PŘEDNÁŠKA 6

Vysetřování průběhu funkce jedné proměnné

6.1. Asymptoty, jejich druhy a způsob určení

6.1.1. Asymptota

U některých funkcí lze pozorovat, že pro dostatečně velké hodnoty argumentu se její vývoj postupně stabilizuje a čim dal, tím vice se graf podobá přímce. V takových případech má funkce tzv. asymptotu. Znalost asymptoty významně pomáhá při zobrazení funkce na grafu.

Buď f funkce definovaná na neohraničeném intervalu.

DEFINICE 6.1. *Asymptota* je přímka, ke které se graf funkce v $+\infty$ nebo $-\infty$ neustále blíží. Je-li $y = kx + b$ rovnicí této přímky, znamená to, že platí

$$f(x) - kx - b \to 0 \tag{6.1}$$

pro $x \to +\infty$ (asymptota v $+\infty$) anebo pro $x \to -\infty$ (asymptota v $-\infty$).

6.1.2. Druhy asymptot

Asymptoty bývají se směrnicí anebo bez směrnice, to jest svislé.

6.1.2.1. Asymptoty se směrnicí

DEFINICE 6.2. *Asymptotou se směrnicí* rozumíme asymptotu s rovnicí $y = kx + b$.

V závislosti na směrnicí může být taková asymptota šikmou anebo vodorovnou. Asymptotu *vodorovnou* má funkce, pro níž existuje konečná limita v $+\infty$ anebo $-\infty$.

PŘÍKLAD 6.1. Funkce $f(x) = 2^{-x}$, $g(x) = 2^{-x} \sin x$ mají vodorovnou asymptotu $y = 0$ pro $x \to +\infty$ (obrázek 6.1).

Asymptotu *šikmou* má funkce, jež konečnou limitu v $\pm\infty$ nemá, avšak chová se v $+\infty$ nebo $-\infty$ skoro jako lineární funkce. Přesněji řečeno, existují konstanty k a b takové, že pro $x \to +\infty$ anebo $x \to -\infty$ platí (6.1). Vodorovná asymptota formálně je speciálním případem šikmé pro směrnici $k = 0$.

Šikmé asymptoty hledáme podle následujícího pravidla.

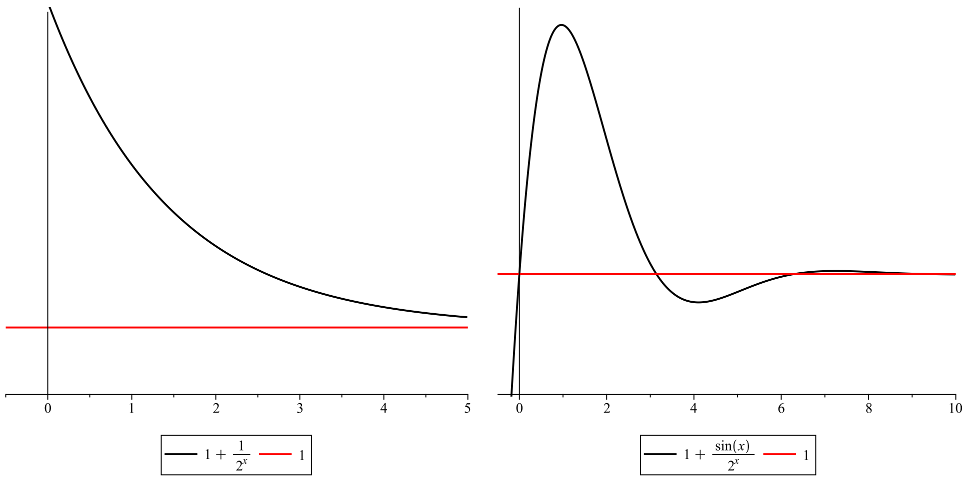
VĚTA 6.1. Existují-li limity

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b \tag{6.2}$$

anebo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = b \tag{6.3}$$

pak je přímka s rovnicí $y = kx + b$ asymptotou pro funkci f při $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$)



(A) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x}=0$ (monotonně) (B) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{2^x}=0$ (nemonotonně)

OBRÁZEK 6.1. Typ funkce, mající vodorovnou asymptotu: má konečnou limitu v $+\infty$ anebo $-\infty$.

