PŘEDNÁŠKA 9

Funkce dvou proměnných: parciální derivace, diferenciál

9.1. Parciální derivace prvního řádu

Mějme funkci f dvou proměnných. Zapišme výraz $f(x,y)$ a „zmrazme“ v něm y (to jest budeme v tomto okamžiku považovat y za konstantní hodnotu). Zderivujme tento vyraz podle x. Výsledkem bude tzv. *parciální derivace* funkce f vzhledem k proměnné x. Značí se obvykle $f'_x(x,y)$ nebo jinak $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$. Podobně se definuje $f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$.

Poznámka 9.1. Máme-li předpis $z = f(x,y)$, píšeme $z'_x = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$, $z'_y = \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ a rozumíme každý ze symbolů z'_x, z'_y jako celek. Písmeno „d“ se zde tradičně zapisuje v podobě „∂“, aby se zdůraznila odlišnost od derivace $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ funkce jedné proměnné.

Pro výpočet parciálních derivací vesměs využíváme postupů, již známých pro derivaci funkce jedné proměnné.

PŘÍKLAD 9.2. Nalezněme parciální derivace 1. řádu funkce

$$f(x,y) = 3\,x^3y^2 - \sin\,(x+4\,y)\,.$$

Řešení. Derivujeme podle x s konstantním y:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 9x^2y^2 - \cos(x+4y).$$

Derivujeme podle y; pak je x konstantní:

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 6\,x^3y - 4\,\cos\,(x+4\,y)\,.$$

PŘÍKLAD 9.3. Vypočtěme parciální derivace 1. řádu funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2).$$

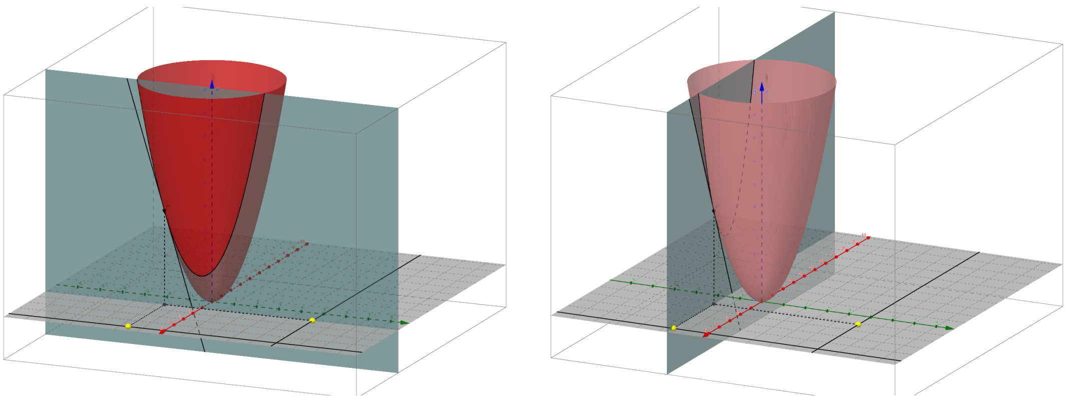
Řešení. Podle vzorce pro derivaci složené funkce dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}.$$

Všimneme-li si symetrického charakteru předpisu funkce ($f(x,y) = f(y,x)$ pro všechna x, y), můžeme $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ obdržet záměnou x a y v již vypočítané derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. □

PŘÍKLAD 9.4. Pro $x > 0$ vypočtěme parciální derivace 1. řádu funkce

$$f(x,y) = x^y.$$



(A) (B)

OBRÁZEK 9.1

Řešení. Dle proměnné x je to funkce mocninná, a tudíž bude

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^y) = yx^{y-1}.$$

Podle y pak derivujeme funkci exponenciální o základu x,

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^y) = x^y \ln x.$$

9.2. Geometrický význam parciálních derivací

Parciální derivace funkce podle jednotlivých proměnných udávají *směrnice křivek*, vznikajících v *řezu* grafu funkce rovinami rovnoběžnými s příslušnými osami. Toto znamená, že v jakémkoliv bodě (x_0, y_0), kde má funkce f parciální derivace, hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ (resp. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$) udává směrnici tečny ke grafu křivky $z = f(x, y_0)$ (resp. $z = f(x_0, y)$).

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ udává rychlost změny funkce f v bodě (x_0, y_0) v kladném směru osy x. Analogicky pro $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Geometrické znázornění je na obrázku 9.1.

