PŘEDNÁŠKA 8

Funkce dvou proměnných

8.1. Motivační úvahy

Mluvíme-li o funkci f jedné proměnné, představujeme si předpis

$$x \mapsto f(x), \tag{1}$$

kde $x \in D(f) \subset \mathbb{R}$. Vztah (1) obvykle zapisujeme formou $y = f(x)$, což vyjadřuje závislost veličiny y (*závisle* proměnné) na veličině x (*nezávisle* proměnné). Např. teplota vozovky dálnice v závilosti na vzdálenosti od počátečního bodu (pro popis stačí pouze jedna souřadnice, je to tedy závislost typu (1)).

Jedná-li se o teplotu podlahy v místnosti, pak pro určení polohy bodu je potřeba již souřadnice dvě; funkční závislost by pak byla ve tvaru

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2),$$

kde x_1 a x_2 jsou nezávisle proměnné veličiny, odpovídající souřadnicím uvažovaného bodu. Každému bodu roviny se souřadnicemi (x_1, x_2) přiřazujeme hodnotu teploty $f(x_1, x_2)$, naměřenou v tomto bodě. Definičním oborem takové funkce bude množina v rovině: $D(f) \subset \mathbb{R}^2$.

Měříme-li teplotu půdy nebo vzduchu, musíme přidat i třetí souřadnici, jelikož taková teplota závisí také na výšce resp. hloubce. Poloha měřeného bodu, a tudíž i naměřena hodnota tedy závisí na třech parametrech, což vede na funkci tří proměnných:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$$

s definičním oborem v $\mathbb{R}^3$. Kdybychom zde počítali i se změnou hodnoty v čase, musíme přidat i čtvrtou proměnnou, určující časový okamžik měření, atd.

Takové vzorce vyjadřují funkce několika proměnných. Závislost sledované veličiny na více faktorech přivádí k pojmu funkce více proměnných.

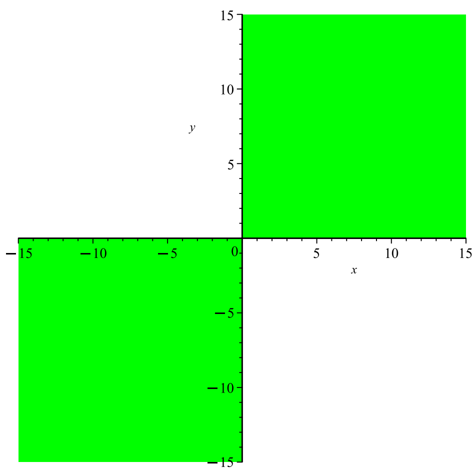
8.2. Funkce dvou proměnných

8.2.1. Základní pojmy

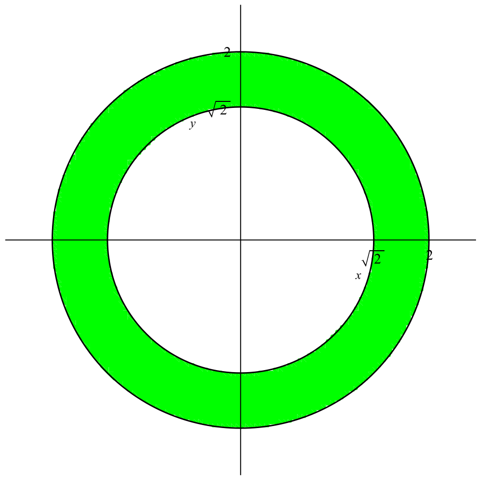
Dále se budeme zabývat pouze funkcemi dvou proměnných. V tomto případě je zvykem značit nezávisle proměnné x a y, závisle proměnnou z a zapisovat předpis ve tvaru

$$z = f(x, y). \tag{2}$$

Definice 8.1. Nechť M je nějaká neprázdná množina bodů v rovině $\mathbb{R}^2$. Funkce f dvou proměnných, definovaná na M, je předpis, který každé dvojici čísel $(x, y) \in M$ přiřazuje právě jedno číslo $f(x, y)$: $(x, y) \mapsto f(x, y)$.