Pro určení šikmých asymptot ověřujeme existenci limit (6.2) a (6.3).

Poznámka 6.1. Může se stát, že má funkce různé asymptoty v $+\infty$ a $-\infty$.

Důkaz věty 6.1. Uvažujme pouze směr $+\infty$. Nechť má funkce $y=f(x)$ v $+\infty$ asymptotu $y=kx+b$. Znamená to, že se graf funkce f k této přímce ve směru $+\infty$ neustále blíží a tudíž musí platit

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0.$$

Jinými slovy, $f(x)-kx-b=h(x)$, kde $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$. Pak $f(x)-kx=b+h(x)$ a tudíž

$$\frac{f(x)}{x}-k=\frac{b+h(x)}{x}\to 0$$

pro $x\to+\infty$. Proto je $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$. Hodnotu b pak nalezneme ze vztahu

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b,$$

jelikož dle předpokladu tato limita existuje. □

PŘÍKLAD 6.2. Funkce $f(x)=x+2^{-x}$, $g(x)=x+2^{-x}\sin x$ mají asymptotu $y=x$ pro $x\to+\infty$ (obrázek 6.2).

Vysvětlení. Stačí si všimnout, že $f(x)-x\to 0$ pro $x\to+\infty$. □

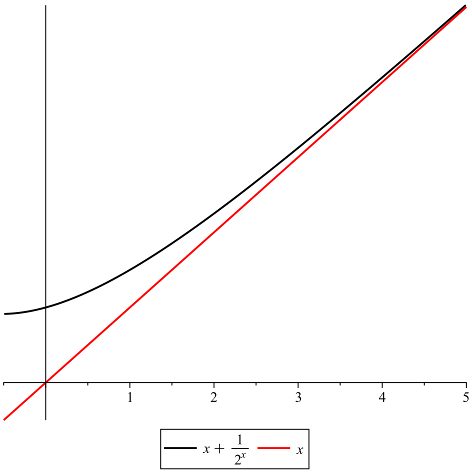
6.1.2.2. Asymptoty bez směrnice (svislé)

Svislá přímka s rovnicí $x=x_0$ bude asymptotou funkce f pro $x\to x_0\pm$, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit $\lim_{x\to x_0+}f(x)$, $\lim_{x\to x_0-}f(x)$ je nevlastní.

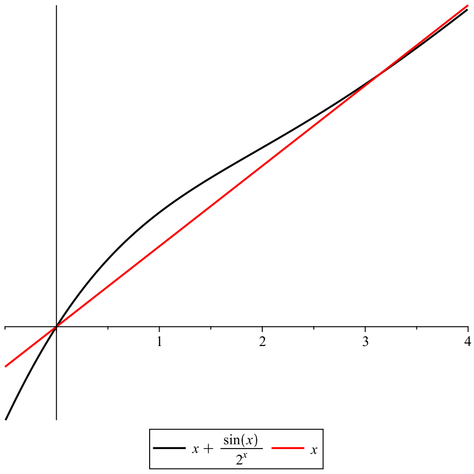
PŘÍKLAD 6.3. Svislá přímka $x=0$ je asymptotou funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ pro $x\to 0\pm$ a funkce $g(x)=\ln x$ pro $x\to 0+$ (obrázek 6.3).

PŘÍKLAD 6.4. Určeme asymptoty funkce

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+1}.$$



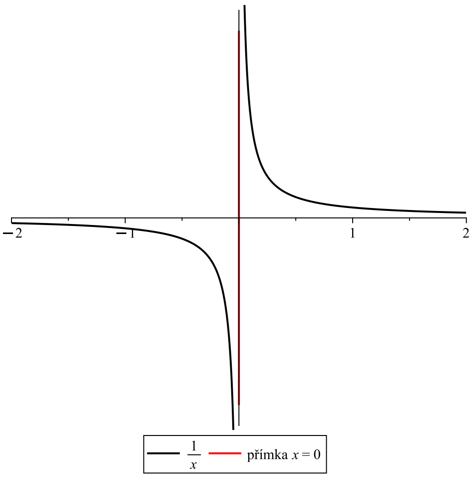
(A) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0$ (monotonně)



