PŘEDNÁŠKA 7

Přibližné určení hodnoty funkce

7.1. Diferencovatelnost a diferenciál

7.1.1. Diferencovatelnost funkce

DEFINICE 7.1. Funkce f je *diferencovatelná* v bodě x_0, jestliže existuje konstanta k taková, že platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-kh}{h} = 0. \tag{7.1}$$

VĚTA 7.1. Funkce jedné proměnné $f : I \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě x_0 právě tehdy, když má v tomto bodě konečnou derivaci.

Diferencovatelnost funkce znamená, že v okolí daného bodu ji lze libovolně přesně aproximovat lineární funkcí, jejíž grafem je tečna v tomto bodě (dle věty 7.1 číslo k v (7.1) je rovno $f'(x_0)$, což je směrnice tečny v tomto bodě).

7.1.2. Diferenciál

Nechť f má v bodě x_0 derivaci. *Diferenciálem* funkce f v bodě x_0 chápeme vyraz

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x,$$

kde symboly $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}f(x_0)$ mají následující význam:

(1) $\mathrm{d}x$ je *nekonečně malý* přírůstek argumentu v okolí bodu x_0;
(2) $\mathrm{d}f(x_0)$ je odpovídající přírůstek hodnoty funkce f.

Uvedený vztah obdržíme, budeme-li vzorec

$$\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = f'(x_0)$$

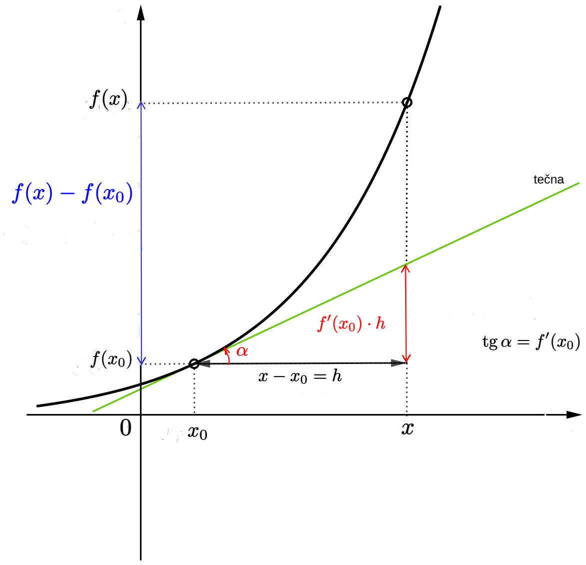
formálně chápat jako zlomek a vynásobíme obě dvě strany rovnosti členem $\mathrm{d}x$. Matematicky precizní definice diferenciálu zní takto.

DEFINICE 7.2. *Diferenciálem* funkce f v bodě x_0 se nazývá lineární funkce $h \mapsto \mathrm{d}f(x_0)(h) = kh$, kde hodnota konstanty k je taková, že platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-kh}{h} = 0.$$

Víme-li, že má funkce f v bodě x_0 derivaci, vzhledem k větě 7.1 lze definici 7.2 nahradit následující.

DEFINICE 7.3. Lineární funkce $h \mapsto f'(x_0)\,h$ se nazývá *diferenciálem* funkce f v bodě x_0.



Obrázek 7.1

Diferenciál $f'(x_0)\,h$ vyjadřuje hlavní část přírůstku funkce $f(x_0+h)-f(x_0)$, odpovídajícího změně argumentu h:

$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)\,h + \alpha(h),$$

kde $\alpha(h)\to 0$ pro $h\to 0$. Zanedbáme-li $\alpha(h)$ pro malá h, vychází

$$f(x_0+h)-f(x_0) \approx f'(x_0)\,h.$$

Tohoto vzorce lze využít pro přibližný výpočet přírůstku funkce.

Věta 7.2. Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak pro malé hodnoty h platí vzorec

$$f(x_0+h)-f(x_0) \approx \mathrm{d}f(x_0)(h), \tag{7.2}$$

přičemž chyba, jíž využitím tohoto vzorce dopustíme, směruje k 0 při zmenšení h.

Jinými slovy, pro x blízké k x_0 platí

$$f(x)-f(x_0) \approx \mathrm{d}f(x_0)(x-x_0), \tag{7.3}$$

kde člen $\mathrm{d}f(x_0)(x-x_0)$ je přibližným vyjádřením chyby, jíž se dopustíme, nahradíme-li $f(x)$ hodnotou $f(x_0)$.

