PŘEDNÁŠKA 4

Diferenciál, věty o střední hodnotě, l'Hôpitalovo pravidlo

4.1. Derivace

Buďte $f : I \to \mathbb{R}$ funkce na intervalu I a x_0 je vnitřní bod I.

DEFINICE 4.1. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \tag{4.1}$$

nazýváme tuto limitu derivací funkce f v bodě x_0 a značíme $f'(x_0)$.

Je-li limita v (4.1) nevlastní, říkáme, že funkce f v bodě x_0 má derivaci nevlastní. V případě, když limita neexistuje, v daném bodě funkce derivaci nemá.

Substitucí $x - x_0 = h$ lze (4.1) přepsat na tvar

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0). \tag{4.2}$$

Alternativní způsoby zápisu derivace jsou $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$. Je-li $y = y(x)$ funkce proměnné x, pak lze psát

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{4.3}$$

a formálně chápat tento výraz jako podíl *přírůstku hodnoty závisle proměnné* v poměru k *nekonečně malému přírůstku nezávislé proměnné.*

4.2. Diferencovatelnost a diferenciál

4.2.1. Diferencovatelnost funkce

DEFINICE 4.2. Funkce f je *diferencovatelná* v bodě x_0, jestliže existuje konstanta A taková, že platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0. \tag{4.4}$$

VĚTA 4.1. Funkce jedné proměnné $f : I \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě x_0 právě tehdy, když má v tomto bodě konečnou derivaci.

Důkaz. Platí-li (4.4), bude

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = \alpha(h),$$

kde $\alpha(h) \to 0$ pro $h \to 0$. Proto $f(x_0+h) - f(x_0) - Ah = h\alpha(h)$, $f(x_0+h) - f(x_0) = (A + \alpha(h))\, h$ a tudíž

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} (A + \alpha(h)) = A.$$

Toto znamená, že $f'(x_0)$ existuje a $f'(x_0) = A$.

Naopak, existuje-li $f'(x_0)$, pak dle (4.2) je

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \beta(h),$$

kde $\beta(h) \to 0$ pro $h \to 0$, a tudíž

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = \beta(h).$$

Takto jsme přišli k (4.4) s $A = f'(x_0)$. □

Diferencovatelnost funkce znamená, že v okolí daného bodu ji lze libovolně přesně aproximovat lineární funkcí, odpovídající tečné přímce (dle věty 4.1 A v (4.4) je rovno $f'(x_0)$, což je směrnice tečny v tomto bodě).

4.2.2. Diferenciál

Definice 4.3. Výraz $f'(x_0)\, h$ (přesněji řečeno, lineární funkce $h \mapsto f'(x_0)\, h$) se nazývá *diferenciál* funkce f v bodě x_0.

Diferenciál $f'(x_0)\, h$ vyjadřuje hlavní část přírůstku funkce $f(x_0+h) - f(x_0)$, odpovídajícího změně argumentu h:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)\, h + \alpha(h),$$

kde $\alpha(h) \to 0$ pro $h \to 0$. Zanedbáme-li $\alpha(h)$ pro malá h, vychází

$$f(x_0+h) - f(x_0) \approx f'(x_0)\, h. \tag{4.5}$$

Vzorce (4.5) lze užit pro přibližný výpočet přírůstku funkce.

Poznámka 4.1. Výše uvedené umožňuje chápat výraz v (4.3) jako zlomek a psát

$$\mathrm{d}y = y'\, \mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

4.3. Některé důležité věty

Buď $f : I \to \mathbb{R}$ funkce na intervalu I.

Věta 4.2 (Férmat). Buď x_0 vnitřní bod I takový, že f v x_0 nabývá maximální nebo minimální hodnoty. Pak, existuje-li $f'(x_0)$, musí být $f'(x_0) = 0$.

Toto tvrzení lze snadno dokázat, odvodíme-li, že platí

Lemma 4.1. Nechť existuje konečná derivace $f'(x_0)$.

(1) Je-li $f'(x_0) > 0$, pak pro x blízka x_0, $x > x_0$, platí $f(x) > f(x_0)$.
(2) Je-li $f'(x_0) < 0$, pak pro x blízka x_0, $x < x_0$, platí $f(x) < f(x_0)$.

Toto lemma vyjadřuje skutečnost, že při $f'(x_0) > 0$ (resp., $f'(x_0) < 0$) funkce f v bodě x_0 roste (resp., klesá). Věty 4.2 podstatně užijeme, budeme-li vyšetřovati maximální nebo minimální hodnoty funkce.

Věta 4.3 (Rolle). Buď f funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, přičemž ve všech bodech z (a, b) má f konečnou derivaci. Je-li $f(a) = f(b)$, pak existuje c, $a < c < b$, takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že f není konstantní. Dle Weierstrassovy věty spojitá f nabývá svých maxima a minima v nějakých bodech z $[a, b]$, přičemž vzhledem k tomu, že $f(a) = f(b)$, alespoň jeden z těch bodů c leží mezi a a b. Dle věty 4.2 bude $f'(c) = 0$. □

VĚTA 4.4 (Lagrange; věta o střední hodnotě). Buď f funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, přičemž ve všech bodech z (a, b) má f konečnou derivaci. Pak existuje c, $a < c < b$, takové, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{4.7}$$