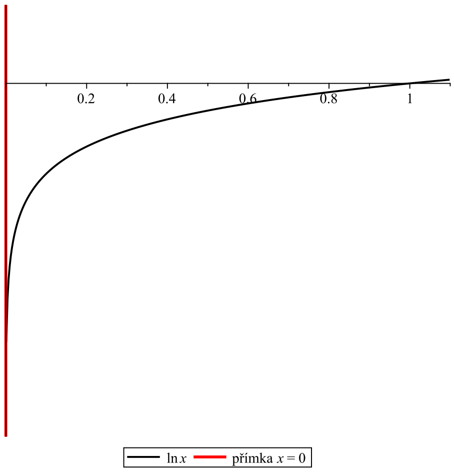
(B) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{2^x} = 0$ (nemonotonně)

OBRÁZEK 6.2. Typ funkce, mající šikmou asymptotu: skoro lineární v $+\infty$ anebo $-\infty$.

.



(A) $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$



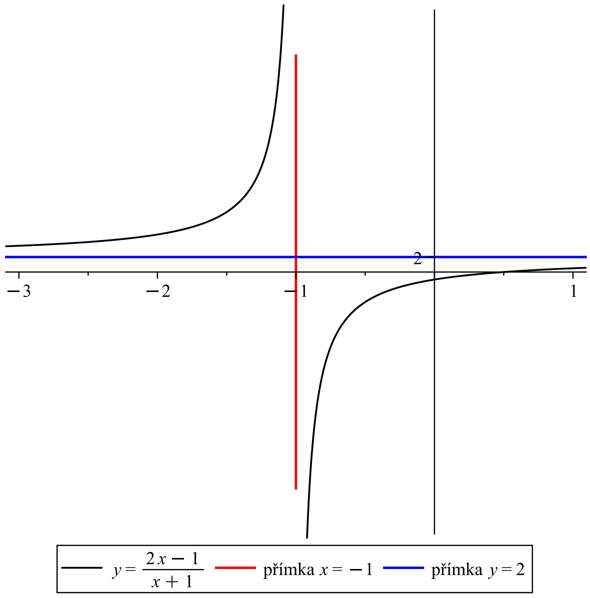
(B) $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$

OBRÁZEK 6.3. Typ funkce, mající svislou asymptotu: má body nespojitosti; v nějakém z bodů nespojitosti alespoň jedna z jednostranných limit je nekonečná

Řešení. Funkce má bod nespojitosti a pravděpodobně i svislou asymptotu. Bodem nespojitosti je $x_0 = -1$. Vyšetřeme, jak se funkce chová v blízkosti bodu -1:

(1) pro $x \to -1$ s $x > -1$ je $\frac{2x-1}{x+1} = 2\frac{x-\frac{1}{2}}{x+1} < 0$ a tudíž $\frac{2x-1}{x+1} \to -\infty$;
(2) pro $x \to -1$ s $x < -1$ je $\frac{2x-1}{x+1} = 2\frac{x-\frac{1}{2}}{x+1} > 0$ a $\frac{2x-1}{x+1} \to +\infty$.

Je tedy $\lim_{x\to -1+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$, $\lim_{x\to -1-} \frac{2x-1}{x+1} = +\infty$ a tudíž je přímka s rovnicí $x = -1$ pro tuto funkci asymptotou.



OBRÁZEK 6.4

Dále je zřejmé, že má f konečnou limitu v $+\infty$ a $-\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 2,$$

a proto je vodorovná přímka $y = 2$ pro tuto funkci asymptotou (obrázek 6.4).

