PŘEDNÁŠKA 5

Aplikace derivace: průběh funkce jedné proměnné

5.1. Vyšetření průběhu funkce – typické schema

Vyšetřit průběh funkce znamená analyticky zjistit co nejvíce jejich vlastností a tak si zodpovědět otázku „Jak se tato funkce chová?“. Při vyšetřování průběhu funkce obvykle provádíme řadu z následujících úkonů:

(1) Určíme *definiční obor* funkce a obor jejich hodnot.
(2) Určíme, jestli je funkce sudá, lichá nebo periodická;
(3) Zjistíme, jestli je omezená, vyšetříme jeji spojitost.
(4) Vypočítáme *průsečíky* s osou x a s osou y.
(5) Zjistíme intervaly, kde funkční hodnoty jsou kladné a kde záporné.
(6) Nalezneme *extrémy* funkce a zjistíme intervaly *monotonnosti* funkce.
(7) Nalezneme *inflexní body* a intervaly *konvexnosti* a *konkávnosti.*
(8) Určíme, zda má funkce *asymptoty* a pokud ano, vypíšeme jejich rovnice a je graficky znázorníme.
(9) Načrtneme graf funkce.

U některých kroků podstatným způsobem využíváme pojmů limity a derivace.

5.2. Monotonnost a lokální extrémy

Pomocí pojmu derivace lze efektivně vyšetřovat charakter monotonnosti funkce jedné proměnné a její extremální hodnoty.

5.2.1. Monotonnost funkce

Buď I otevřený interval. Monotonnost funkce lze ověřit podle znaménka směrnice tečny.

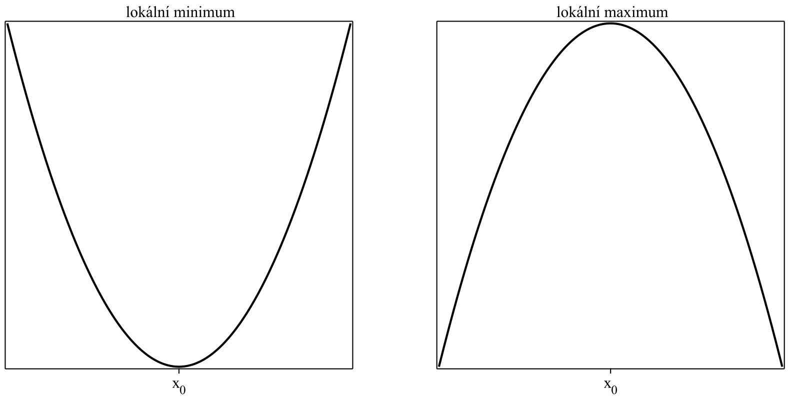
VĚTA 5.1. Nechť má funkce f na I derivaci. Pak platí:

- je-li $f'(x) > 0$ pro $x \in I$, pak je f je rostoucí na I;
- je-li $f'(x) < 0$ pro $x \in I$, pak je f je klesající na I.

Důkaz. Důkaz je založen na vzorci

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{5.1}$$

Je-li $f'(x) > 0$ v bodě $x \in I$, pak vzhledem k (5.1) existuje dostatečně malé $\delta > 0$ takové, že bude $\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) > 0$ pro $0 < h < \delta$, což znamená, že je f rostoucí na $(x, x+\delta)$ atd. $\square$



(A) (B)

OBRÁZEK 5.1

5.2.2. Lokální extrém funkce

DEFINICE 5.1. Funkce f má v bodě x_0 *lokální minimum*, jestliže všude v některém okolí I bodu x_0 (s výjimkou bodu x_0) jsou hodnoty funkce větší než $f(x_0)$, tj.

$$f(x) > f(x_0) \text{ pro } x \in I \setminus \{x_0\}.$$

DEFINICE 5.2. Funkce f má v bodě x_0 *lokální maximum*, jestliže všude v některém okolí I bodu x_0 (s výjimkou bodu x_0) jsou hodnoty funkce menší než $f(x_0)$, tj.

$$f(x) < f(x_0) \text{ pro } x \in I \setminus \{x_0\}.$$

DEFINICE 5.3. Funkce má v bodě lokální *extrém*, jestliže je v tomto bodě její lokální minimum nebo maximum.