9.3. Diferencovatelnost a totální diferenciál

Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v okolí nějakého bodu (x, y) spojité parciální derivace 1. řádu. Analogicky případu funkce jedné proměnné, jejíž diferenciál $\mathrm{d}f$ udává přírůstek hodnoty funkce, způsobeny nekonečné malou změnou argumentu, je přirozené zavést diferenciál funkce dvou proměnných.

INTUITIVNÍ „DEFINICE“ 9.5. *Totálním diferenciálem* funkce f je výraz

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

jenž vyjadřuje přírůstek hodnoty f, odpovídající nekonečné malým přírůstkům argumentů $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$.

Chceme-li popsat tento pojem přesněji, lze říci, že diferenciál $\mathrm{d}f(x,y)$ v bodě (x,y) je tzv. „bilineární forma“ dvou proměnných h a k:

$$\mathrm{d}f(x,y)[h,k] = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot k, \tag{2}$$

to jest výraz, obsahující proměnné h a k a lineární podle každé z nich. Toto však ještě neurčuje jasně to, kdy a jakým způsobem $\mathrm{d}f$ popisuje změnu f. Pro precizní zavedení pojmu diferenciálu musíme hovořit o *diferencovatelnosti* funkce dvou proměnných.

DEFINICE 9.6. Říkáme, že je funkce f v bodě (x_0,y_0) *diferencovatelná*, jestliže existují konstanty A a B takové, že platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{3}$$

Lineární funkce $(h,k)\mapsto Ah+Bk$ se nazývá *diferenciálem*[1] funkce f v bodě (x_0,y_0) a značí se $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$: $\mathrm{d}f(x_0,y_0)(h,k) = Ah+Bk$.

Hovoříme-li o diferencovatelnosti funkce f v bodě (x_0,y_0), jedná se, v podstatě, o existenci diferenciálu $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$, což znamená, že její přírůstek v okolí bodu (x_0,y_0) lze vyjádřit ve tvaru

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) = Ah+Bk+\alpha(h,k), \tag{4}$$

kde $\alpha(h,k)$ je výraz vyššího řádu malosti, než je velikost vektoru (h,k):

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\alpha(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Ukáže se, že pro diferencovatelnou funkci výraz $Ah+Bk$ je právě (2), to jest (2) je diferenciálem f ve smyslu definice 9.6.

VĚTA 9.7. Je-li f diferencovatelná v bodě (x_0,y_0), pak má v tomto bodě parciální derivace a v (3) je $A = f'_x(x_0,y_0)$, $B = f'_y(x_0,y_0)$.

Poznámka 9.8. Tvrzení, opačné větě 9.7, neplatí: z existence v daném bodě parciálních derivací neplyne diferencovatelnost funkce v tomto bodě.

VĚTA 9.9. Jsou-li parciální derivace funkce f definovány v okolí bodu (x_0,y_0) a spojité, pak má funkce f v tomto bodě diferenciál.

Diferencovatelnost funkce vyjadřuje hladkost jejího grafu v okolí daného bodu (viz dále § 9.8). Mimo jiné, diferencovatelná funkce je vždy spojitá.

VĚTA 9.10. Je-li f diferencovatelná v bodě (x_0,y_0), pak je v tomto bodě spojitá.

9.4. Využití diferenciálu pro odhad přírůstku funkce

Zanedbáme-li v (4) malý člen $\alpha(h,k)$, dostaneme vzorec

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k, \tag{5}$$

jehož lze využit pro přibližný výpočet přírůstku funkce.

PŘÍKLAD 9.11. Pomocí diferenciálu odhadněme absolutní a relativní chybu výpočtu objemu rotačního válce s poloměrem podstavy $r=5$ a výškou $H=10$, jsou-li rozměry r a H známy s chybami $\Delta r < 0.02$, $\Delta H < 0.01$.

