PŘEDNÁŠKA 3

Derivace funkce jedné proměnné

3.1. Pojem derivace: intuitivní představa

Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reálná funkce jedné reálné proměnné, jež popisuje vývoj určité proměnné veličiny.

INTUITIVNÍ „DEFINICE“. Derivace funkce v bodě udává *okamžitou rychlost* růstu či poklesu její hodnoty v daném bodě.

Poznámky:

(1) Výpočtem hodnoty funkce v bodě zodpovíme otázku „Čemu se rovná hodnota uvažované proměnné veličiny v daném bodě?“

(2) Výpočtem hodnoty derivace funkce v bodě zodpovíme otázku „Jaká je okamžitá rychlost změny uvažované proměnné veličiny v daném bodě?“

Okamžitou rychlost změny hodnoty funkce v bodě intuitivně chápeme jako míru změny funkce v poměru k nekonečně malému přírůstku nezávisle proměnné v okolí tohoto bodu.

3.2. Fyzikální interpretace derivace

3.2.1. Pohyb hmotného bodu: rovnoměrný pohyb

Pojem derivace přirozeně vzniká při řešení fyzikální úlohy o pohybu hmotného bodu. Uvažujme přímočarý pohyb hmotného bodu; proměnné veličiny jsou čas, dráha, rychlost:

- t je čas ($t \geq t_0$)
- $s(t)$ je dráha, kterou bod urazí za t jednotek času
- $v(t)$?

Pro *rovnoměrný pohyb* je rychlost $v(t) = v$ je konstantní:

$$s(t) = s(t_0) + v(t - t_0),$$

to jest v každém časovém okamžiku t platí

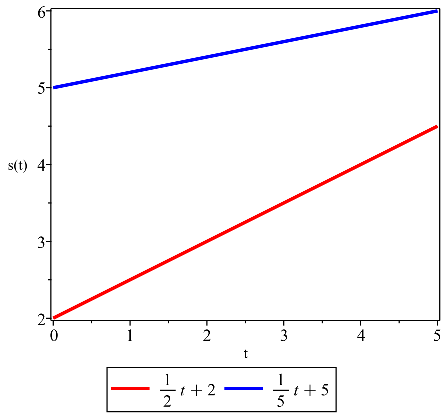
$$v = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

3.2.2. Pohyb hmotného bodu: zrychlený pohyb

Pro *zrychlený pohyb* rychlost $v(t)$ není konstantní. Jak $v(t)$ určit?

Časový interval (t_0, t); *průměrná* rychlost bude

$$v = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$



Obrázek 3.1. Příklady veličin, jež se mění s konstantní rychlostí ($v = \frac{1}{2}$ a $v = \frac{1}{5}$)

Okamžitá rychlost $v(t)$ v čase t? Je-li t blízko k t_0, pak $v(t)$ je přibližné rovná průměrné rychlosti na intervalu mezi t_0 a t:

$$v(t) \approx \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Pro stanovení okamžité rychlosti $v(t)$ se nabízí limitní přechod pro $t \to t_0$.

Zvolme libovolné t_0. Okamžitá rychlost v t_0 pak bude:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

3.2.3. Definice derivace

Buďte f funkce a x_0 bod z D_f.

Definice 3.1. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \tag{3.1}$$

nazýváme tuto limitu derivací funkce f v bodě x_0 a značíme $f'(x_0)$.

Je-li limita v (3.1) nevlastní, říkáme, že funkce f v bodě x_0 má derivaci nevlastní. V případě, když limita neexistuje, v daném bodě funkce derivaci nemá.

Postup nalezení derivace nazýváme derivováním.

Poznámka 3.1. Substitucí $x - x_0 = h$ lze (3.1) přepsat na tvar

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

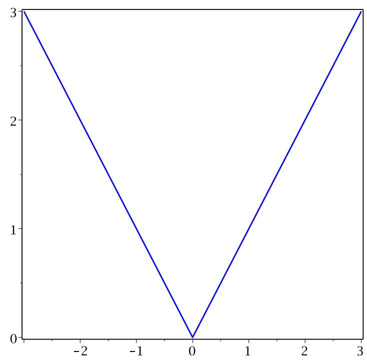
Poznámka 3.2. f' je funkce $x \mapsto f'(x)$, přičemž $D_{f'} \subset D_f$ (je možné, že $D_{f'} \neq D_f$!)