Slovo „lokální" v těchto definicích vyjadřuje skutečnost, že se jedná o chování funkce v určitém malém okolí (má-li funkce v bodě x_0 lokální maximum, neznamená to, že v blízkosti tohoto bodu není jiný bod maxima, avšak v dostatečné malém okolí bodu x_0 hodnoty funkce budou rozhodně menší, než $f(x_0)$).

5.2.3. Stacionární body

Buď $f : I \to \mathbb{R}$ funkce na intervalu I.

DEFINICE 5.4. Bod x_0 je *stacionárním bodem* funkce f, jestliže $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

VĚTA 5.2 (Férmat; nutná podmínka pro lokální extrém). *Buď x_0 vnitřní bod I takový, že f v x_0 nabývá lokálně maximální nebo minimální hodnoty. Pak, existuje-li $f'(x_0)$, musí být $f'(x_0) = 0$.*

Např. $f(x) = x^2 + 1$ má minimum v $x_0 = 0$. Je to stacionární bod pro f, jelikož $f'(x_0) = 2x_0 = 0$. Funkce $g(x) = |x|$ má minimum v $x_0 = 0$, tečna v bodě $x_0 = 0$ neexistuje.

POZNÁMKA 5.1. Existuje-li v stacionárním bodě tečna, je vždy vodorovná.

POZNÁMKA 5.2. Splnění nutné podmínky $f'(x_0) = 0$ ještě nezaručuje, že je v daném bodě x_0 lokální extrém. Např. pro $f(x) = x^3$ je $f'(0) = 0$, avšak je to funkce neklesající (mimo bod 0 ryze rostoucí) a tudíž lokální extrémy nemá. Podmínka je tedy skutečně pouze nutnou, nikoliv postačující.

5.2.4. Určení lokálního extrému pomocí derivací

5.2.4.1. Určení lokálního extrému podle 1. derivace

Ověřit, zda v daném stacionárním bodě skutečně je lokální extrém, lze pomocí určení znaménka první derivace vyšetřované funkce.

VĚTA 5.3. Nechť x_0 je stacionárním bodem ($f'(x_0) = 0$). Funkce f má v x_0:

(1) lokální maximum, jestliže v tomto bodě mění f' znaménko z „+“ na „−“ (f roste a poté klesá).
(2) lokální minimum, jestliže v tomto bodě mění f' znaménko z „−“ na „+“ (f klesá a poté roste).

Jestliže ke změně znaménka derivace v bodě x_0 nedochází, nemá funkce v tomto bodě extrém.

5.2.4.2. Určení lokálního extrému podle vyšších derivací

VĚTA 5.4. Nechť x_0 je stacionárním bodem a existuje $f'(x_0) = 0$. Nechť má f v bodě x_0 druhou derivaci. Pak platí:

(1) jestliže $f''(x_0) < 0$, pak má f v bodě x_0 lokální maximum
(2) jestliže $f''(x_0) > 0$, pak má f v bodě x_0 lokální minimum.

POZNÁMKA 5.3. Lze doporučit jednoduchou pomůcku k zapamatování podmínky věty 5.4: $f(x) = x^2$ má v 0 minimum ($2 > 0$), $f(x) = -x^2$ má v 0 maximum ($-2 < 0$).

Jestliže $f''(x_0) = 0$, věta 5.4 neumožňuje rozhodnout o tom, zda v stacionárním bodě x_0 je nebo není lokální extrém funkce. V takových případech lze využit vyšších derivací.

VĚTA 5.5. Nechť má f v bodě x_0 konečnou derivaci $(n+1)$ho řadu ($n > 1$) a platí

$$f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) = 0, \qquad \dots \qquad f^{(n)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Potom:

(1) je-li n liché, pak má f v bodě x_0 lokální extrém (minimum pro $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, maximum pro $f^{(n+1)}(x_0) < 0$)
(2) je-li n je sudé, nemá f v bodě x_0 lokální extrém.