Šikmé asymptoty funkce nemá (v rovnici $y = kx + b$ je $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\frac{2x-1}{x+1} = 0$, což dává asymptotu vodorovnou). □

6.2. Příklady vyšetření průběhu funkce

PŘÍKLAD 6.5. Vyšetřeme průběh funkce $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + x$

Řešení. Definičním oborem je $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. Je zřejmé, že $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$ a svislá přímka s rovnicí $x = 2$ je asymptotou. Vypočtěme derivaci:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^4}2(x-2) + 1 = -\frac{2}{(x-2)^3} + 1 = \frac{(x-2)^3 - 2}{(x-2)^3}.$$

Stacionární body určeme z rovnice $(x-2)^3 = 2$, jediným stacionárním bodem je $x = 2 + \sqrt[3]{2}$. Odhadněme přibližně hodnotu $\sqrt[3]{2}$ pomocí diferenciálu funkce $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$, tj. použijme vzorec $u(x) - u(x_0) \approx u'(x_0)(x - x_0)$, kde položme $x = 2$, $x_0 = 1$:

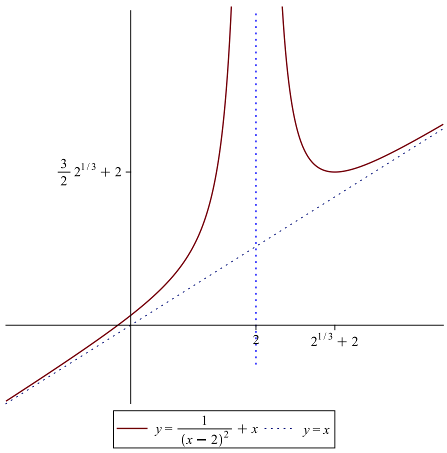
$$\sqrt[3]{2} \approx 1 + \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(2-1) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \approx 1{,}3.$$

Pak bude stacionární bod $x = 2 + \sqrt[3]{2} \approx 3{,}3$. Typ extrému určeme podle druhé derivace, jíž rovněž budeme potřebovat pro vyšetření konvexnosti. Máme

$$f''(x) = -2\left((x-2)^{-3}\right)' = 6(x-2)^{-4} > 0$$

pro $x \neq 2$. Proto je funkce všude konvexní a nabývá ve stacionárním bodě $2+\sqrt[3]{2}$ lokálního minima o hodnotě

$$f(2+\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2} + 2 + \sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^2\sqrt[3]{2}} + 2 + \sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^3} + 2 + \sqrt[3]{2}$$



OBRÁZEK 6.5. Graf funkce $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + x$

$$= 2 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx 2 + \frac{3}{2} \cdot 1{,}3 = 3{,}95.$$

Ověřme, zda má funkce asymptoty, odlišné od již nalezené svislé procházející bodem nespojitosti. Je-li pro $x \to +\infty$ asymptota ve tvaru $y = kx + b$, musí být

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x\,(x-2)^2} + 1 \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{(x-2)^2} + x - x \right) = 0.$$

Asymptotou je tedy přímka $y = x$. Znalost asymptot nám významné pomůže při sestrojení grafu (obrázek 6.5).

PŘÍKLAD 6.6. Vyšetřeme průběh funkce $f(x) = x^x$ na množině $(0, +\infty)$.

Řešení. Definičním oborem je neomezený otevřeny interval $(0, +\infty)$, v bodě 0 není funkce definována (vzniká tam neurčitý výraz typu 0^0). V oboru $(0, +\infty)$ nabývá funkce kladných hodnot. Abychom zjistili, jak se funkce chová, když $x \to 0+$ a $x \to +\infty$, potřebujeme určit odpovídajících limity. Pro $x \to 0+$ bude

0^∞

$$\lim_{x\to0+} x^x = \lim_{x\to0+} \mathrm{e}^{\ln x^x} = \lim_{x\to0+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to0+} x\ln x} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

jelikož dle l'Hôpitalova pravidla je

$0 \cdot \infty$ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to0+} x \ln x = \lim_{x\to0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to0+} x = 0$$

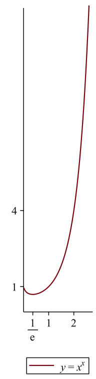
a funkce $x \mapsto \mathrm{e}^x$ je spojitá. Pro $x \to \infty$ je, samozrejmě, $\lim_{x\to+\infty} x^x = +\infty$.

