PŘEDNÁŠKA 2

Limita funkce

2.1. Limita funkce v nevlastním bodě

Limitou výrazu $f(x)$ v nevlastním bodě rozumíme hodnotu, k níž se $f(x)$ blíží při $x \to +\infty$ anebo $x \to -\infty$. Taková hodnota, obecně řečeno, existovat nemusí.

2.1.1. Vlastní limita v nekonečnu

Buď f funkce definovaná na $(a, +\infty)$. Limitu $f(x)$ pro $x \to +\infty$ lze definovat podobně definici limity číselné posloupnosti.

DEFINICE 2.1. Číslo $L \in \mathbb{R}$ je *limitou* funkce f pro $x \to +\infty$:

$$L = \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

jestliže k libovolně malému kladnému číslu ε existuje číslo T_ε takové, že pro všechna $x \geq T_\varepsilon$ platí

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Zde hodnota L je reálné číslo, limita je vlastní. Limita pro $x \to -\infty$ se definuje obdobně.

PŘÍKLAD 2.1. Platí

$$\lim_{x \to +\infty} 2^{-x} = 0.$$

Důkaz. Hodnota $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ klesá k 0 pro $x \to +\infty$ a tudíž bude $L = 0$. Aby platilo

$$|2^{-x} - L| = |2^{-x} - 0| = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} < \varepsilon$$

stačí, aby $2^x > \frac{1}{\varepsilon} = 2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}}$, tj. (vzhledem k tomu, že $x \mapsto 2^x$ je rostoucí) aby bylo x dostatečně velké: $x > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. □

2.1.2. Nevlastní limita v nekonečnu

Limita je *nevlastní*, jestliže je $L = +\infty$ nebo $L = -\infty$.

DEFINICE 2.2.
(1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, jestliže k libovolně velkému A existuje r_A takové, že pro všechna $x \geq r_A$ platí $f(x) > A$.
(2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, jestliže k libovolně velkému A existuje r_A takové, že pro všechna $x \geq r_A$ platí $f(x) < -A$.

Limita pro $x \to -\infty$ se definuje obdobně.

PŘÍKLAD 2.2. Platí

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty.$$

Důkaz. Hodnota 2^x je pro $x \to +\infty$ neomezeně rostoucí. Pro libovolně velké A bude $2^x > A$, je-li $2^x > 2^{\log_2 A}$, tj. $x > \log_2 A$. $\square$

2.2. Limita funkce ve vlastním bodě

Mějme funkci $f : I \to \mathbb{R}$ s definičním oborem $I \subset \mathbb{R}$. Buď $c \in \mathbb{R}$ (je možné, že $c \notin I$ a $f(c)$ není definováno).

DEFINICE 2.3. Říkáme, že bod c je *hromadným bodem* množiny I, jestliže v každém okolí bodu c jsou nějaké body množiny I.

Táto vlastnost znamená, že se k bodu c lze jakkoliv těsně přiblížit pomocí bodů množiny I.

Je-li c je hromadným bodem množiny I, má smysl uvažovat, jak se $f(x)$ chová, když se $x \in I$ přibližuje k c.

Nechť dále c je hromadný bod pro I.

2.2.1. Limita funkce v bodě: definice jazykem "$\varepsilon \dots \delta$"

DEFINICE 2.4. Číslo $L \in \mathbb{R}$ je *limitou* funkce f v bodě c:

$$L = \lim_{x \to c} f(x),$$

jestliže k libovolně malému kladnému číslu ε existuje δ_ε takové, že pro všechna x splňující $|x - c| < \delta_\varepsilon$ platí

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Význam této vlastnosti: při x se blížícím k c se hodnota $f(x)$ blíží k L.

2.2.2. Nevlastní limity

DEFINICE 2.5. Říkáme, že f má v bodě c limitu rovnou $+\infty$:

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty,$$

jestliže k libovolně velkému číslu A existuje δ_A takové, že pro všechna x splňující $|x - c| < \delta_A$ platí $f(x) > A$.

Obdobně se definuje $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$.