PŘÍKLAD 5.1. Pro funkci $f(x) = x^4$ platí $f'(x) = 4x^3$; $f'(x_0) = 0$ pro $x_0 = 0$; $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$. Platí tedy $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$. Cislo $n = 3$ je liché a tudíž f v bodě 0 má lokální minimum.

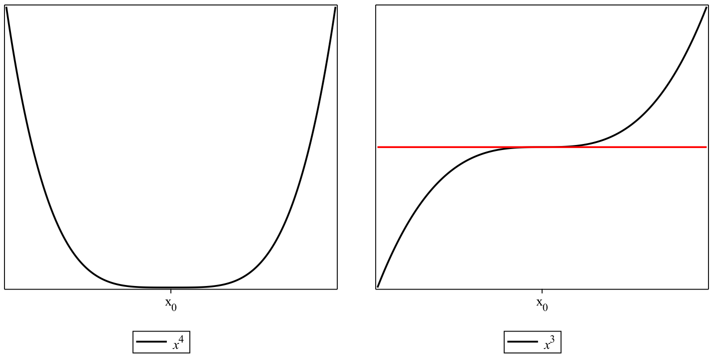
PŘÍKLAD 5.2. Pro $f(x) = x^3$ je $f'(x) = 3x^2$; $f'(x_0) = 0$ pro $x_0 = 0$; $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6 > 0$. Číslo $n = 2$ je sudé, a proto nemá f v bodě 0 extrém.

Obrázek 5.2 znázorňuje skutečnosti, uvedené v příkladech 5.1 a 5.2.

5.3. Konvexnost a konkávnost, inflexní body

Buď f reálná funkce na otevřeném intervalu I, která má v každém bodě derivaci.[1]

[1] Charakterizace konexnosti pomocí tečny vyžaduje existenci derivace funkce, tj. hladkost jejího grafu. Bez použití derivace se dá konvexnost funkce popsat tak, že graf funkce na každém intervalu (x_0, x_1) leží pod spojnicí krajních bodů tohoto intervalu. Obdobně pro konkávnost. Konkávanost a konvexnost nehladké funkce zde vyšetřovat nebudeme.

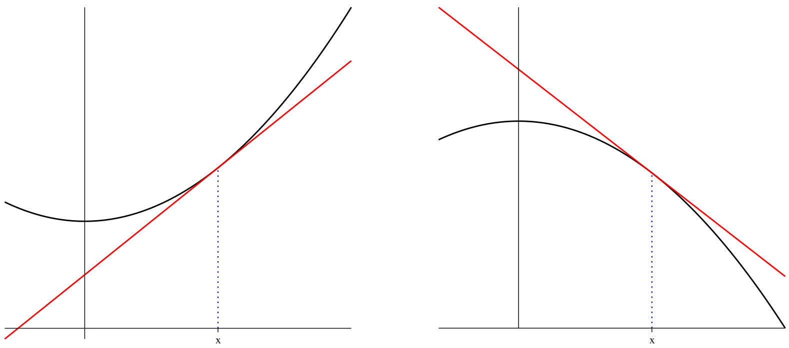


(A) (B)

Obrázek 5.2

Definice 5.5. Funkce f se nazývá *konvexní* na I, jestliže její graf leží *nad* tečnou sestrojenou v bodě $(x, f(x))$ pro každé $x \in I$. Funkce f se nazývá *konkávní* na I, jestliže její graf leží *pod* tečnou sestrojenou v bodě $(x, f(x))$ pro každé $x \in I$.

Tyto vlastnosti určují směr zakřivení grafu funkce. Jejich geometrické znázornění nalezneme na obrázku 5.3.



(A) konvexní (B) konkávní

Obrázek 5.3

Konvexnost a konkávnost lze rozlišit podle druhé derivace.

Věta 5.6. Nechť má funkce f na I druhou derivaci. Pak platí:

(1) je-li $f''(x) > 0$ pro $x \in I$, pak f je konvexní na I
(2) je-li $f''(x) < 0$ pro $x \in I$, pak f je konkávní na I.