Vypočtěme derivaci:

$$f'(x) = (x^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln x}\right)' = \mathrm{e}^{x\ln x}\,(x\ln x)' = x^x\,(\ln x + 1) = f(x)\,(\ln x + 1)\,. \tag{6.4}$$

Pro $x > 0$ je $f(x) > 0$, a tudíž znaménko derivace $f'(x)$ je určeno znaménkem výrazu $\ln x + 1$, jenž je kladný pro $x > \frac{1}{\mathrm{e}}$ a záporný pro $x < \frac{1}{\mathrm{e}}$ (jelikož logaritmus přirozený je funkcí rostoucí, $\ln x > -1$ znamená, že $x > \mathrm{e}^{-1}$). V jediném stacionárním bodě $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ tedy je lokální minimum o hodnotě

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}}. \tag{6.5}$$



OBRÁZEK 6.6. Graf funkce $f(x) = x^x$

Pro zakreslení grafu je vhodné alespoň přibližně odhadnout hodnotu minima (6.5): jelikož e $\approx 2{,}7 \approx 3$, bude $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Pro odhad $\sqrt[3]{3}$ lze využít diferenciálu funkce $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$:

$$u(x) - u(x_0) \approx u'(x_0)(x - x_0)$$

s $x = 3$, $x_0 = 1$: $\sqrt[3]{3} \approx 1 + \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(3-1) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. Proto je $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \approx \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Pro zjištěni směru zakřivení grafu vypočítáme druhou derivaci. K tomuto účelu použijme již vypočtenou derivaci první (viz (6.4)):

$$f''(x) = f'(x)(\ln x + 1) + f(x)\frac{1}{x} = f(x)\left(\ln x + 1\right)^2 + f(x)\frac{1}{x} > 0,$$

neboť $f(x) > 0$. Toto znamená, že je f na $(0, \infty)$ konvexní.

Na základe zjištěných informací po přidaní vhodných pomocných bodů (např. $f(1) = 1$, $f(2) = 4$) lze schematicky načrtnout graf (obrázek 6.6). S růstem x roste tato funkce mimořádně rychle. Např. $f(4) = 256$, $f(5) = 3125$.

PŘÍKLAD 6.7. Vyšetřeme průběh funkce $f(x) = \frac{x^3}{2x^2+3}$.

Řešení. Definičním oborem je $(-\infty, \infty)$. Pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$ máme

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x)^2 + 3} = \frac{-x^3}{2x^2+3} = -\frac{x^3}{2x^2+3} = -f(x).$$

Funkce je lichá, její graf je souměrný podle počátku.

Pro vyšetření monotonnosti vypočtěme derivaci:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{2x^2+3}\right)' = \frac{3x^2(2x^2+3) - x^3 4x}{(2x^2+3)^2} = \frac{2x^4 + 9x^2}{(2x^2+3)^2}.$$

Je zřejmé, že $f'(x) > 0$ pro všechna $x \neq 0$, proto je funkce neklesající na $(-\infty, \infty)$, přičemž mimo bod 0 je funkce ryze rostoucí.

Jediným stacionárním bodem je $x = 0$. V tomto bodě lokální extrém není, neboť je funkce f monotonní, a ke změně znaménka derivace nedochází. Lokální extrémy tedy funkce nemá žádné.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti zjistíme podle znaménka f''. Vypočtěme druhou derivaci:

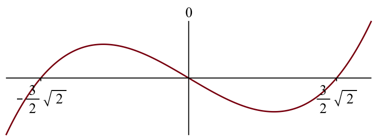
$$f''(x) = \frac{(8x^3 + 18x)(2x^2+3)^2 - (2x^4 + 9x^2)2(2x^2+3)4x}{(2x^2+3)^4}$$

$$= \frac{(8x^3+18x)(2x^2+3)-8(2x^4+9x^2)x}{(2x^2+3)^4} = \frac{-12x^3+54x}{(2x^2+3)^3} = \frac{-x(54-12x^2)}{(2x^2+3)^3}.$$