(A)



(B)

Obrázek 1

Množině M, obsahující povolené hodnoty dvojice (x, y), říkáme *definiční* obor funkce f a píšeme $D(f) = M$. Dosadíme-li za x, y nějaká konkretní čísla x_0, y_0, obdržíme číslo $f(x_0, y_0)$, jež je *hodnotou funkce f v bodě* (x_0, y_0).

Není-li obor M u předpisu (2) explicitně uveden, považujeme za definiční obor funkce tzv. *přirozený* definiční obor, to jest nejširší množinu bodů (x, y), na níž lze tímto předpisem funkci definovat.[1]

Příklad 8.2. Určeme definiční obor funkce s předpisem

$$z = \sqrt{xy(x^2 + xy + y^2)}.$$

Řešení. Obor není explicitně specifikován, jedná se tedy o nejširší množinu, kde má vzorec smysl. Jediným omezením je podmínka nezápornosti výrazu pod druhou odmocninou. Jelikož úpravou na úplný čtverec dostaneme

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x\frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{y^2}{4} = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0,$$

bude výraz pod druhou odmocninou definován, je-li $xy \geq 0$. Toto znamená, že musí být buď $x \geq 0$, $y \geq 0$ anebo $x \leq 0$, $y \leq 0$ (obrázek 1a). □

Příklad 8.3. Určeme definiční obor funkce s předpisem

$$z = \arcsin(3 - x^2 - y^2).$$

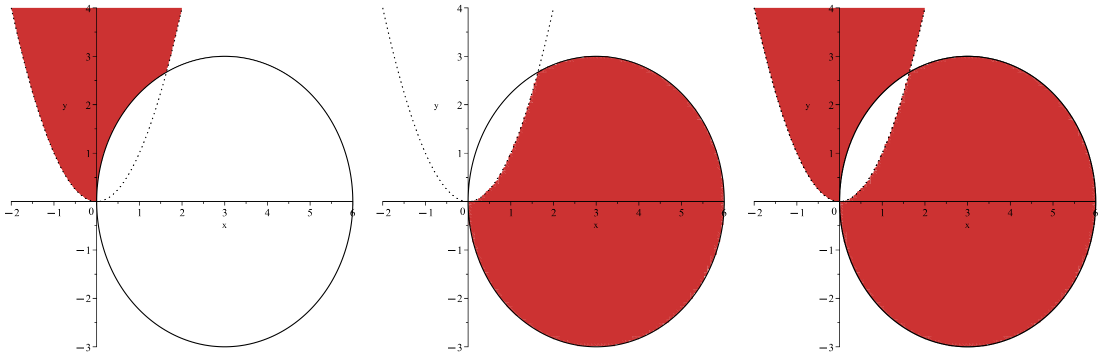
Řešení. Definičním oborem pro arcsin $= \sin^{-1}$ je obor hodnot funkce sin, to jest uzavřeny interval[2] $[-1, 1]$. Proto musí platit $3 - x^2 - y^2 \in [-1, 1]$, tj. $-1 \leq 3 - x^2 - y^2 \leq 1$, $1 \geq x^2 + y^2 - 3 \geq -1$, $4 \geq x^2 + y^2 \geq 2$. Ve výsledku obdržíme

$$D(f) = \{(x, y) : \ 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\},$$

což je oblast mezi kružnicemi o poloměrech $\sqrt{2}$ a 2 a středem v počátku, a to včetně hranice (obrázek 1b). □

[1] Toto znamená, že, obsahuje-li předpis výrazy, jež nejsou definovány ve všech bodech, je potřeba předpis doplnit upřesněním definičního oboru, a sice vyloučením bodů, kde daným předpisem funkci definovat nelze.

[2] Zde a všude dále uzavřené intervaly značíme hranatými závorkami.



OBRÁZEK 2

PŘÍKLAD 8.4. Popišme definiční obor funkce s předpisem

$$f(x,y) = \sqrt[4]{\frac{x^2+y^2-6x}{y-x^2}}.$$

Řešení. Pro $(x,y) \in D(f)$ musí platit buď

$$y - x^2 > 0, \quad x^2+y^2-6x \geq 0 \tag{3a}$$

anebo

$$y - x^2 < 0, \quad x^2+y^2-6x \leq 0. \tag{3b}$$

Buďte $D_{(3a)}$ a $D_{(3b)}$ množiny všech (x,y), splňujících (3a) resp. (3b). Pak bude

$$D(f) = D_{(3a)} \cup D_{(3b)}. \tag{4}$$

Pro zjištění struktury těchto množin popišme vyznám jednotlivých podmínek v (3a), (3b). Pro (3a) máme