Možná p o m ů c k a k z a p a m a t o v á n í podmínky věty 5.6 je podobná uvedené v poznámce 5.3: $f(x) = x^2$ je konvexní ($f'' = 2 > 0$ a $f(x) = -x^2$ je konkávní ($f'' = -2 < 0$).

Idea důkazu. Pro konvexní funkci směrnice tečny při zvetšení argumentu roste. Toto znamená, že f' je rostoucí funkce a tudíž $(f')' = f'' > 0$. □

Definice 5.6. Bod x_0 je *inflexní* pro funkci f, jestliže v tomto bodě se konvexní charakter chování mění na konkávní nebo naopak, konkávní na konvexní.

Příkladem inflexního bodu je bod $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = x^3$ (viz obrazek 5.2).

VĚTA 5.7 (nutná podmínka pro inflexní bod). Je-li x_0 inflexní bod funkce f a existuje-li $f''(x_0)$, pak platí
$$f''(x_0) = 0.$$

Při vyšetřovaní konvexnosti funkce je tedy vhodné začít určením bodů x_0, *podezřelých z inflexe*, tj. takových, kde $f''(x_0) = 0$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje. O tom, zda takový bod je nebo není inflexním, rozhodneme podle znaménka druhé derivace funkce vlevo a vpravo od x_0 (věta 5.6): bod x_0 bude inflexním, jestliže v něm dochází ke změně znaménka f''. Jednu z postačujících podmínek inflexe poskytuje

VĚTA 5.8. Buď x_0 bod podezřelý z inflexe: $f''(x_0) = 0$. Jestliže
$$f'''(x_0) \neq 0,$$
pak je x_0 inflexním bodem funkce f.

Následující věta je upřesněním věty 5.5.

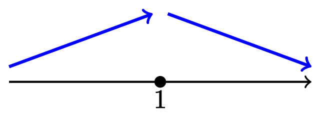
VĚTA 5.9. Nechť má f v bodě x_0 derivaci $(n+1)$ho řadu $(n > 1)$ a platí
$$f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) = 0, \qquad \dots \qquad f^{(n)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$
Potom:

(1) je-li n liché, pak má f v bodě x_0 lokální extrém (minimum pro $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, maximum pro $f^{(n+1)}(x_0) < 0$)
(2) je-li n sudé, pak je x_0 inflexním bodem funkce f.

5.4. Příklady

PŘÍKLAD 5.3. Vyšetřeme průběh funkce $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Řešení. Funkce je spojitá a má derivaci na $(-\infty, \infty)$. Je zřejmé, že $f(x) > 0$ pro $x > 0$, $f(x) < 0$ pro $x < 0$ a $f(0) = 0$. Pro vyšetření intervalů růstu a poklesu vypočtěme derivaci:
$$f'(x) = \left(x\,\mathrm{e}^{-x}\right)' = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}. \tag{5.2}$$
Vzhledem k (5.2) je $f'(x)$ kladná pro $x < 1$ a záporná pro $x > 1$. Funkce je tedy rostoucí na $(-\infty, 1)$ a klesající na $(1, \infty)$. Je praktické si takové vlastnosti znázornit graficky (obrázek 5.4).



OBRÁZEK 5.4

Jelikož v bodě 1 se růst funkce mění na pokles, podle věty 5.3[2] má funkce f v tomto bodě lokální maximum o hodnotě $f(1) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}3$.

Směr zakřivení grafu této funkce (intervaly konvexnosti a konkávnosti) určeme podle druhé derivace. Zderivováním vzorce (5.2) obdržíme
$$f''(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\,\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}. \tag{5.3}$$

[2] Jelikož ve vzorci (5.3) je vypočítaná druhá derivace f'', lze využít i věty 5.4: v bodě 1 má funkce f lokální maximum, neboť je $f''(1) = -\,\mathrm{e}^{-1} < 0$.

Vidíme, že $f''(x)$ právě tehdy, když $x = 2$, přičemž $f''(x) < 0$ pro $x < 2$ a $f''(x) > 0$ pro $x > 2$. Funkce je tedy konvexní na $(2, \infty)$ a konkávní na $(-\infty, 2)$. Bod 2 je inflexním bodem.