Jelikož je vždy $(2x^2+3)^3 > 0$, znaménko $f''(x)$ určuje pouze člen $-x(54-12x^2) = -6x(9-2x^2)$. Intervaly konvexnosti a konkávnosti zjistíme podle znaménka derivace f'', kterou upravíme takto:

$$f''(x) = \frac{-x(54-12x^2)}{(2x^2+3)^3} = \frac{-6x(9-2x^2)}{(2x^2+3)^3} = \frac{-12x\left(\frac{9}{2}-x^2\right)}{(2x^2+3)^3} = 12\frac{x\left(x-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}{(2x^2+3)^3}.$$

Rovnost $f''(x) = 0$ platí pravě pro $x = 0$, $x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. V každém z těchto bodů nastává změna znaménka f'', proto jsou to inflexní body (obrázky 6.7, 6.8b).



Obrázek 6.7. Změna znaménka f''

Dále vypočtěme limity v nevlastních bodech $+\infty$ a $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}} = -\infty.$$

Mimo jiné, je to funkce neomezená.

Zjistěme, zda má funkce asymptoty. Má-li funkce asymptoty tvaru $y = kx + b$ pro $x \to +\infty$, musí být

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x(2x^2+3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^3+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2+3} - \frac{x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-2x^3-3x}{2(2x^2+3)} = -\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2(2x^2+3)} = 0$$

Stejné hodnoty k a b vychází pro $x \to -\infty$. Asymptotou pro $x \to \pm\infty$ je tedy přímka $y = kx + b$ s $k = \frac{1}{2}$, $b = 0$:

$$y = \frac{x}{2}.$$

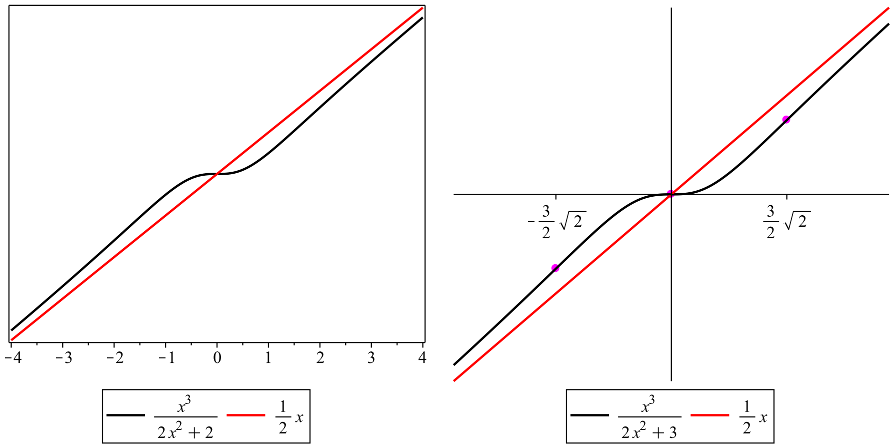
Zjištěné vlastnosti lze uplatnit při sestrojení grafu funkce (obrázek 6.8). □

Příklad 6.8. Vyšetřeme průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - x.$$

Řešení. Definičním oborem je $(-\infty, \infty)$. Pro vyšetření monotonnosti vypočtěme derivaci:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - 1 = \frac{1-x^2-1}{x^2+1} = -\frac{x^2}{x^2+1} < 0.$$



OBRÁZEK 6.8

Tudíž je funkce f všude klesající. Lokální extrémy proto nejsou. Dále pomocí druhé derivace zjistěme směr zakřivení grafu. Jelikož

$$f''(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2},$$

je funkce konkávní pro $x > 0$ a konvexní pro $x < 0$. Inflexním bodem je $x = 0$.

Podívejme se, jak se funkce chová v $\pm\infty$. Vzhledem k tomu, že $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$, můžeme si všimnout, že[1] platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{\pi}{2} + x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) + \frac{\pi}{2} + x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

to jest přímka $y = \frac{\pi}{2} - x$ je pro f asymptotou při $x \to +\infty$ a $y = -\frac{\pi}{2} - x$ je asymptotou při $x \to -\infty$.