[1]Říká se přesněji „totální“ anebo „Fréchetův“ diferenciál

Řešení. Objem rotačního válce s poloměrem podstavy r a výškou H je

$$V = \pi r^2 H. \tag{6}$$

Jsou-li r a H známy s malými chybami Δr, ΔH, dle vzorce (5) bude výsledná chyba výpočtu objemu $\Delta V = V(r+\Delta r, H+\Delta H) - V(r, H)$ přibližně rovna

$$\Delta V \approx V'_r \Delta r + V'_H \Delta H = 2\pi r H \Delta r + \pi r^2 \Delta H = \pi r(2H\Delta r + r\Delta H),$$

což v uvažovaném případě dává

$$\Delta V \approx 5\pi\,(20\Delta r + 5\Delta H) < 5\pi\left(20\cdot\frac{2}{100} + 5\cdot\frac{1}{100}\right) = \frac{225\pi}{100} = \frac{9\pi}{4} \approx 7.07.$$

Jelikož dle (6) pro dané rozměry válce je $V = 250\pi$, relativní chyba bude přibližně $\frac{\Delta V}{V} = \frac{9\pi}{4\cdot 250\pi} = 0.009$. □

PŘÍKLAD 9.12. Pomocí diferenciálu vypočtěme přibližně hodnotu $f(2.9, 3.8)$ pro funkci

$$f(x, y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Řešení. Položme $x_0 = 3$, $y_0 = 4$. Vypočtěme parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

a využijme vzorce

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx \mathrm{d}f(x_0, y_0)[x - x_0, y - y_0]$$

s $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $x = 2.9$, $y = 3.8$:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &\approx \mathrm{d}f(x_0, y_0)[x - x_0, y - y_0] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(3, 4)\cdot(-0.1) + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 4)\cdot(-0.2). \end{aligned}$$

Po vykonání výpočtů dostaneme $f(3, 4) = 3 + 4 - \sqrt{3^2 + 4^2} = 2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3, 4) = 1 - \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 - \frac{3}{5} = 0.4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(3, 4) = 1 - \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 - \frac{4}{5} = 0.2.$$

Pak bude

$$\begin{aligned} f(2.9, 3.8) - f(3, 4) &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(3, 4)\cdot(-0.1) + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 4)\cdot(-0.2) \\ &= 0.4\cdot(-0.1) + 0.2(-0.2) = -0.08, \end{aligned}$$

a vyjde $f(2.9, 3.8) \approx f(3, 4) - 0.08 = 1.92$. Kontrola výsledku pomocí počítače dává: $f(2.9, 3.8) \approx 1.9198\ldots$. □

9.5. Parciální derivace složených výrazů

Platí jistá zobecnění vzorce pro derivaci složené funkce. Mějme funkci s předpisem $u = f(x, y, z)$ a uvažujme x, y, z jako funkce jiné proměnné t. Obdržíme tak funkci $u = u(t)$. Pak, existují-li příslušné derivace a jsou-li spojité, bude

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

9.6. Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů vznikají postupným výpočtem jednotlivých parciálních derivací již nalezených parciálních derivací. Parciální derivace druhého řádu jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Značíme je také f''_{xx}, f''_{xy} atd.

Věta 9.13 (Schwarzova věta). Existují-li v bodě (x_0, y_0) smíšené parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ a jsou-li v bodě (x_0, y_0) spojité, pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

9.7. Gradient

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

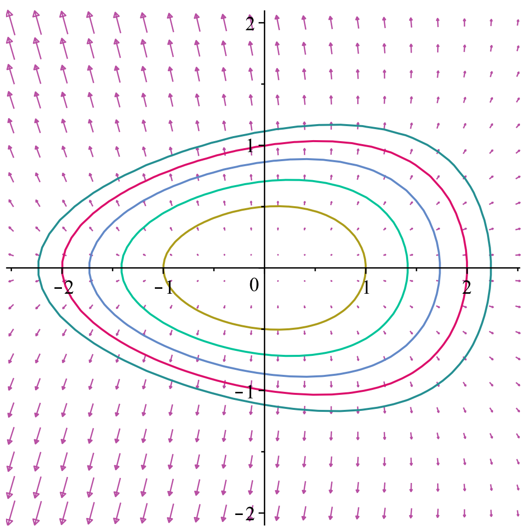
Definice 9.14. *Gradientem* funkce f se nazývá vektor

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Jinak se značí $\operatorname{grad} f = \nabla f$.

Věta 9.15. V každém bodě (x_0, y_0) ukazuje vektor $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$ směr největšího růstu funkce f a je kolmý vrstevnici.

Zakreslíme-li v každém bodě (x, y) úsečku přímky ve směru gradientu $\operatorname{grad} f(x, y)$, obdržíme tzv. pole gradientů funkce f.



Obrázek 9.2. Vrstevnice pro $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - xy^2$ a pole gradientů. Směr gradientu je vždy kolmý vrstevnici.