2.2.3. Limita funkce v bodě: definice jazykem posloupností

Totéž lze definovat přes limity číselných posloupností:

DEFINICE 2.6. $L \in \mathbb{R}$, $L = \lim_{x \to c} f(x)$, jestliže platí

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$$

pro *libovolnou* posloupnost čísel $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ takovou, že $\lim_{n \to +\infty} x_n = c$.

Lze dokázat, že definice 2.5 a 2.6 mají stejný význam.

2.3. Jednostranné limity

Jednostranná limita

$$\lim_{x\to c+} f(x)$$

(čteme: "limita $f(x)$ pro $x \to c$ zprava") se definuje podobně limitě $\lim_{x\to c} f(x)$ s tím rozdílem, že $x \to c$ *zprava*, tj. $x \to c$ a vždy $x > c$. Obdobně se definuje $\lim_{x\to c-} f(x)$.

Totéž lze formulovat jazykem číselných posloupností podobně odst. 2.2.3.

DEFINICE 2.7. $L \in \mathbb{R}$ je *limitou funkce* f *v bodě* c *zprava* ($L = \lim_{x\to c+} f(x)$), jestliže $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$ pro každou posloupnost čísel $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ takovou, že $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$ a $x_n > c$ *pro všechna* n.

DEFINICE 2.8. $L \in \mathbb{R}$ je *limitou funkce* f *v bodě* c *zleva* ($L = \lim_{x\to c-} f(x)$), jestliže $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$ pro každou posloupnost čísel $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ takovou, že $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$ a $x_n < c$ *pro všechna* n.

PŘÍKLAD 2.3. Platí

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty.$$

Řešení. Výsledky jsou zcela zřejmé; poznamenejme jen, že lze uvažovat pouze jednostrannou limitu pro $x \to 0+$, jelikož jsou funkce $x \mapsto \sqrt{x}$ a $x \mapsto \ln x$ definovány pouze pro $x > 0$.

VĚTA 2.1. Limita $\lim_{x\to c} f(x)$ existuje tehdy a právě tehdy, když v bodě c existují obě dvě jednostranné limity a

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \lim_{x\to c-} f(x).$$

PŘÍKLAD 2.4. Buď m přirozené číslo. Dokažme, že limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^m}$$

je rovna $+\infty$ pro m sudé a neexistuje pro m liché.

Řešení. Pro libovolné přirozené k

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty$$

a proto $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty$. Budeme-li uvažovat $\frac{1}{x^{2k+1}}$ pro $x \to 0$ ($x > 0$), obdržíme, že $0 < \frac{1}{x^{2k+1}} = \frac{1}{x^{2k}}\frac{1}{x} \to +\infty$. Stejně tak obdržíme, že $0 > \frac{1}{x^{2k+1}} = \frac{1}{x^{2k}}\frac{1}{x} \to -\infty$. Proto je

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^{2k+1}} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^{2k+1}} = -\infty$$

a dle věty 2.1 limita $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2k+1}}$ neexistuje.

2.4. Neurčité výrazy

S využitím pojmu limity lze matematicky precizně vyšetřovat tzv. neurčité výrazy, jež vznikají v důsledku dosazení do vzorce buď $\pm\infty$ nebo hodnoty, kde není výraz korektně definován (viz tabulka[1] 2.1).

Např. $0 \cdot \infty$ znamená limitu tvaru

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x),$$

[1] I když v případě $\frac{1}{\infty}$ lze říci, že $\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = 0$ vždy, když $\lim_{x\to c} g(x)$ je $+\infty$ nebo $-\infty$, je správné takové výrazy chápat pořád jako neurčité a neoperovat s $+\infty$ a $-\infty$ jako s čísly.

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$	1^∞	∞^0	0^0	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{\infty}$

TABULKA 2.1. Neurčité výrazy

kde $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ a $\lim_{x\to c} g(x)$ je $+\infty$ nebo $-\infty$ (anebo takovou je nějaká jednostranní limita). Je to výraz neurčitý, neboť pro různé funkce f a g se chování součinu $f(x)g(x)$ při $x \to c$ může lišit a tudíž výsledek obecně nelze jednoznačně určit. Vskutku, je-li $c = 0$,

(1) pro $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ bude

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1;$$

(2) pro $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ bude

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} x^2\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0;$$

(3) pro $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$ bude

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty;$$

(4) pro $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ limita

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

neexistuje,[2]

přičemž v každém z těchto případů se jedná o neurčitý výraz typu $0 \cdot \infty$.

