x_2} = -2$ a sestrojme Hessovu matici

$$H(2,4) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(2,4) & f''_{x_1x_2}(2,4) \\ f''_{x_2x_1}(2,4) & f''_{x_2x_2}(2,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Jelikož $|H(2,4)| = 4 - 1 = 3 > 0$, extrém v tomto bodě je, přičemž je to lokální maximum, neboť $f''_{x_1x_1}(2,4) = -2 < 0$.



OBRÁZEK 11.3

Zjistili jsme, že v bodě $(2, 4)$ má cílová funkce (5) lokální maximum o hodnotě $f(2, 4) = 16 + 40 - 4 - 8 - 16 = 28$. Na hranici množiny $M = [0, \infty) \times [0, \infty)$, jež je sjednocením kladných částí souřadných os, má funkce hodnotu 0: $f(x_1, 0) = f(0, x_2) = 0$. Bod $(2, 4)$ je jediným bodem lokálního extrému, všude jinde tečna rovina není ve vodorovné poloze (obrázek 11.3).

Maximální zisk tedy zajistí volba $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, to jest pro dosažení maximálního zisku za daných podmínek je potřeba vyrobit 2 jednotky zboží 1. druhu a 4 jednotky zboží 2. druhu. $\square$