9.8. Tečná rovina a normála

Existence diferenciálu funkce jedné proměnné znamená existenci tečné přímky a vyjadřuje hladkost grafu funkce v okolí daného bodu. Toto lze přirozeným způsobem zobecnit pro případ funkce dvou proměnných, budeme-li mluvit o tečné rovině.

9.8.1. Tečna ke grafu funkce jedné proměnné

Připomeňme si definici diferencovatelnosti funkce jedné proměnné: funkce f je diferencovatelná v bodě x_0, jestliže existuje konstanta A taková, že platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{h} = 0, \tag{7}$$

přičemž se dokáže, že v (7) bude $A = f'(x_0)$. Platí tedy, že je

$$f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h = \alpha(h),$$

kde $\alpha(h)$ je veličinou řádu malosti vyššího, než h: $\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h} = 0$. Tento vzorec lze zapsat ve tvaru

$$f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)h+\alpha(h).$$

Výraz $f(x_0)+f'(x_0)h$ je hodnotou v bodě $x = x_0+h$ funkce $x \mapsto f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, jejíž grafem je tečna v bodě $(x_0, f(x_0))$. Diferencovatelnost funkce v x_0 tedy znamená, má funkce v bodě $(x_0, f(x_0))$ tečnu a lze ji v okolí tohoto bodu aproximovat příslušnou lineární funkcí.

Tyto úvahy umožňují formulovat jinou definici tečny ke grafu funkce, jíž jsme původně chápali jako limitní polohu sečny.

Definice 9.16. Přímka o rovnici $y = ax+c$, procházející bodem $(x_0, f(x_0))$, je tečnou přímkou ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$, jestliže platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-ax-c}{x-x_0} = 0. \tag{8}$$

Podle hořejšího vyjde[2] v (8) $a = f'(x_0)$, $c = f(x_0)-f'(x_0)x_0$, což odpovídá rovnici tečny $y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

9.8.2. Definice tečné roviny

Přirozeným zobecněním definice 9.16 zavádíme pojem tečné roviny.

Definice 9.17. Říkáme, že rovina o rovnici $z = ax+by+c$, procházející bodem $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, je *tečnou rovinou* ke grafu funkce f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, jestliže platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-ax-by-c}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0. \tag{9}$$

Věta 9.18. Tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ existuje tehdy a právě tehdy, když je f v (x_0, y_0) diferencovatelná. Rovnicí této tečné roviny je

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0), \tag{10}$$

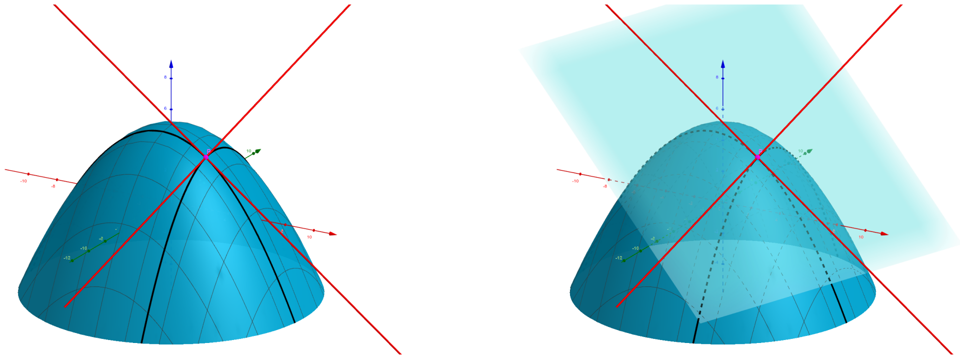
kde $z_0 = f(x_0, y_0)$.

---

[2]Vskutku, přímka $y = ax+c$ prochází bodem $(x_0, f(x_0))$, a proto $f(x_0) = ax_0+c$. Musí tedy být $c = f(x_0)-ax_0$, což znamená, že má (8) tvar

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)}{x-x_0} = 0,$$

a dostaneme $a = f'(x_0)$.