PŘÍKLAD 2.5. Vypočtěme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-4x+3}.$$

Řešení. Jelikož

$$\frac{x-1}{x^2-4x+3} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

kde $f(1) = g(1) = 0$, jedná se o neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ pro $x \to 1$. Funkce f a g jsou polynomy a pro každý z nich číslo 1 je kořenem. Platí $g(x) = (x-1)(x-3)$ a proto

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{2}.$$

Poznamenejme, že bez využití pojmu limity chováni funkce $x \mapsto \frac{x-1}{x^2-4x+3}$ v okolí bodu 1 vyšetřit nedokážeme, neboť dosazení $x = 1$ vede na neurčitý výraz $\frac{0}{0}$.

2.5. Významné limity

jsou zejména tyto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1.$$

[2] viz příklad 2.4

2.6. Vlastnosti limit

VĚTA 2.2. Existují-li konečné $\lim_{x\to c} f(x)$ a $\lim_{x\to c} g(x)$, platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) &= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x),\\
\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) &= \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x),\\
\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \quad (\text{je-li } \lim_{x\to c} g(x) \neq 0).
\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 2.6. Vypočtěme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\mathrm{e}^{2x}-1}.$$

Řešení. Jedná se o typ $\frac{0}{0}$. Úpravou obdržíme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\mathrm{e}^{2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\frac{2x}{\mathrm{e}^{2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\mathrm{e}^{2x}-1} = 1,$$

neboť limity $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}$ a $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\mathrm{e}^{2x}-1}$ existují a jsou rovny 1 (pro $x \to 0$ je $2x \to 0$ a naopak; tudíž dle odst. 2.5 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$).

VĚTA 2.3. Je-li funkce v omezená v okolí bodu c a $\lim_{x\to c} u(x) = 0$, pak bude

$$\lim_{x\to c} u(x)v(x) = 0.$$

Důkaz. Dle předpokladu existuje $K > 0$ takové, že v nějakém okolí bodu c je $|v(x)| \leq K$. Pak bude $|u(x)v(x)| \leq K|u(x)| \to 0$ pro $x \to c$. □

PŘÍKLAD 2.7. Vypočteme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(2^x)}{\sqrt[3]{x^4-1}}.$$

Řešení. U podílu $\frac{x}{\sqrt[3]{x^4-1}}$ se jedná o výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$. Zadání upravme takto:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(2^x)}{\sqrt[3]{x^4-1}} &= \lim_{x\to+\infty} \cos(2^x)\frac{x}{\sqrt[3]{x^4-1}} = \lim_{x\to+\infty} \cos(2^x)\frac{x}{\sqrt[3]{x^4\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \cos(2^x)\frac{x}{x^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^4}}} = \lim_{x\to+\infty} \cos(2^x)\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^4}}}.
\end{aligned}$$

Pak dle věty 2.3 obdržíme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(2^x)}{\sqrt[3]{x^4-1}} = 0,$$

jelikož je vždy $|\cos(2^x)| \leq 1$ a $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^4}} = +\infty$.

2.7. Důkaz neexistence limity

2.7.1. S užitím jednostranných limit

Důkaz neexistence limity lze provést podle věty 2.1: limita $\lim_{x\to c} f(x)$ neexistuje, jestliže neexistuje alespoň jedna z jednostranných limit $\lim_{x\to c+} f(x)$, $\lim_{x\to c-} f(x)$ anebo obě dvě jednostranné limity existují, avšak mají různé hodnoty (viz příklad 2.4).

2.7.2. *S užitím vybraných posloupností*

Dle definice 2.6 limita $\lim_{x\to c} f(x)$ existuje a je rovna L právě když

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$$

pro libovolnou posloupnost $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ takovou, že $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$. Tudíž, pro neexistenci limity $\lim_{x\to c} f(x)$ bude stačit, najdeme-li dvě posloupnosti $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ a $\{\tilde{x}_n : n = 1, 2, \dots\}$ s $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \tilde{x}_n = c$ takové, že

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L, \quad \lim_{n\to+\infty} f(\tilde{x}_n) = \tilde{L}$$

a $L \neq \tilde{L}$.