3.2.4. Alternativní způsoby zápisu derivace

jsou $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$. Je-li $y = y(x)$ funkce proměnné x, pak lze psát

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

a formálně chápat tento výraz jako podíl *přírůstku hodnoty závisle proměnné* v poměru k *nekonečně malému přírůstku nezávislé proměnné.*



OBRÁZEK 3.2. Funkce $y = |x|$ v bodě $x = 0$ derivaci nemá (není tečna).

Zápis $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ preferujeme, chceme-li zdůraznit, že se derivuje podle x, nikoliv podle jiné proměnné, jíž výraz y, možná, obsahuje. Např. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha x^3 + x^2\sqrt{\alpha}) = 3\alpha x^2 + 2\sqrt{\alpha}x$.

3.2.5. Existence derivace

TVRZENÍ 3.1. (1) Existuje-li pro funkci v nějakém bodě derivace, pak je její hodnota určena jednoznačně.
(2) Existence derivace je lokální vlastnost (hodnota derivace v bodě popisuje rychlost růstu nebo poklesu funkce v okolí daného bodu a není ovlivněna chováním funkce v jiných částech definičního oboru).

VĚTA 3.1. Má-li funkce v bodě vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.

Opačné tvrzení neplatí (tj. jsou spojité funkce, jež v nějakých bodech derivaci nemají).

POZNÁMKA 3.3. Derivace funkce v některém bodě neexistuje, jestliže v tomto bodě nelze sestrojit tečnu. Existence derivace tedy znamená určitou hladkost křivky.

PŘÍKLAD 3.1. Pro $f(x) = |x|$ hodnota $f'(0)$ neexistuje.

Řešení. Limita $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ neexistuje, neboť

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = 1, \qquad \lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Proto funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0 derivaci nemá. V bodě $(0,0)$ křivka nemá tečnu. Pozorujeme nehladký charakter změny hodnot funkce v okolí bodu 0 (viz obrázek 3.2).

3.2.6. Jednostranné derivace

Jednostranné derivace $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ se definují podobným způsobem, když v (3.1) vezmeme jednostranné limity:

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0), \quad \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0).$$

TVRZENÍ 3.2. Derivace $f'(x_0)$ existuje právě tehdy, když existují $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ a navíc je

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Příklad 3.2. Pro $f(x) = |x|$ je $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$ (viz příklad 3.1).

Jednostranné derivace uvažujeme zejména v blízkosti koncových bodů intervalu, na němž je funkce definována.

3.3. Derivace některých elementárních funkcí

Uveďme příklady důkazu vzorců pro derivace některých elementárních funkcí. Tyto a další běžně využívané vzorce nalezneme v tabulkách.

3.3.1. Derivace lineární funkce

Buď $f(x) = ax + b$. Pak platí

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a.$$

Takto odvodíme vzorce:

$$(ax + b)' = a$$
$$(b)' = 0$$

3.3.2. Derivace exponenciální funkce

Je-li $f(x) = e^{ax}$, bude

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{a(x+h)} - e^{ax}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{ax+ah} - e^{ax}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} e^{ax} \frac{e^{ah} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} ae^{ax} \frac{e^{ah} - 1}{ah} = \lim_{h\to 0} ae^{ax} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{ah} - 1}{ah} \\ &= a \lim_{h\to 0} e^{ax} \cdot 1 = ae^{ax}. \end{aligned}$$

$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$
$$(e^x)' = e^x$$

3.3.3. Derivace druhé mocniny

Pro $f(x) = x^2$ bude

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

Derivace druhé mocniny:

$$(x^2)' = 2x.$$

3.3.4. Derivace druhé odmocniny

Je-li $f(x) = \sqrt{x}$ pro $x \geq 0$, bude

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

pro $x > 0$. V bodě 0 se jedná o limitu zprava

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

a proto bude $f'_+(0) = +\infty$.