(1) $y > x^2$: bod (x,y) leží nad parabolou $y = x^2$ (hranice vyloučena);
(2) $x^2+y^2-6x = x^2-2\cdot 3x+9-9 = (x-3)^2+y^2-9 \geq 0$: bod (x,y) patří vnějšku kruhu o poloměru 3 se středem v $(3,0)$;

jedná se o množinu $D_{(3a)}$, znázorněnou na obrázku 2a. Pro (3b) je situace opačná:

(1) $y < x^2$: bod (x,y) leží pod parabolou $y = x^2$ (hranice vyloučena);
(2) $x^2+y^2-6x = (x-3)^2+y^2-9 \leq 0$: bod (x,y) patří vnitřku kruhu o poloměru 3 se středem v $(3,0)$,

což popisuje množinu $D_{(3b)}$ z obrázku 2b. Hledanou množinu $D(f)$ dle (4) obdržíme sjednocením dvou předchozích (obrázek 2c). □

8.2.2. *Graf, vrstevnice*

Funkce $(x,y) \mapsto f(x,y)$ určuje množinu bodů $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, pro něž platí (2). Toto je rovnicí plochy v $\mathbb{R}^3$, jež je *grafem* funkce f.

DEFINICE 8.5. *Grafem* funkce $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je množina

$$\{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in D(f)\}.$$

Graf funkce dvou proměnných s předpisem

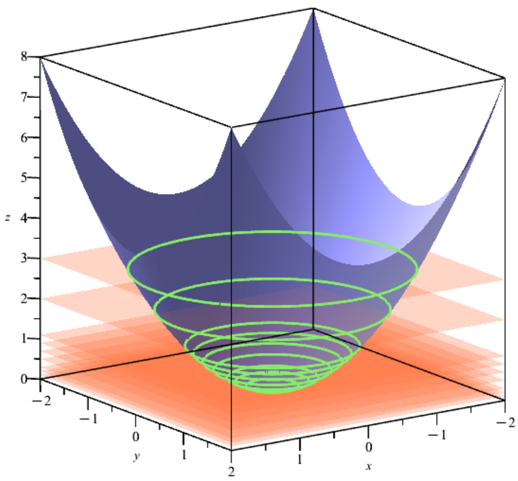
$$z = f(x,y)$$

je podmnožinou trojrozměrného prostoru a oproti funkcím jedné proměnné je grafické znázorněni takovýchto funkcí výrazně složitější. Pro získání základní představy o grafu lze použít jeho řezy soustavou rovin.

Vykonáme-li řez 3D grafu funkce f rovinami $z = c$, kde c je libovolné, obdržíme soustavu rovinných křivek, jejichž rovnice mají tvar

$$f(x, y) = c.$$

Příklad je na obrázku 3. Zde lze pozorovat, že v průmětu do roviny $z = 0$ obdržíme soustavy koncentrických kružnic.



OBRÁZEK 3. Plocha s rovnicí $z = x^2 + y^2$ a její řezy rovinami $z = c$ pro různá c

Toto připomíná *vrstevnice* v zeměpisu, což jsou rovinné křivky, tvořené body (x, y), kde je nadmořská výška stejná (to jest z je konstantní, kde $z = f(x, y)$ je nadmořská výška v bodě (x, y)). Pro obecnou funkci f dvou proměnných vrstevnice jsou určeny vzorcem

$$f(x, y) = c,$$

kde c je konstanta.

DEFINICE 8.6. *Vrstevnice* je kolmý průmět do roviny $z = 0$ křivky, vznikající řezem grafu funkce f rovinou $z = c$.

8.3. Limita funkce jedné proměnné

Připomeňme si, že funkce jedné proměnné $x \mapsto f(x)$ má vlastní limitu $L = \lim_{x\to x_0} f(x)$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že pro $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ platí

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Neexistenci limity $\lim_{x\to x_0} f(x)$ lze dokázat:

(1) pomocí jednostranných limit (ukázat, že jednostranné limity $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ jsou různé anebo aspoň jedna z nich neexistuje);

(2) pomocí vybraných posloupností (sestrojit dvě posloupnosti $\{x_n : n \geq 1\}$ a $\{\bar{x}_n : n \geq 1\}$ tak, aby platilo $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \bar{x}_n = x_0$ a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(\bar{x}_n)$).