PŘÍKLAD 2.8. Dokažme, že funkce $f(x) = x \sin x$ nemá limitu pro $x \to +\infty$ ani pro $x \to -\infty$.

Řešení. Hodnoty funkce f při x rostoucím v kladných číslech neustále kolísají, přičemž hodnoty funkce postupně zaplňují intervaly tvaru $\langle -A, A\rangle$, kde A roste neomezeně (viz obrázek 2.1). Lze uplatnit myšlenku s vybráním dvou různých cest pro $x \to +\infty$, jež vedou na různé výsledky pro hodnoty funkce.

Zvolme nekonečné posloupnosti $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ a $\{\tilde{x}_n : n = 1, 2, \dots\}$, např., tak, aby platilo

$$\sin x_n = 1, \quad \sin x_n = 0$$

pro každé n. Stačí vzít

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \tilde{x}_n = \pi n.$$

Je zřejmé, že $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \tilde{x}_n = +\infty$. Pak bude

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n \sin x_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = +\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(\tilde{x}_n) = \lim_{n\to+\infty} \tilde{x}_n \sin \tilde{x}_n = 0,$$

což dokazuje neexistenci limity $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Navíc je funkce f sudá a tudíž neexistuje ani $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

PŘÍKLAD 2.9. Dokažme, že funkce $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nemá limitu pro $x \to 0$.

Řešení. Pro $x \to 0+$ je $\frac{1}{x} \to +\infty$. Proto funkce v okolí bodu 0 neustále kmitá mezi hodnotami -1 a 1, přičemž při přiblížení k 0 intenzita kmitů porad narůstá (viz obrázek 2.2). Zvolme posloupnosti $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ a $\{\tilde{x}_n : n = 1, 2, \dots\}$ tak, aby bylo

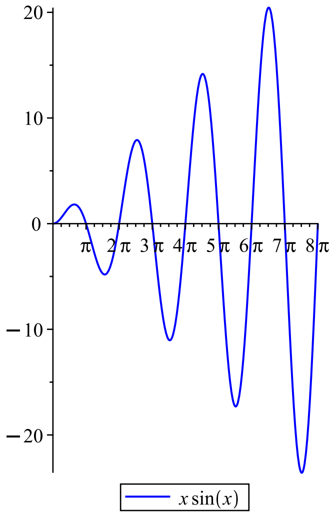
$$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1, \quad \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0$$

pro každé n. Je zřejmé, že toto bude platit, jestliže

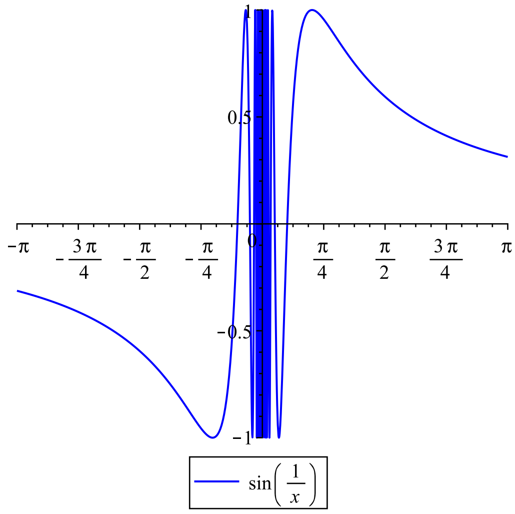
$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad \tilde{x}_n = \frac{1}{\pi n}, \tag{2.1}$$

přičemž obě dvě posloupnosti (2.1) jsou kladné a $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \tilde{x}_n = 0$. Pak pro každé n bude

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1, \quad f(\tilde{x}_n) = \sin\left(\frac{1}{\tilde{x}_n}\right) = \sin \pi n = 0$$



OBRÁZEK 2.1. Graf funkce $y = x \sin x$



OBRÁZEK 2.2. Graf funkce $y = \sin \frac{1}{x}$

a proto $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(\tilde{x}_n)$. Dokázali jsme, že neexistuje limita zprava $\lim_{x\to0+} f(x)$ a tudíž neexistuje ani[3] $\lim_{x\to0} f(x)$.