(A) (B)

OBRÁZEK 9.3

Důkaz. Z předpokladu, že rovina $y = ax + by + c$ prochází bodem $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, obdržíme $f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c$. Proto v (9) je $c = f(x_0, y_0) - ax_0 - by_0$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Tato vlastnost však znamená diferencovatelnost f v bodě (x_0, y_0), a proto $a = f'_x(x_0, y_0)$, $b = f'_y(x_0, y_0)$. Dostáváme tak rovnici (10). □

Tečná rovina ke grafu $z = f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ je určena tečnými přímkami o směrnicích $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ křivek, vznikajících v řezu plochy rovinami $x = x_0$ a $y = y_0$ (obrázek 9.3)

9.8.3. Normála

Rovnici (10) lze upravit na tvar

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (-1)(z - z_0) = 0,$$

což znamená, že vektor

$$\vec{n} = \big(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\big) \tag{11}$$

je kolmý s vektorem $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ pro každý bod (x, y, z) tečné roviny v bodě (x_0, y_0, z_0) (připomeňme si, že $z_0 = f(x_0, y_0)$). Vektor $\vec{n}$ je tudíž kolmý s tečnou rovinou v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

DEFINICE 9.19. Vektor (11) se nazývá *normálním vektorem* plochy $z = f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Přímka, protínající plochu $z = f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ve směru tohoto vektoru, se nazývá *normálou.*

Parametrické rovnice normály jsou

$$x = x_0 + tf'_x(x_0, y_0), \quad y = y_0 + tf'_y(x_0, y_0), \quad z = z_0 - t.$$

9.9. Věta o střední hodnotě

Pro funkce dvou proměnných platí obdoba Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

VĚTA 9.20. Buď f funkce dvou proměnných, definovaná na nějakém obdélníku $M = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ a mající parciální derivace v každém bodě z M. Pak pro libovolná (x_0, y_0)

a (x,y) v M platí

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\eta)(y-x_0),$$

kde ξ, η jsou jisté body takové, že ξ leží mezi x_0 a x a η leží mezi y_0 a y.

Důkaz. Stačí přírůstek $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ upravit do podoby

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x,y_0)-f(x_0,y_0)+f(x,y)-f(x,y_0)$$

a dvakrát využit Lagrangeovy věty pro funkce jedné proměnné. $\square$

9.10. Směrová derivace

Mějme nenulový vektor $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ a $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Zaveďme $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$; pak máme $\vec{r}\mapsto f(\vec{r})$.

Parciální derivace funkce f podle x udává rychlost změny její hodnoty podle proměnné x, neboli, jinak řečeno, ve směru jednotkového vektoru $\vec{\imath}$ vodorovné souřadné osy. Podobné lze říci ohledné f'_y. *Směrová* derivace udává rychlost změny hodnoty funkce ve směru nějakého jednotkového vektoru $\vec{u}$ v obecné poloze.

Definice 9.21. Derivace funkce f ve směru $\vec{u}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{u}}(\vec{r})=\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{r}+t\vec{u})-f(\vec{r})}{t}.$$

Jinak by se dalo zapsat $\frac{\partial f}{\partial\vec{u}}(\vec{r})$ jako $\varphi'(0)$, kde $\varphi(t)=f(\vec{r}+t\vec{u})$.

Věta 9.22. Má-li funkce f v bodě (x,y) derivaci, pro libovolný vektor $\vec{u}$ o velikosti 1 platí

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{u}}(x,y)=(\operatorname{grad} f(x,y),\vec{u}). \tag{12}$$

Zde je $(\operatorname{grad} f,\vec{u})=\frac{\partial f}{\partial x}u_1+\frac{\partial f}{\partial y}u_2$ (skalární součin). Vzorec (12) lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{u}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha,$$

vyjádříme-li souřadnice jednotkového vektoru $\vec{u}$ přes úhel α, jenž tento vektor svírá s kladným směrem vodorovné osy. Potřebujeme-li počítat derivaci ve směru $\vec{u}$, kde je velikost $|\vec{u}|$ vektoru $\vec{u}$ odlišná od 1, použijeme normalizovaný vektor $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$.

Příklad 9.23. Pro funkci

$$f(x,y)=\operatorname{arctg}(x^2+y^2)$$

vypočtěme $\frac{\partial f}{\partial\vec{u}}$, kde je $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Řešení. Dle příkladu 9.3 je $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}$ a tudíž

$$\operatorname{grad} f=\frac{2}{1+(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Velikost vektoru $\vec{u}$ je $|\vec{u}|=\sqrt{5}$, normalizovaný směrový vektor bude $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{u}$. Pak dle věty 9.22

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{u}}=\frac{2}{\sqrt{5}(1+(x^2+y^2)^2)}(x\cdot 1+y\cdot 2)=\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{x+2y}{1+(x^2+y^2)^2}.$$