Derivace druhé odmocniny:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3.3.5. Derivace $\frac{1}{x}$

Pro $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ bude

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x}{(x+h)x} - \frac{x+h}{x(x+h)}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{-h}{x(x+h)} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (x^{-1})' = -x^{-2}$$

3.4. Geometrický význam derivace

3.4.1. Směrnice přímky

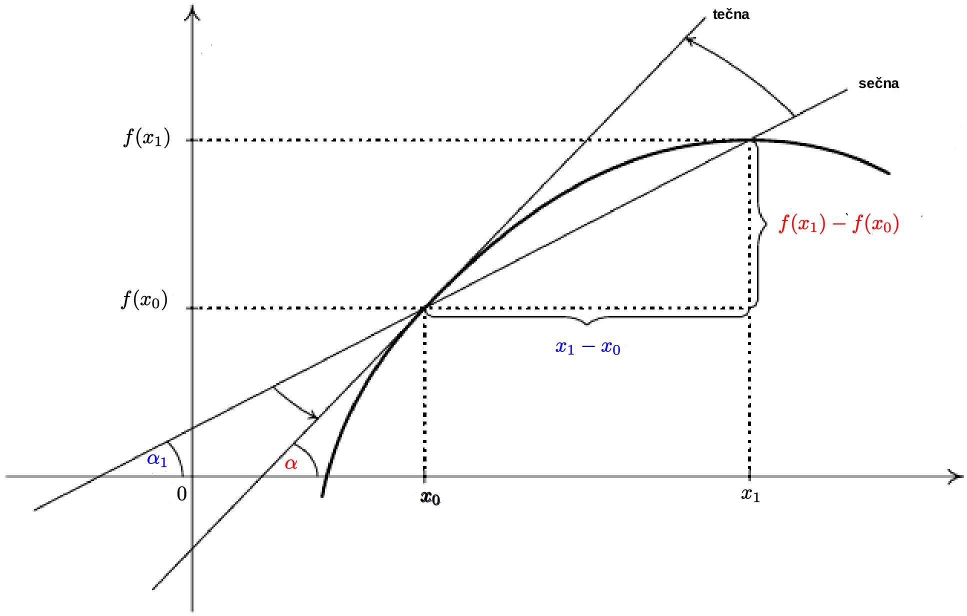
Definice 3.2. *Směrnicí* přímky s rovnicí

$$y = kx + b \tag{3.2}$$

nazýváme tangens úhlu φ, který přímka svírá s kladnou částí osy x.

Znázorníme-li přímku (3.2) na obrázku pro různé hodnoty k, snadno obdržíme, že je směrnice $\operatorname{tg}\alpha$ rovna k, přičemž pro $k > 0$ (resp. $k < 0$) přímka udává rostoucí (resp. klesající) lineární funkci. Je-li $k = 0$, jedná se o přímku vodorovnou.

Velikost čísla k vyjadřuje rychlost růstu nebo klesání lineární funkce. Např., je-li $k > 0$ malé, bude přímka otočená ve směru růstu při zvetšení x a úhel α, jenž svírá s osou x, bude malý.



OBRÁZEK 3.3. Sečna a tečna

3.4.2. Sečna a tečna křivky

Sečna a tečna křivky jsou znázorněny na obrázku 3.3.

DEFINICE 3.3. *Sečna* je spojnice bodů $(x_0, f(x_0))$ a $(x, f(x))$. *Tečna* ke grafu v bodě $(x_0, f(x_0))$ vzniká jako limitní poloha této sečny pro $x \to x_0$.

Sestrojme sečnu v bodech $(x_0, f(x_0))$ a $(x_1, f(x_1))$. Rovnicí této sečny je

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

to jest

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Směrnicí této sečny dle odst. 3.4.1 je

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

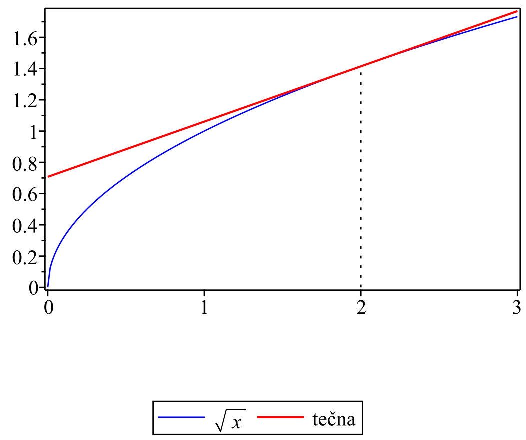
Dle definice derivace je

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0).$$

Limitní hodnotou směrnice sečny tedy je $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ (viz obrázek 3.3).