2.8. Substituce v limitě

VĚTA 2.4. Buďte f funkce definovaná v okolí bodu A a g funkce definovaná v okolí bodu c. Existují-li

$$\lim_{x\to A} f(x) = B, \quad \lim_{x\to c} g(x) = A,$$

pak bude existovat i

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = B.$$

PŘÍKLAD 2.10. Vypočtěme

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

[3]Vhledem k lichosti funkce f je jasné, že neexistuje ani $\lim_{x\to0-} f(x)$.

Řešení. Pro $f(x) = \sin x$ je $f(0) = 0$ a veličina $\frac{1}{x}$ klesá k 0 pro $x \to +\infty$. Proto lze aplikovat větu 2.4 s $g(x) = \frac{1}{x}$, pro níž je $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} f\left(g(x)\right) = 0.$$

Lze si také všimnout, že pro dostatečné velké x ($x > \frac{1}{\pi}$) bude $0 < \frac{1}{x} < \pi$ a tudíž $\sin\left(\frac{1}{x}\right) > 0$, tj. se křivka blíží k ose x shora (viz obrázek 2.2).

2.9. Spojitost funkce

Spojitou funkci si představujeme tak, že její grafem je křivka, kterou lze nakreslit bez přerušení „jedním tahem". Přesná definice využívá pojmu limity.

2.9.1. Spojitost funkce v bodě

DEFINICE 2.9. Funkce f je *spojitá* v bodě c, jestliže $f(x) \to f(c)$ pro $x \to c$:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Funkce f je spojitá na otevřeném intervalu I, jestliže je spojitá v každém jeho bodě.

VĚTA 2.5. Buďte g funkce spojitá v okolí bodu c a f funkce spojitá v okolí bodu $g(c)$. Pak bude složená funkce $x \mapsto f(g(x))$ spojitá v v okolí bodu c.

PŘÍKLAD 2.11. Funkce $x \mapsto 2^{\cos x}$, $x \mapsto \sin(3^{-x})$, $x \mapsto \sqrt[4]{x^2+1}$ jsou spojité na $(-\infty, \infty)$. Funkce $x \mapsto \sin(\ln x)$ je spojitá na $(0, +\infty)$.

2.9.2. Metoda bisekce

VĚTA 2.6. Je-li funkce f spojitá na intervalu (a, b) a platí $f(a)f(b) < 0$, pak existuje bod $\xi \in (a, b)$, v němž $f(\xi) = 0$.

Na tomto tvrzení je založena tzv. metoda bisekce přibližného určení řešení rovnice

$$f(x) = 0. \tag{2.2}$$

Tato metoda spočívá v následujícím. Položme $a_0 = a$, $b_0 = b$ a vypočtěme hodnotu f v bodě $\frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ (střed intervalu (a_0, b_0)). Je-li $f(a_0)f(\frac{1}{2}(a_0 + b_0)) < 0$, vezměme $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$, v opačném případě[4] položme $a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$, $b_1 = b_0$. Pokračujme obdobně na intervalu (a_1, b_1) atd. Obdržíme posloupnost zužujících se intervalů (a_n, b_n) takových, že platí

$$f(a_n)f(b_n) < 0$$

pro všechna $n = 0, 1, \ldots$. Jelikož

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a) \to 0, \quad n \to +\infty,$$

budou a_n a b_n konvergovat k řešení rovnice (2.2).

[4]Vyjde-li hodnota f ve středu intervalu 0, znamená to, že řešení rovnice (2.2) jsme již nalezli.

2.9.3. Druhy bodů nespojitosti

jsou následující:

(1) existuje $\lim_{x\to c} f(x)$, ale $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$ nebo $f(c)$ není definováno (odstranitelná nespojitost)
(2) existují konečné jednostranné limity a $\lim_{x\to c-} f(x) \neq \lim_{x\to c+} f(x)$ (typ I „skok“)
(3) alespoň jedna z limit $\lim_{x\to c-} f(x)$ a $\lim_{x\to c+} f(x)$ je nevlastní nebo neexistuje (typ II)