8.4. Limita funkce dvou proměnných

Buďte f funkce dvou proměnných a $L \in (-\infty, \infty)$. Buď (x_0, y_0) nějaký bod (je možné, že $(x_0, y_0) \neq D(f)$). Zajímáme-li se o chování funkce f v okolí bodu (x_0, y_0), je přirozené uvažovat limitu $f(x, y)$ pro (x, y), blížící se k (x_0, y_0).

Definice 8.7. Číslo L je limitou funkce f při $(x, y) \to (x_0, y_0)$:

$$L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y), \tag{5}$$

jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že pro všechna (x, y), splňující nerovnost $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_\varepsilon$, platí

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Z geometrie víme, že hodnota $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ udává vzdálenost mezi body (x, y) a (x_0, y_0). Zdůrazněme, že v (5) se (x, y) blíží k (x_0, y_0) *libovolným* způsobem, to jest podle jakékoliv cesty. Výsledek tedy nesmí na volbě cesty záviset.

Poznámka 8.8. Vyšetřování limit funkcí dvou proměnných je složitější oproti případu funkce jedné proměnné. Máme-li nějakou hypotézu ohledné možné hodnoty L, můžeme ji zkusit ověřit pomočí definice. Pro důkaz existence limity a její výpočet se snažíme využívat vhodných úprav a známých vztahů, popisujících chování elementárních funkcí v určitých bodech (např. $\sin x \sim x$ pro $x \to 0$ apod.). Obecný postup formulovat nelze (viz však § 8.5).

Příklad 8.9. Platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - 3y + 4}{3x + y - 7} = -\frac{4}{7}.$$

Řešení. Limitu lze vypočítat přímým dosazením do předpisu $f(x, y) = \frac{x-3y+4}{3x+y-7}$ hodnot $x = 0$, $y = 0$, jelikož $f(0, 0)$ je korektně definováno a v okolí bodu $(0, 0)$ se funkce mění spojitě. □

Příklad 8.10. Dokažme, že platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Řešení. Neurčitý člen typu $\frac{0}{0}$. Uvedené platí, jelikož

$$\lim_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

a $(x, y) \to (0, 0)$ právě tehdy, když $\sqrt{x^2 + y^2} \to 0$. □

Příklad 8.11. Vypočítejme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = 2.$$

Řešení. Neurčitý člen typu $\frac{0}{0}$. Platí

$$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1} = \sqrt{x^2+y^2+1}+1.$$

Pak je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right) = 2.$ □

8.5. Důkaz existence limity přechodem do polárních souřadnic

Pro vyšetření dvojné limity $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ je občas vhodné přejít k polárním souřadnicím se středem v bodě (x_0,y_0): $x = x_0 + r\cos\phi$, $y = y_0 + r\sin\phi$.

VĚTA 8.12. Existují-li konstanta L a funkce $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ takové, že $\lim_{r\to 0+} g(r) = 0$ a pro libovolné ϕ, $0 \le \phi \le 2\pi$, platí

$$|f(x_0 + r\cos\phi, y_0 + r\sin\phi) - L| \le g(r), \tag{6}$$

pak $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Důkaz. Skutečnost, že se bod (x,y) blíží k (x_0,y_0), znamená, že se jejich vzdálenost blíží k 0. Zavedeme-li polární souřadnice $x = x_0 + r\cos\phi$, $y = y_0 + r\sin\phi$, tato vzdálenost je $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r$, a tudíž $(x,y) \to (x_0,y_0)$ znamená, že $r \to 0+$.

Jelikož $\lim_{r\to 0+} g(r) = 0$, k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze najít δ_ε tak, aby pro $r < \delta_\varepsilon$ bylo $g(r) < \varepsilon$. Proto dle (6) platí $|f(x,y) - L| < \varepsilon$, je-li vzdálenost bodu (x,y) od (x_0,y_0) menši, než δ_ε. Stačí se odkázat na definici 8.7. □

Na odhad (6) typicky přijdeme, obdržíme-li po zavedení polárních souřadnic vztah tvaru

$$f(x_0 + r\cos\phi, y_0 + r\sin\phi) = L + g(r)h(r,\phi), \tag{7}$$

kde $\lim_{r\to 0+} g(r) = 0$ a $|h(r,\phi)| \le K$ pro $(r,\phi) \in (0,r_0] \times [0,2\pi]$ s nějakým r_0.