TVRZENÍ 3.3. Hodnota $f'(x_0)$ udává směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$. Je-li $f'(x_0)$ nevlastní (tj. hodnota $f'(x_0)$ je $+\infty$ nebo $-\infty$), bude tečna v tomto bodě svislá.

Příklad svislé tečny nalezneme v odst. 3.3.4.



OBRÁZEK 3.4. Tečna pro $f(x) = \sqrt{x}$ v bodě $(2, \sqrt{2})$.

3.4.3. Rovnice tečny

Nechť má funkce f derivaci v bodě x_0. Rovnicí tečny ke grafu této funkce v bodě $(x_0, f(x_0))$ je

$$y = ax + b,$$

kde $a = f'(x_0)$. Hodnotu b pak snadno určíme z podmínky, že bod $(x_0, f(x_0))$ je společným pro křivku i tečnu:

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$$

a tudíž $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

TVRZENÍ 3.4. Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$ je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

PŘÍKLAD 3.3. Najděme rovnici tečny pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$ v bodě $(2, \sqrt{2})$.

Řešení. Dle odst. 3.3.4 je $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(2) = \sqrt{2} \approx 1.41$, $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.35$. Proto rovnice tečny v bodě $(2, \sqrt{2})$ je (viz obrázek 3.4)

$$y = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - 2).$$

3.4.4. Rovnice normály

Z geometrie víme, že směrnice k_1 a k_2 navzájem kolmých přímek splňují vztah

$$k_1 k_2 = -1.$$

Proto dle tvrzení 3.4 platí

TVRZENÍ 3.5. Je-li $f'(x_0) \neq 0$, pak rovnice normály ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$ je

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

V případě, když $f'(x_0) = 0$, je v bodě $(x_0, f(x_0))$ normála svislá a má rovnici $x = x_0$.

3.5. Výpočet derivace

Derivace základních elementárních funkcí nalezneme v tabulkách. Derivaci funkce, jež je kombinací základních elementárních funkcí pomocí součtu, součinu, podílu a složení, odvodíme s užitím odpovídajících vlastností derivace.

3.5.1. Derivace součtu

Tvrzení 3.6. Mají-li funkce f a g v bodě x derivaci, platí

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x).$$

Příklad:

$$(3x^3-2x^2+70)' = (3x^3)' - (2x^2)' + (70)' = 9x^2 - 4x.$$

3.5.2. Derivace součinu

Tvrzení 3.7. Mají-li funkce f a g v bodě x derivaci, platí

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Důkaz. Vzorec pro derivaci součinu lze odvodit přibližné takto: přidáním a odečtením výrazu $f(x+h)g(x)$ obdržíme

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+[f(x+h)-f(x)]g(x)}{h}$$
$$= f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

následně přejdeme k limitě pro $h \to 0$. □

Příklad:

$$(x\ln x)' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Důsledkem je pravidlo vytknutí konstantního činitele: pro libovolnou konstantu k platí

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

3.5.3. Derivace složené funkce

Nejdůležitějším je pravidlo derivování složené funkce. Buďte $f : D_f \to H_f$, $g : D_g \to \mathbb{R}$, kde $D_g \subset H_f$ (obor hodnot f). Pak je definovaná složená funkce $x \mapsto f(g(x))$.

Věta 3.2 („Řetězové pravidlo“). Nechť funkce g má vlastní derivaci v bodě x_0 a nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $g(x_0)$. Pak má složená funkce $x \mapsto f(g(x))$ v bodě x_0 vlastní derivaci a platí:

$$(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0))\, g'(x_0).$$

Jinými slovy, existují-li $g'(x)$ a $f'(g(x))$, platí

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x).$$

Důkaz. Důkaz je založen na úpravách

$$\begin{aligned}(f(g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

a rovností $f'(g(x)) = \lim_{b\to g(x)}\frac{f(b)-f(g(x))}{b-g(x)}$. □

3.5.4. Derivace výrazu $\frac{1}{g(x)}$

TVRZENÍ 3.8. Existuje-li $g'(x)$ a je-li $g(x)\neq 0$, platí

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Důkaz. Platí $q(x) = \frac{1}{g(x)} = f(g(x))$, kde $f(t) = \frac{1}{t}$. Již víme, že $(\frac{1}{t})' = -\frac{1}{t^2}$, proto můžeme q zderivovat jako složenou funkci:

$$q'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x) = -\frac{1}{(g(x))^2}\,g'(x),$$

což je kýžený výsledek. □

3.5.5. Derivace podílu

TVRZENÍ 3.9. Existují-li $f'(x)$, $g'(x)$ a je-li $g(x)\neq 0$, platí

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Důkaz. Stačí napsat $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$ a využít tvrzení 3.7, 3.8. □