Diferenciál v bodě x_0 je tedy lineární funkce, jež v tomto bodě napodobuje funkci f nejlépe („lineární část“ funkce f). Lze pak dokázat, že k v definici bude rovné $f'(x_0)$, to jest směrnici tečny. Geometricky to znamená, že nahradíme-li část grafu funkce f v malém okolí bodu $(x_0, f(x_0))$ nějakou přímkou, nejmenší chyby se dopustíme, když to bude tečná přímka v tomto bodě.

7.1.3. Geometrická interpretace diferenciálu

Směrnice tečny v bodě $(x_0, f(x_0))$ je $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ (viz obrázek 7.1). Připomeňme si také, že pro libovolné h je

$$f'(x_0)h = \mathrm{d}f(x_0)(h).$$

Z obrázku 7.1 je patrné, že pro x blízké k x_0 délky modré a červené úseček se liší málo, tj. $f(x)-f(x_0)$ je blízké k hodnotě $f'(x_0)\cdot(x-x_0)$, což je hodnota diferenciálu $\mathrm{d}f(x_0)(x-x_0)$.

Tudíž pro x blízké k x_0 platí vzorec

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0), \tag{7.4}$$

jenž znamená totéž, co (7.3). Jelikož rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě x_0 je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

vzorec (7.4) lze obdržet i tak, že v okolí bodu x_0 přibližně nahradíme křivku tečnou, to jest místo $f(x)$ vezmeme hodnotu y z rovnice tečny:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{7.5}$$

což je shodné s (7.4).

7.2. Přibližné určeni hodnoty funkce pomocí diferenciálu

Pro přibližné určení hodnoty funkce v případech, když nám stačí aproximace pomocí lineárních funkcí, lze využit věty 7.2.

Příklad 7.1. Určeme přibližně hodnotu $\sqrt[3]{67}$.

Řešení. Využijme vzorce (7.2):

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx \mathrm{d}f(x_0)(h).$$

Vezmeme-li $f(x) = \sqrt[3]{x}$, pak zadaný ukol znamená, že přibližně počítáme $f(67)$.

Zvolme $x_0 = 64$. Pak $f(x_0) = \sqrt[3]{64} = 4$. Body $x = 67$ a $x_0 = 64$ lze považovat za blízké, $h = x - x_0 = 3$, a podle vzorce (7.2) bude

$$\sqrt[3]{67} - \sqrt[3]{64} = f(x_0 + h) - f(x_0) \approx \mathrm{d}f(x_0)(h).$$

Jelikož $f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, máme

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h = \frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 = \frac{1}{3 \cdot 16} \cdot 3 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

a proto $\sqrt[3]{67} - \sqrt[3]{64} \approx \frac{1}{16}$, odkud obdržíme

$$\sqrt[3]{67} \approx \sqrt[3]{64} + \frac{1}{16} = 4 + 0{,}0625 = 4{,}0625.$$

Pro porovnání, dle kalkulačky vychází $\sqrt[3]{67} \approx 4{,}0615\ldots$. □

Příklad 7.2. Určeme přibližně hodnotu $\ln 2$.

Řešení. Lze využit vzorce (7.3)

$$f(x) - f(x_0) \approx \mathrm{d}f(x_0)(x - x_0)$$

s $f(x) = \ln x$. Pak bude $\ln 2 = f(2)$. Víme, že $\ln \mathrm{e} = 1$, proto zvolme $x_0 = \mathrm{e}$, $x = 2$. Jelikož $2 < \mathrm{e} < 3$ (přesněji $\mathrm{e} \approx 2{,}7$), lze body 2 a e považovat za dostatečně blízké a očekávat rozumnou přesnost vzorce. Zderivováním a dosazením obdržíme

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{\mathrm{e}},$$

a proto dle vzorce

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ &= f(\mathrm{e}) + \frac{1}{\mathrm{e}}(2 - \mathrm{e}) = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}(2 - \mathrm{e}) = \frac{2}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Tak obdržíme odhad $\ln 2 = f(2) \approx \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0{,}74$ (ve skutečnosti je $\ln 2 \approx 0{,}693$). □

7.3. Taylorův vzorec

Velmi důležitým nástrojem matematické analýzy je Taylorův vzorec, jenž umožňuje hladkou funkci v okolí daného bodu libovolně přesně aproximovat polynomy.