PŘÍKLAD 8.13. Platí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Řešení. Zavedeme-li polární souřadnice $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, bude

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \frac{r^2 r\cos^2\phi\sin\phi}{r^2} = r\cos^2\phi\sin\phi,$$

to jest pro $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ platí (7) s $L = 0$ a $g(r) = r$ a $h(r,\phi) = \cos^2\phi\sin\phi$. Jelikož $|h(r,\phi)| = \cos^2\phi\,|\sin\phi| \le 1$, dle věty 8.12 je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. □

Poznámka 8.14. Podmínka (6) věty 8.12 je podstatná. Zjistíme-li totiž, že limita $\lim_{r\to 0+} f(x_0 + r\cos\phi, y_0 + r\sin\phi)$ má stejnou hodnotu pro libovolná ϕ, toto samo o sobě ještě neznamená existenci limity $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ (viz příklad 8.21, poznámka 8.22).

8.6. Dvojnásobné limity

Může se zdát, že přechod $(x,y) \to (x_0,y_0)$ v (5) lze provést i tak, že vypočítáme např. $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ a následně přejdeme k limitě pro $y \to y_0$. Toto ovšem může vést na nesprávný výsledek, jelikož limity

$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y), \quad \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y), \tag{8}$$

jimž se říká *dvojnásobné*, obecně řečeno, nemusí být shodné s $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. Na rozdíl od (8), limitě $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, chápané dle definice 8.7, se říká limita *dvojná*.

VĚTA 8.15. Nechť existuje $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. Pak platí následující.

(1) Existuje-li $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ pro libovolné y v okolí bodu y_0, pak existuje i limita $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$, přičemž platí

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

(2) Existuje-li $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ pro libovolné x v okolí bodu x_0, pak existuje i limita $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$, přičemž platí

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Věty 8.15 lze využít pro důkaz neexistence dvojné limity.

Důsledek 8.16. Jsou-li hodnoty limit $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ a $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ různé, pak dvojná limita $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ neexistuje.

Důkaz. Dle věty 8.15 z existence třech zmíněných limit plyne, že všechny mají stejnou hodnotu. $\square$

Příklad 8.17. Vypočtěme dvojnásobné limity funkce

$$f(x,y) = \frac{y-x}{y+x}$$

při $x\to 0$, $y\to 0$.

Řešení. Dle definice dvojnásobné limity je

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{y-x}{y+x} = \lim_{y\to 0}\frac{y-0}{y+0} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{y-x}{y+x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-x}{0+x} = -1.$$

Hodnoty dvojnásobných limit jsou tedy různé. Dle důsledku 8.16 z toho lze odvodit, že dvojná limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y-x}{y+x}$ neexistuje. $\square$

Obecně řečeno, nejenže se hodnoty dvojnásobných limit mohou lišit, nějaká z nich nemusí ani existovat.

Příklad 8.18. Vypočtěme dvojnásobné limity funkce

$$f(x,y) = x\sin\frac{1}{y}$$

při $x\to 0$, $y\to 0$.

Řešení. Jelikož $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y} = (\lim_{x\to 0} x)\sin\frac{1}{y} = 0$ pro libovolné $y\neq 0$, platí

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y} = 0.$$

Limita $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$ neexistuje, neboť pro $x\neq 0$ neexistuje ani $\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$. $\square$

8.7. Případy neexistence limity

Skutečnost, že $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, dle definice 8.7 znamená, že hodnota $f(x,y)$ se neomezeně přibližuje k L, když se vzdálenost bodu (x,y) od (x_0,y_0) blíží k 0. Rozhoduje *vzdálenost*, nikoliv jednotlivé *cesty*, kudy $(x,y)\to(x_0,y_0)$. Hodnota f se tedy musí blížit k L na každé cestě do (x_0,y_0). Této skutečnosti lze využít, máme-li podezření, že daná limita s největší pravděpodobností neexistuje, a chtěli bychom to dokázat.