3.5.6. Derivace inverzní funkce

VĚTA 3.3. Nechť funkce f je spojitá a ryze monotonní na intervalu I. Nechť x_0 je vnitřní bod intervalu I a nechť má f v bodě x_0 konečnou derivaci $f'(x_0)\neq 0$. Pak má inverzní funkce $g = f^{-1}$ v bodě $f(x_0)$ derivaci a platí

$$g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Jinými slovy,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

v bodech y, kde pro $x = f^{-1}(y)$ existuje konečná derivace $f'(x)\neq 0$.

Důkaz. Pro pohodlí zápisu buď $g = f^{-1}$ funkce inverzní k f. Pro každé x z I platí

$$g(f(x)) = x.$$

Zderivováním tohoto vztahu obdržíme

$$1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}(f(y)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g(f(y)) = g'(f(y))\cdot f'(y).$$

K požadovanému vzorci přijdeme, vezmeme-li $y = f^{-1}(x_0)$; potom $x_0 = f(y)$. □

Vztahu z věty 3.3 se užívá, mimo jiné, při důkazu vzorců pro derivace logaritmických a cyklometrických funkcí. Ukažme příklady odvození některých tabulkových vzorců.

PŘÍKLAD 3.4. Pro derivaci funkce $x \mapsto \arcsin x$ platí

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| \leq 1.$$

Důkaz. Pro $|x| \leq 1$ je $\arcsin x = f^{-1}(x)$, kde $f(x) = \sin x$. Dle věty 3.3

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{3.3}$$

Jelikož $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, platí

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin y))} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin y))^2}},$$

a stačí si všimnout, že v posledním vzorci $\sin(\arcsin y) = y$. □

PŘÍKLAD 3.5. Pro derivaci funkci $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ platí

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Důkaz. Použijme (3.3), kde $\operatorname{arctg} x = f^{-1}(x)$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Jelikož $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, platí

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} y))}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1+y^2},$$

což je kýžený výsledek. □

3.5.7. Logaritmické derivace

Derivace některých funkcí lze snadno vypočítat, přejdeme-li k vypočtu derivace logaritmu daného výrazu.

TVRZENÍ 3.10. Platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(x)^{v(x)} = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right). \tag{3.4}$$

Důkaz. Pro $f(x) = u(x)^{v(x)}$ zapišme a zderivujme $\ln f(x) = \ln u(x)^{v(x)} = v(x) \ln u(x)$:

$$(\ln f(x))' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln\left(u(x)^{v(x)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (v(x) \ln u(x)) = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}. \tag{3.5}$$

Dle vzorce pro derivaci složené funkce však platí

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{3.6}$$

a tudíž z (3.5) obdržíme $f'(x) = f(x)(\ln f(x))' = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$.

Mohli bychom postupovat i takto:

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(\mathrm{e}^{v(x) \ln u(x)}\right)' = \mathrm{e}^{v(x) \ln u(x)} (v(x) \ln u(x))' \tag{3.7}$$

atd. □

Není nutné si vzorec (3.4) pamatovat, stačí vědět o upravě (3.7).

PŘÍKLAD 3.6. Zderivujme $f(x) = \sqrt[x]{x}$, $x > 0$.

Řešení. Dle (3.6) je $f'(x) = f(x)(\ln f(x))'$. Jelikož

$$(\ln f(x))' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x^{\frac{1}{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

obdržíme

$$\left(\sqrt[x]{x} \right)' = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - \ln x).$$

PŘÍKLAD 3.7. Zderivujme $f(x) = \sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}}$.

Řešení. Jelikož

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln f(x) &= \frac{1}{8} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{8} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-x^2}, \end{aligned}$$

obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{4} \sqrt[8]{\frac{1+x}{1-x}} \frac{1}{1-x^2}.$$