7.3.1. Idea aproximace funkce polynomem

Vzorec (7.4), který vzniká při aproximaci hodnoty funkce pomocí diferenciálu, lze zapsat ve tvaru (7.5), což znamená, že pro x v okolí bodu x_0 je

$$f(x) \approx p(x),$$

kde $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Takové p je lineární funkcí, to jest polynomem stupně 1, přičemž platí

$$f(x_0) = p(x_0), \quad f'(x_0) = p'(x_0), \tag{7.6}$$

a rozdíl mezi $f(x)$ a $p(x)$ směruje k 0:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - p(x)) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)) = 0.$$

Platí dokonce silnější vlastnost

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{1} = 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Poslední rovnost, kterou jsme obdrželi[1] pomocí l'Hôpitalova pravidla pro limitu typu $\frac{0}{0}$, znamená, že při $x \to x_0$ bude $f(x) - p(x) \to 0$ rychleji, než $x - x_0 \to 0$.

Nabízí se otázka, jestli nemůžeme na stejný výsledek přijít, budeme-li se snažit v okolí bodu x_0 přiblížit $f(x)$ nějakým polynomem stupně 1

$$p(x) = a_1 x + a_0$$

tak, aby platily rovnosti (7.6) a limita v (7.7) byla rovna 0. Je tomu skutečně tak: jelikož pro splnění (7.6) musí být $f(x_0) = a_1 x_0 + a_0$, $f'(x_0) = a_1$, obdržíme $p(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$, což vede na již odvozený vzorec.

Takto bychom mohli postupovat pro získání aproximace ve tvaru kvadratického polynomu, která bude, očividně, přesnější. Vskutku, budeme-li přibližovat $f(x)$ polynomem stupně 2 je logické požadovat, aby platilo

$$f(x_0) = p(x_0), \quad f'(x_0) = p'(x_0), \quad f''(x_0) = p''(x_0). \tag{7.8}$$

Vzhledem k uvedenému je přirozené takovou kvadratickou aproximaci hledat rovnou ve tvaru[2]

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + A(x - x_0)^2.$$

Jelikož $p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0) + 2A(x_0 - x_0) = f'(x_0)$, $p''(x_0) = 2A$, první dvě podmínky v (7.8) jsou splněny, a pro splnění té třetí musí být $A = \frac{1}{2} f''(x_0)$. Obdržíme tak, že pro x blízká k x_0 je $f(x) \approx p(x)$ s

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2. \tag{7.9}$$

---

[1] za předpokladu, že f' je spojitou funkcí v bodě x_0

[2] Mohli bychom hledat p i ve tvaru $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Vezmeme-li pro jednoduchost $x_0 = 0$, bude $p(0) = a_0$, $p'(0) = a_1$, $p''(0) = 2a_2$, a pro splnění (7.8) musí být $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$, což vede na (7.9) s $x_0 = 0$. Pro $x_0 \neq 0$ polynom (7.9) obdržíme z předchozího po substitucí $x - x_0 = t$.

Navíc, podobně (7.7), dle l'Hôpitalova pravidla pro polynom (7.9) platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^2}&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{2}=0,\end{aligned}$$

je-li známo, že f'' je v bodě x_0 spojitá.

Má-li funkce f v bodě x_0 spojité derivace vyšších řádů, takto můžeme pokračovat pro získání aproximací polynomy stupňů 3, 4 atd.

7.3.2. Konstrukce Taylorova polynomu

Buď f funkce, jež má v bodě x_0 derivace všech řádů. Vzhledem k uvedenému v § 7.3.1 je přirozené zkusit přiblížit $f(x)$ v okolí bodu x_0 polynomem stupně n

$$p(x)=a_n(x-x_0)^n+a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\cdots+a_2(x-x_0)^2+a_1(x-x_0)+a_0 \tag{7.10}$$

tak, aby platilo

$$f(x_0)=p(x_0),\quad f'(x_0)=p'(x_0),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(x_0)=p^{(n)}(x_0) \tag{7.11}$$

a navíc aby při $x\to x_0$ směroval rozdíl $f(x)-p(x)$ k 0 rychleji, než $(x-x_0)^n\to 0$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n}=0. \tag{7.12}$$

Zderivujeme-li $p(x)$ v (7.10) opakovaně, po dosazení $x=x_0$ dostaneme

$$p'(x_0)=a_1,\quad p''(x_0)=2!a_2,\quad p'''(x_0)=3!a_3,\quad \ldots,\quad p^{(n)}(x_0)=n!a_n \tag{7.13}$$

což znamená, že pro splnění rovností (7.13) máme zvolit

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\quad \ldots\quad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Takto přicházíme k definici Taylorova polynomu.

DEFINICE 7.4. Buď f funkce, jež má v bodě x_0 spojité derivace do řádu n včetně. Polynom

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

se nazývá *Taylorův polynom* stupně n pro funkci f v bodě x_0. Je-li $x_0=0$, polynom se nazývá též *Maclaurinův.*

V případě, že je f polynomem stupně n, je Taylorův polynom T_n pro f shodný s f. Není-li f polynomem, bude $T_n(x)\approx f(x)$ pouze přibližně.