8.7.1. *Různé limitní hodnoty funkce podle určitých cest*

Pomocí uvedené úvahy neexistenci limity $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ dokážeme, najdeme-li dvě cesty Γ_1 a Γ_2 tak, že při přibližování (x,y) k (x_0,y_0) podle Γ_1 bude $f(x,y)\to L_1$ a podle Γ_2 bude $f(x,y)\to L_2$ s $L_2\neq L_1$. Takové cesty lze často najít, uvažujeme-li přibližování $(x,y)\to(x_0,y_0)$

(1) podle přímek (to jest, uvažujeme-li (x,y) spojené vztahem $y-y_0=k(x-x_0)$, kde k je konstanta);
(2) podle parabol $(y-y_0=k(x-x_0)^2)$.

8.7.2. *Využití polárních souřadnic*

Občas je vhodné přejít k polárním souřadnicím (r,ϕ) podle vzorců $x=x_0+r\cos\phi$, $y=y_0+r\sin\phi$; pak bude $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, a $(x,y)\to(x_0,y_0)$ znamená, že $r\to 0+$. Obdržíme-li po přechodu k limitě v $f(x_0+r\cos\phi, y_0+r\sin\phi)$ při $r\to 0+$ výsledek závislý na směru ϕ, můžeme z toho odvodit, že $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ neexistuje.[3]

8.7.3. *Dvojnásobné limity*

Neexistenci dvojné limity dokážeme, zjistíme-li, že odpovídající dvojnásobné limity nemají stejnou hodnotu (důsledek 8.16).

8.7.4. *Příklady*

Ukažme užití hořejšího na příkladech.

Příklad 8.19. Limita
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$
neexistuje.

Řešení 8.19.1. Limita neexistuje, neboť změna hodnoty $\frac{xy}{x^2+y^2}$ *záleží na cestě*, podle jaké $(x,y)\to(0,0)$. Nechť $(x,y)\to(0,0)$ např. tak, že $(x,y)=(x,0)$. Pak je vždy
$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=0.$$
Vezmeme-li $(x,y)=(x,x)$, kde $x\to 0$, obdržíme
$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$
Limita tedy existovat nemůže. □

Řešení 8.19.2. Jiný způsob: zaveďme polární souřadnice
$$x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi.$$
Potom $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2\cos^2\phi+r^2\sin^2\phi}=r$, a tudíž $\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ znamená, že $r\to 0$. Nesmí tedy záležet na uhlu ϕ (tj. směru). Vyjádříme-li výraz pod limitou pomocí polárních souřadnic, dostaneme
$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{r^2\cos\phi\sin\phi}{r^2}=\cos\phi\sin\phi=\frac{1}{2}\sin 2\phi. \tag{9}$$
Při $\phi=0$ vychází $f(x,y)=f(r\cos 0, r\sin 0)=f(r,0)=0$ pro libovolné $r\geq 0$. Vezmeme-li $\phi=\frac{\pi}{4}$, dle (9) dostaneme $f(x,y)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$. □

[3] Můžeme si všimnout, že, je-li $\phi\in[0,\frac{\pi}{2})$ pevně dané, pohyb bodu $(x_0+r\cos\phi, y_0+r\sin\phi)$ při $r\to 0+$ odpovídá přibližování k (x_0,y_0) podle přímek $y=y_0+k(x-x_0)$ se směrnicí $k=\operatorname{tg}\phi$. Při $\phi=\frac{\pi}{2}$ se jedná o přibližování podle svislé souřadné osy.

Řešení 8.19.3. Zkusme $(x,y) \to (0,0)$ podle přímek $y = kx$, to jest zvolme (x,y) ve tvaru $(x,y) = (x,kx)$. Pak bude

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Vidíme, že se funkce blíží k různým hodnotám, zvolíme-li např. $k = 0$ ($\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$) a $k = 1$ ($\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$). Pro tyto hodnoty směrnice k obdržíme řešení 8.19.1, jež je tudíž speciálním případem stávajícího. □