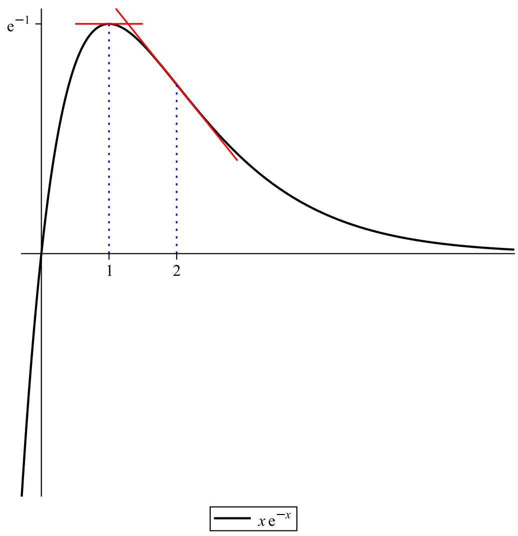
Nyní vyšetřeme, jak se funkce chová ve směru $-\infty$ a ∞. Pro $x \to +\infty$ s využitím l'Hôpitalova pravidla obdržíme

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0,$$

přičemž $f(x)$ je kladné pro kladná x. Pro $x \to -\infty$ bude

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = \lim_{t\to+\infty} (-t)\,\mathrm{e}^t = -\lim_{t\to+\infty} t\,\mathrm{e}^t = -\infty.$$

Zjištěné informace již umožňují načrtnout graf funkce. Kreslení grafu je vhodné začít hodnotami funkce v důležitých bodech: $f(0) = 0$ (změna znaménka funkce), $f(1) = 1/\mathrm{e}$ (bod lokálního maxima), $f(2) = 2/\mathrm{e}^2$ (inflexní bod); dále pokračujeme podle schématu na obrázku 5.4 s využitím informací o směru zakřivení grafu. Výsledek je na obrázku 5.5. Všimněme si různých směrů zakřivení grafu v okolí inflexního bodu (pro věrnější zakreslení je vhodné sestrojit tečnu). □



Obrázek 5.5

Uveďme příklad využití vlastností derivace pro vyřešení jedné praktické úlohy.

Příklad 5.4. Továrna vyrábí hliníkové kanystry o objemu V. Kanystry jsou ve tvaru válce. Je potřeba určit rozměry tak, aby náklady na použitý hliník byly nejnižší.

Řešení. Povrch válce S musí být minimální. Nechť má válec výšku h a poloměr podstavy r. Dle vzorců platí

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h, \quad V = \pi r^2 h.$$

Objem je vždy V, proto $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Dosadíme-li to do vzorce pro povrch válce, obdržíme funkci proměnné $r > 0$:

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Zderivováním obdržíme

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2}{r^2}\left(2\pi r^3 - V\right), \tag{5.4}$$

a rovnice pro určení stacionárních bodů bude mít tvar $2\pi r^3 = V$. Jediným stacionárním bodem je $r_* = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ a tudíž pouze v tomto bodě r_* se může měnit charakter monotonnosti funkce S. Funkce $r \mapsto r^3$ je rostoucí a proto, vzhledem k (5.4), je-li $r > r_*$ (resp. $r < r_*$), bude $S'(r) > 0$ (resp. $S'(r) < 0$). Toto znamená, že r_* je bodem lokálního minima pro S. Žádná jiná minima tato funkce nemá.[3]

Dosadíme-li teď $r = r_* = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ do vzorce pro h, obdržíme optimální hodnotu $h = h_*$:

$$h_* = \frac{V}{\pi r_*^2} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V^2}{(2\pi)^2}\right)^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{4V^3}{\pi V^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2r_*.$$

Pro splnění stanovené podmínky optimální spotřeby materiálu se tedy musí vyrábět kanystry ve tvaru válce, jehož výška je dvojnásobkem poloměru podstavy. □

[3]Zde lze využit limit v nekonečnu: je zřejmé, že

$$\lim_{r\to 0^+} S(r) = +\infty, \quad \lim_{r\to +\infty} S(r) = +\infty,$$

a tudíž v jediném stacionárním bodě $r_* > 0$ bude funkce S mít minimální hodnotu.