

Jméno:

Místnost:

Souřadnice:

0007

list

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Svě UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Příklad 1

4 body

Rozhodněte o existenci limity $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, jestliže

$$x_n = 3(-1)^n e^{-2n} \sin^2\left(\frac{3n+2}{n^2+3}\right).$$

V případě, že limita existuje, vypočítejte její hodnotu. V každém případě odpověď odůvodněte.

$$x_n = 3e^{-2n} \cdot (-1)^n \sin^2\left(\frac{3n+2}{n^2+3}\right) = 3e^{-2n} \cdot b_n,$$

$$\text{kde } b_n = (-1)^n \sin^2\left(\frac{3n+2}{n^2+3}\right)$$

$$\text{Platí } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3e^{-2n} = 0, \quad |b_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

[$x_n = a_n \cdot b_n$, kde $a_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$ a b_n je omezená posloupnost]

Jméno:

Místnost:

Souřadnice:

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Příklad 2

3 body

Vyšetřete konvexnost a konkávnost funkce

$$f(x) = x \operatorname{arctg} x$$

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 + 1+x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ je konvexní na } \mathbb{R}.$$

Příklad 3

3 body

Určete všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$. Popište, o jaké asymptoty se jedná.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{2x+1} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad x \rightarrow \pm\infty$$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x^2}{2x+1} - \frac{x}{2} = \frac{2x^2 - x(2x+1)}{2 \cdot (2x+1)} = -\frac{x}{2(2x+1)} = -\frac{1}{2(2 + \frac{1}{x})} \rightarrow -\frac{1}{4}, \quad x \rightarrow \pm\infty$$

Horizontální asymptota $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

Svislá asymptota $x = -\frac{1}{2}$ (prochází bodem nespojitosti, kde je přerušena definiční obor)

Jméno:

Místnost:

Souřadnice:

0007

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Příklad 4

3 body

Rozhodněte o existenci limity $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,3)} \frac{x-y+4}{x+y-2}$. V případě, že limita existuje, vypočítejte její hodnotu, v opačném případě dokažte neexistenci. Odpověď odůvodněte.

Zkusme $(x,y) \rightarrow (-1,3)$ ve směru přímek: $y-3 = k(x+1)$:

$$\frac{x-y+4}{x+y-2} = \frac{x-3-k(x+1)+4}{x+1+k(x+1)-2} = \frac{x+1-k(x+1)}{x+1+k(x+1)} = \frac{1-k}{1+k}$$

Výsledek tedy zamisli' na směrovici přímky \Rightarrow limita \nexists .

Anebo postupně limity:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\lim_{y \rightarrow 3} \frac{x-y+4}{x+y-2} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} 1 = 1$$

odlišné hodnoty

$$\lim_{y \rightarrow 3} \left(\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-y+4}{x+y-2} \right) = \lim_{y \rightarrow 3} \left(\frac{3-y}{y-3} \right) = \lim_{y \rightarrow 3} (-1) = -1$$

Přímá souřadnice: $x+1 = \rho \cos \varphi$, $y-3 = \rho \sin \varphi$,

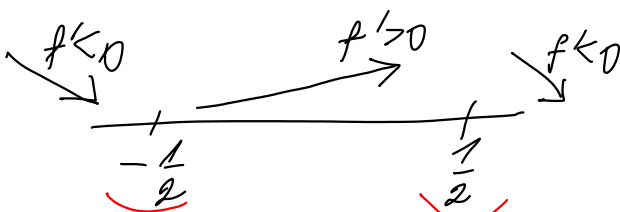
$$\frac{x-y+4}{x+y-2} = \frac{\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi - 1 - 3 + 4}{\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi - 2} = \frac{\cos \varphi - \sin \varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi} \quad \text{— podstatně závisí na hodnotě } \varphi.$$

Příklad 5

3 body

Určete intervaly růstu a poklesu a lokální extrémů funkce $f(x) = x e^{-2x^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-2x^2} + x e^{-2x^2} (-4x) = e^{-2x^2} (1-4x^2) = -4e^{-2x^2} \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = \\ &= -4e^{-2x^2} \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$



lok. min.

lok. max.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{e}}$$

(lichá funkce)

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{-2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

Jméno:

Místnost:

Souřadnice:

0007

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Příklad 6

4 body

Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = 3x^2 + xy + 2y^2 - x - 4y.$$

$$f'_x = 6x + y - 1, \quad f'_y = x + 4y - 4$$

$$\text{Stac. body: } \begin{cases} 6x + y = 1 \\ x + 4y = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} y = 1 - 6x \\ x + 4 - 24x = 4 \end{matrix} \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Stac. bodem } x(0; 1)$$

$$y = 1 - 0 = 1.$$

$$f''_{xx} = 6, \quad f''_{yy} = 4, \quad f''_{xy} = 1 = f''_{yx}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{v tomto př. vychází konst.})$$

$$\det H_f = 24 - 1 = 23 > 0, \quad f_{xx}(0; 1) = 6 > 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow v bodě $(0; 1)$ je lok. minimum

o hodnotě

$$f(0, 1) = 2 - 4 = -2.$$