PŘÍKLAD 8.20. Vyšetřeme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Řešení 8.20.1. Položme $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Jelikož

$$f(x,x) = 0, \quad f(0,y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

pro $y > 0$, lze usoudit, že limita neexistuje. □

Řešení 8.20.2. Pro důkaz neexistence lze využít dvojnásobných limit. Jelikož

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\right) = 1, \quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{-y^2}{y^2}\right) = -1,$$

dvojná limita neexistuje dle důsledku 8.16. □

Řešení 8.20.3. V polárních souřadnicích $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ pro libovolné r bude

$$f(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{\cos^2\phi - \sin^2\phi}{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = \cos 2\phi,$$

což explicitně závisí na hodnotě ϕ. □

PŘÍKLAD 8.21. Vyšetřeme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

Řešení. Blíží-li se bod (x,y) k $(0,0)$ podle parabol $x = ky^2$, bude

$$f(ky^2, y) = \frac{ky^4}{k^2y^4+y^4} = \frac{k}{k^2+1},$$

což závisí na hodnotě k, a tudíž limita neexistuje. □

Poznámka 8.22. Zavedeme-li v příkladě 8.21 polární souřadnice $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, dostaneme

$$f(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{r^3\cos\phi\sin^2\phi}{r^2\cos^2\phi + r^4\sin^4\phi} = \frac{r\cos\phi\sin^2\phi}{r\cos^2\phi + \sin^4\phi} \to 0 \tag{10}$$

pro $r \to 0+$, a to při libovolném ϕ. Limita $\lim_{r\to 0+} f(r\cos\phi, r\sin\phi)$ tedy nezávisí na hodnotě ϕ. Limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ však neexistuje. Zdánlivý spor s větou 8.12 rozřešíme, všimneme-li si, že i když dle (10) pro $f(r\cos\phi, r\sin\phi)$ platí (7) s $L = 0$, $g(r) = r$

a $h(r,\phi) = \frac{\cos\phi \sin^2\phi}{r\cos^2\phi + \sin^4\phi}$, nemůžeme zde zaručit[4] omezenost výrazu $h(r,\phi)$ pro všechna $0 < r \leq r_0$ a $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

8.8. Spojitost funkce dvou proměnných

Definice 8.23. Funkce f je *spojitou* v bodě (x_0, y_0), jestliže

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Podle analogie s funkcí jedné proměnné, graf funkce spojité v bodě (x_0, y_0), v okolí tohoto bodu představuje nepřerušenou plochu bez děr a trhlin.

Řada dříve uvažovaných vlastností spojitých funkcí platí i v případě funkce dvou proměnných (např. součet a součin spojitých funkcí je funkce spojitá). Platí rovněž tvrzení, podobná některým větám, využívajícím spojitost funkce jedné proměnné. Uveďme pouze Weierstrassovu větu o extrémních hodnotách spojité funkce.

Věta 8.24 (Weierstrassova věta). Funkce spojitá na omezené uzavřené[5] množině nabývá na ní svých největší a nejmenší hodnot.

Příklad 8.25. Funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = y = 0 \end{cases}$$

není spojitá v $(0,0)$, neboť dle příkladu 8.20 limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje.

Příklad 8.26. Funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{pro } x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = y = 0 \end{cases}$$

je spojitá v $(0,0)$, neboť $f(0,0) = 0$ a dle příkladu 8.19 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Body nespojitosti funkce nemusí být izolované a mohou sestavovat i souvislé množiny.

Příklad 8.27. Funkce

$$f(x,y) = \frac{3x - y + 1}{y - x^2}$$

je spojitá všude, kromě bodů paraboly $y = x^2$.

Příklad 8.28. Funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt[5]{y^2 - x^2}}$$

je spojitá všude, kromě bodů přímek $y = x$ a $y = -x$.

---

[4] Všimněme si, že pro $h(r,\phi) = \frac{\cos\phi\sin^2\phi}{r\cos^2\phi + \sin^4\phi}$ platí

$$\lim_{\phi\to 0+}\lim_{r\to 0+} h(r,\phi) = \lim_{\phi\to 0+} \frac{\cos\phi \sin^2\phi}{\sin^4\phi} = \lim_{\phi\to 0+} \frac{\cos\phi}{\sin^2\phi} = +\infty$$

a tudíž nemůže být $h(r,\phi)$ omezené v okolí bodu $(0,0)$.9

[5] *Uzavřenou* množinou v rovině rozumíme množinu, obsahující svoji hranici. Přesnější vyjádření této vlastnosti zde rozebírat nebudeme.