Důkaz. Položme $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k$ a definujme pomocnou funkci

$$F(x) = f(x) - f(a) - k(x - a).$$

Je zřejmé, že $y = f(a) - k(x - a)$ je rovnicí spojnice bodů $(a; f(a))$ a $(b; f(b))$. Pak bude $F(a) = 0$, $F(b) = f(b) - f(a) - k(b - a) = 0$ a

$$F'(x) = f'(x) - k. \tag{4.8}$$

Funkce F tak splňuje předpoklady Rolleovy věty 4.3 a proto mezi a a b existuje bod c, kde je $F'(c) = 0$. Vzhledem k (4.8) toto znamená, že jsme dokázali (4.7). □

VĚTA 4.5 (Cauchy; věta o střední hodnotě). Buďte f, g funkce spojité na uzavřeném intervalu $[a, b]$, přičemž ve všech bodech z (a, b) mají f, g konečné derivace a $g' \neq 0$ na (a, b). Pak existuje c, $a < c < b$, takové, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.9}$$

Důkaz. Za daných předpokladů platí $g(b) - g(a) \neq 0$, neboť v opačném případě dle Rolleovy vety by bylo $g'(x_0) = 0$ v nějakém bodě $x_0 \in (a, b)$.

Definujme

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - (a)}(g(x) - g(a));$$

pak bude $F(a) = F(b) = 0$,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - (a)} g'(x). \tag{4.10}$$

Funkce F splňuje předpoklady Rolleovy věty 4.3 a proto existuje $c \in (a, b)$, kde je $F'(c) = 0$. Dosadíme-li v (4.10) $x = c$, obdržíme (4.9). □

4.4. L'Hôpitalovo pravidlo

Tvrzení, jemuž se říká *l'Hôpitalovo pravidlo*, poskytuje účinný nástroj, mnohdy umožnující snadno vyšetřit neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$, to jest limity $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, kde $f(x)$ a $g(x)$ zároveň konvergují k 0 nebo do nekonečna.

VĚTA 4.6 (l'Hôpitalovo pravidlo pro $\frac{0}{0}$). Nechť v

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, v okolí[1] bodu a funkce f a g mají konečné derivace, $g' \neq 0$ a existuje pomocná limita $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak existuje i původní limita a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Obdobně pro $\frac{\infty}{\infty}$.

Schéma důkazu. Pro jednoduchost uvažujme případ, když hodnoty f a g v a jsou definovány:

$$f(a) = g(a) = 0. \tag{4.11}$$

Zvolme libovolné x v blízkosti bodu a. Dle Cauchyovy věty o střední hodnotě (věta 4.5) mezi a a x lze najít bod c, kde platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Vzhledem k (4.11) toto znamená, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

a stačí poznamenat, že při $x \to a$ bude i $c \to a$, poněvadž c leží mezi a a x.

Není-li nějaká z funkcí f a g v bodě a definována (ať je to např. f), dodefinujeme ji v bodě hodnotou limity $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Obdržíme tak spojitou funkci, k níž lze aplikovat předchozí postup. □

Dosti často bývá vhodné použit L'Hôpitalovo pravidlo opakovaně.

Příklad 4.1. Při libovolném přirozeném m opakovaným využitím l'Hôpitalova pravidla pro limitu $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{e^x}$ typu $\frac{\infty}{\infty}$ obdržíme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{mx^{m-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{m(m-1)x^{m-2}}{e^x} \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{m!}{e^x} = 0.$$

Poznámka 4.2. Využití l'Hôpitalova pravidla je nevhodné, když pro danou limitu lze doporučit nějaký jednodušší přistup. Je např. zřejmé, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{99}+1}{x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^{99}}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^{99}}} = 1.$$

Pro dosažení stejného výsledku výlučně pomocí l'Hôpitalova pravidla měli bychom ho zcela zbytečně použit 99krát: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{99}+1}{x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{99x^{98}}{99x^{98}+98x^{97}+\cdots+1}$ atd.

Občas se stává, že l'Hôpitalovo pravidlo není účinné vzhledem k tomu, že při jeho využití nedochází ke zjednodušení původní limity.

Příklad 4.2. Pro limitu $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$ využití l'Hôpitalova pravidla dává

$\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

atd. ad infinitum.

[1] Má se na mysli prstencové okolí bodu a, tj. okolí s vyloučeným bodem a (množina těch $x \neq a$, pro něž $|x| < r$ nějakým $r > 0$).

4.5. Příklady využití l'Hôpitalova pravidla

4.5.1. Významné limity

Pomocí l'Hôpitalova pravidla lze snadno odvodit tyto „tabulkové“ limity typu $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{1}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{1}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=1.$$

4.5.2. Další příklady

$\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

0^{∞} $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0-} x2^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0-}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0-}\frac{2^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln 2}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

∞^0

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^{\ln x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}=\mathrm{e}^0=1$$

$0\cdot\infty$ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$$

0^0

$$\lim_{x\to 0+} x^x=\lim_{x\to 0+}\left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^x=\lim_{x\to 0+}\mathrm{e}^{x\ln x}=\mathrm{e}^0=1$$

4.6. Derivace vyšších řádů

Buďte $f: I\to\mathbb{R}$ funkce na intervalu I a x_0 je vnitřní bod I a nechť existuje $f'(x_0)$. Pak je f' funkcí, definovanou v okolí bodu x_0. Existuje-li derivace funkce f', nazýváme ji druhou derivace funkce f a značíme f'' anebo $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$. Obdobně se definují vyšší derivace f''', $f^{(4)}$ atd.