VĚTA 7.3 (Taylorův vzorec). Buď f funkce, jež má v bodě x_0 spojité derivace do řádu n včetně. Pak pro x v okolí bodu x_0 je

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),$$

kde pro zbytkový člen $r_n(x)$ platí

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=0. \tag{7.14}$$

Idea důkazu. Koeficienty polynomu již byly nalezeny z podmínek (7.8). Rovnost nule limity (7.14) se dokáže podobně § 7.3.1 opakovaným užitím l'Hôpitalova pravidla. □

Pro zbytkový člen $r_n(x) = f(x) - T_n(x)$ existují různá vyjádření, mimo jiné v *Lagrangeově* tvaru: pro libovolné x v okolí x_0 je

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{7.15}$$

kde ξ je jistý bod, nacházející se mezi x_0 a x. Z (7.15) je zřejmé, že pro r_n platí (7.14).

7.3.3. Taylorův vzorec pro některé elementární funkce

S využitím věty 7.3 se dokáží tyto vzorce:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x), \tag{7.16a}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+1}(x), \tag{7.16b}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n}(x), \tag{7.16c}$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x), \tag{7.16d}$$

$$\begin{aligned}(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \\ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + r_n(x).\end{aligned} \tag{7.16e}$$

Jako důsledek lze z těchto rovností odvodit, mimo jiné, řadu významných limit, např.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \ldots}{x} = 1.$$

Takto rovněž odvodíme asymptotické vzorce typu $\sin x \sim x$, $\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $(1 + x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$, $(1 + x)^\alpha \sim 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)x^2$ pro $x \to 0$, kde zápis $u(x) \sim v(x)$ pro $x \to 0$ znamená, že je $\lim_{x\to 0} \frac{u(x)}{v(x)} = 1$.

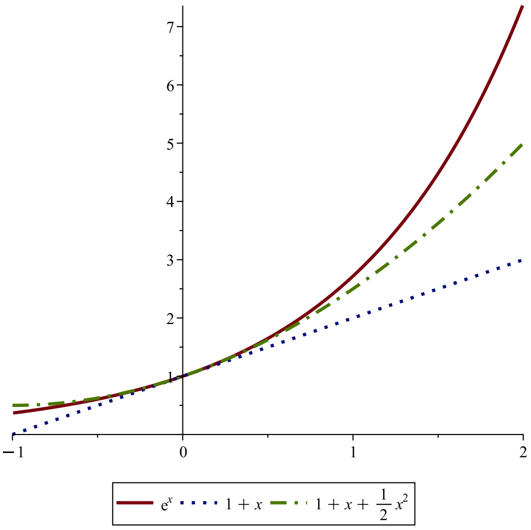
Pro přibližný výpočet hodnoty funkce je Taylorův vzorec přesnější, než vzorec, využívající diferenciálu.

Příklady jsou na obrázku 7.2. Vidíme, že např. vzorec $\sqrt{x+1} \sim 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ pro $x \to 0$ je přesnější, než $\sqrt{x+1} \sim 1 + \frac{1}{2}x$; vzorec $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ pro $x \to 0$ je přesnější, než $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$ apod.

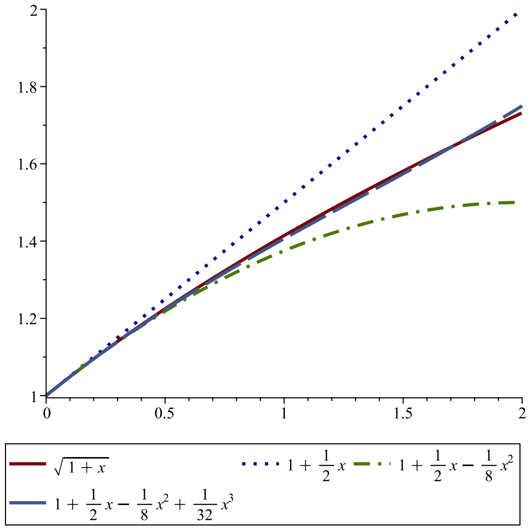
PŘÍKLAD 7.3. Platí

$$\sqrt{0{,}992} = (1 - 0{,}008)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}0{,}008 = 0{,}996,$$

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8\left(1 + \frac{1}{8}\right)} = 2\sqrt[3]{1 + \frac{1}{8}} = 2\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 2(1 + \frac{1}{24}) \approx 2{,}08.$$



(A)



(B)

Obrázek 7.2