PŘEDNÁŠKA 1

Číselná posloupnost

1.1. Opakování

Přirozená a celá čísla, racionální a iracionální čísla, reálná čísla, komplexní čísla

1.2. Definice, vlastnosti

DEFINICE 1.1. Číselnou posloupností rozumíme *nekonečnou* posloupnost po sobě v radě jdoucích čišel x_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Příklady:

$$
\begin{array}{ll}
x_n = n & 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\
x_n = \dfrac{1}{n} & 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4}\ \ldots \\
x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} & -1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4}\ \ldots
\end{array}
$$

Číselná posloupnost x_n, $n = 1, 2, \ldots$. Ohraničená? Rostoucí, klesající? Má vlastní (konečnou) limitu? Má nevlastní limitu ($\pm\infty$)?

1.3. Limita

DEFINICE 1.2. Číslo $L \in \mathbb{R}$ je limitou posloupnosti $\{x_n : n \geq 1\}$, jestliže k libovolně malému kladnému číslu ε existuje N_ε takové, že pro všechna $n \geq N_\varepsilon$ platí $|x_n - L| < \varepsilon$.

Zmíněné číslo značíme N_ε, neboť jeho hodnota závisí na zvolené hodnotě ε.

1.4. Bolzanova-Cauchyova podmínka

DEFINICE 1.3. Číselná posloupnost $\{x_n : n \geq 1\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, jestliže ke každému libovolně malému kladnému ε lze najít N_ε takové, že pro všechna $n, m \geq N_\varepsilon$ platí

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

VĚTA 1.1. Posloupnost $\{x_n : n \geq 1\}$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku tehdy a pravě tehdy, když existuje číslo L takové, že

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = L.$$

1.5. Srovnávací věta

VĚTA 1.2. Buďte $\{x_n : n \geq 1\}$ a $\{y_n : n \geq 1\}$ dvě číselné posloupnosti a nechť existují $\lim_{n\to+\infty} x_n$ a $\lim_{n\to+\infty} y_n$.

(1) Jestliže existuje N takové, že pro všechna $n \geq N$ platí $x_n \leq y_n$, pak
$$\lim_{n\to+\infty} x_n \leq \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

(2) Jestliže
$$\lim_{n\to+\infty} x_n < \lim_{n\to+\infty} y_n,$$
pak lze najít N tak, aby pro všechna $n \geq N$ platilo $x_n < y_n$.

1.6. Věta o sevření („věta o dvou policajtech")

VĚTA 1.3. Buďte $\{x_n : n \geq 1\}$, $\{y_n : n \geq 1\}$ a $\{z_n : n \geq 1\}$ číselné posloupnosti a nechť existují $\lim_{n\to+\infty} x_n$ a $\lim_{n\to+\infty} y_n$ a jsou si rovné:
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = L.$$
Existuje-li N takové, že pro všechna $n \geq N$ platí
$$x_n \leq z_n \leq y_n,$$
pak existuje $\lim_{n\to+\infty} z_n$ a
$$\lim_{n\to+\infty} z_n = L.$$

1.7. Aritmetika limit

Aritmetika limit: existují-li $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, pak $\lim(x_n + y_n) = ab$, $\lim(x_n y_n) = ab$ a pro $b \neq 0$ i $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

1.8. Limita monotónní posloupnosti

Monotónní posloupnost: rostoucí (neklesající) nebo klesající (nerostoucí). Rostoucí nebo klesající: ryze monotonní.

VĚTA 1.4. Monotónní posloupnost má vždy limitu (možná nevlastní). Limita omezené monotónní posloupnosti je vždy vlastní.

1.9. Podposloupnosti

Buď $\{x_n : n \geq 1\}$ číselná posloupnost. Její podposloupnost je posloupnost typu $\{x_{k_n} : n \geq 1\}$, kde $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ je nekonečna posloupnost přirozených čišel.

Příklady:
$\{x_{2n-1} : n \geq 1\}$, liché cleny: x_1, x_3, x_5, ...
$\{x_{2^n} : n \geq 1\}$: x_2, x_4, x_8, ...

VĚTA 1.5. Číselná posloupnost má limitu tehdy a pravě tehdy, když všechny její podposloupnosti konvergují a jejich limity jsou stejné.

Dokázat, že jistá posloupnost limitu nemá: najít dvě podposloupnosti konvergující k různým limitám.

VĚTA 1.6 (Bolzanova–Weierstrassova). Z každé omezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost mající vlastní limitu.

1.10. Hromadné body

Definice 1.4. Hromadným bodem posloupnosti $\{x_n : n \geq 1\}$ nazýváme bod, v jehož libovolně malém okolí se nachází nekonečně mnoho členů posloupnosti.

Tvrzení 1.1. (1) Každá posloupnost má hromadné body (je možné, že nevlastní).
(2) Posloupnost má limitu tehdy a právě tehdy, když má jediný hromadný bod.
(3) Bod c je hromadným bodem posloupnosti tehdy a právě tehdy, když v dané posloupnosti existuje nějaká konvergentní podposloupnost, pro níž je c limitou.

1.11. Limes superior a limes inferior

Limes superior (horní limita) a limes inferior (dolní limita): největší resp. nejmenší hromadný bod dané posloupnosti.

Definice 1.5. Buď $\{x_n : n \geq 1\}$ nekonečná posloupnost. Je-li ohraničená shora,

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$$

a pro shora neohraničenou klademe $\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Je-li ohraničená zdola,

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$$

a pro zdola neohraničenou klademe $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Tvrzení 1.2. (1) Vždy je $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$;
(2) $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$ právě tehdy, když existuje $\lim_{n\to\infty} x_n$;
(3) $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n$.

Příklad 1.1. Vyšetřeme hromadné body posloupnosti

$$x_n = \frac{1}{2}(2 + (-1)^{n+1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Řešení. Pro libovolné přirozené k je

$$x_{2k} = \frac{1}{2}(2 + (-1)^{2k+1}) = \frac{1}{2}(2-1) = -\frac{1}{2},$$
$$x_{2k-1} = \frac{1}{2}(2 + (-1)^{2k-1+1}) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2},$$

přičemž tyto vzorce vyčerpají všechny možnosti. Hromadné body jsou

$$-\frac{1}{2} = \liminf_{n\to\infty} x_n, \quad \frac{3}{2} = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Limita $\lim_{n\to\infty} x_n$ neexistuje.