Kreslení grafu (obrázek 6.10a) začneme nějakým jeho významným bodem. Přichází v úvahu nulový bod $(0, 0)$ (jelikož $f(0) = 0$). Navíc je funkce lichá. Jiné nulové body funkce nemá vzhledem k tomu, že je ryze klesající. □

Uvažujme ještě jeden podobný příklad (všimneme si však odlišnosti!).

PŘÍKLAD 6.9. Vyšetřeme průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}.$$

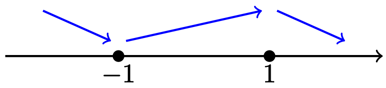
Řešení. Definičním oborem je $(-\infty, \infty)$. Jelikož

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2 - x^2 - 1}{2(x^2+1)} = \frac{1 - x^2}{2(x^2+1)}.$$

má funkce dva stacionární body $x = \pm 1$. Znaménko derivace určíme, zapíšeme-li ji ve tvaru $f'(x) = -\frac{(x-1)(x+1)}{2(x^2+1)}$. Obdržíme, že $f'(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ a $f'(x) > 0$

[1] Samozřejmé, mohli bychom zde postupovat i bezprostředně podle věty 6.1: platí $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1 = -1$, $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x - x - (-x) = \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, odkud obdržíme asymptoty $y = -x + \frac{\pi}{2}$ pro $x \to +\infty$ a $y = -x - \frac{\pi}{2}$ pro $x \to -\infty$.

pro $x \in (-1, 1)$. Výsledné intervaly monotonnosti si můžeme označit graficky (obrázek 6.9). V bodě -1 pak bude lokální minimum a v 1 lokální maximum.



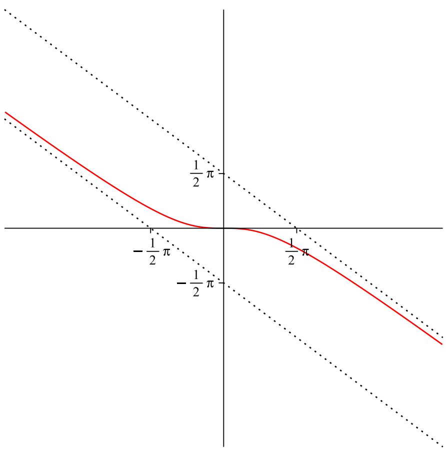
Obrázek 6.9. Diagram monotonnosti funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$.

Zderivujeme-li podruhé, vychází $f''(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$. Funkce je konkávní pro $x > 0$ a konvexní pro $x < 0$, bod 0 je inflexním.

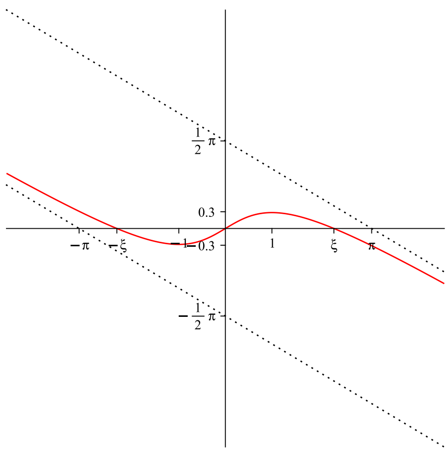
Podobně příkladu 6.8 zjistíme asymptoty $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$ pro $x \to +\infty$ a $y = -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$ pro $x \to -\infty$.

Kreslení grafu začneme nulovým bodem $(0, 0)$, dále použijme bod lokálního maxima $(1, f(1))$, kde je $f(1) = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \approx 0{,}3$. Bod lokálního minima bude $(-1, f(-1)) = (1, -f(-1))$ (funkce je lichá).

Při poklesu od hodnoty lokálního maxima v bodě $x = 1$ s růstem x se křivka neustále přibližuje k asymptotě $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$. Jelikož hodnota maxima je kladná a funkce f je spojitá, musí existovat nějaký bod $\xi > 1$, kde je $f(\xi) = 0$. Asymptota $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$ osu x protíná při $x = \pi$, tudíž je $1 < \xi < \pi$. Na $(-\infty, 0)$ křivku kreslíme podle souměrnosti (obrázek 6.9). $\square$



(A) $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$



(B) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$

Obrázek 6.10