Jméno: **Místnost:** **Souřadnice:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
4 body

Jsou dány tři posloupnosti čísel a_n, b_n, c_n, kde $n = 1, 2, \dots$ a

$$a_n = n^2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n+1}\right), \quad b_n = n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n+\sqrt{n}}\right) \quad c_n = \sqrt{n} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right).$$

Uveďte, které z těchto posloupností mají konečnou limitu v $+\infty$. Hodnotu limity určete, odpověď zdůvodněte.

$\operatorname{tg} x \sim x$ pro $x \to 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

$$a_n = n^2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n+1}\right) = n^2 \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n+1}\right)}{\frac{1}{2n+1}}}_{\to 1,\ n\to\infty} \cdot \frac{1}{2n+1} = \underbrace{\frac{n^2}{2n+1}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n+1}\right)}{\frac{1}{2n+1}}}_{\to 1} \quad \ominus$$

$$b_n = n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n+\sqrt{n}}\right) = n\, \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n+\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{2n+\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{2n+\sqrt{n}} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n+\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{2n+\sqrt{n}}} \cdot \frac{n}{2n+\sqrt{n}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n+\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{2n+\sqrt{n}}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}}_{\to \frac{1}{2}} \to \frac{1}{2} \quad \oplus$$

$$c_n = \sqrt{n} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n+\sqrt{n}}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n+\sqrt{n}}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}_{\to 0} \quad \oplus$$

Odpověď:

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$, první posl. má nevl. limitu $+\infty$.

Jméno: **Místnost:** **Souřadnice:**

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

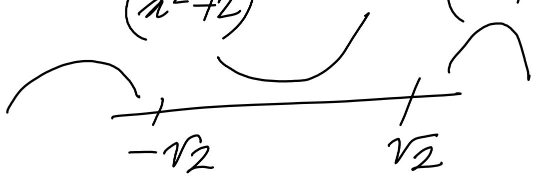
Příklad 2
3 body

Vyšetřete konvexnost a konkávnost funkce

$$f(x) = x + 2\ln(x^2 + 2)$$

$$f'(x) = 1 + 2\cdot\frac{2x}{x^2+2} = 1 + \frac{4x}{x^2+2}$$

$$f''(x) = 4\cdot\frac{x^2+2-x\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = 4\cdot\frac{2-x^2}{(x^2+2)^2} = -4\,\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$$



Konvexní: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Konkávní: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$. Inflexní body $\pm\sqrt{2}$.

Příklad 3
3 body

Určete všechny asymptoty funkce $f(x) = x + 2\operatorname{arctg} x$. Popište, o jaké asymptoty se jedná.

$\frac{f(x)}{x} = 1 + 2\,\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \to 1$, $x \to \pm\infty$, neboť $|\operatorname{arctg} x| \le \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{f(x)}{x} - x = 2\operatorname{arctg} x$ $\to \pi$, $x \to +\infty$; $\to -\pi$, $x \to -\infty$, neboť $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$

Šikmé asymptoty jsou:

$y = x + \pi$ pro $x \to +\infty$

$y = x - \pi$ pro $x \to -\infty$

Svislé nejsou (fce je spojitá na $(-\infty, \infty)$).

Jméno: **Místnost:** **Souřadnice:**

0007 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 4
3 body

$\frac{0}{0}$

Rozhodněte o existenci limity $\lim_{(x,y)\to(2,\frac{1}{2})} \frac{1-xy}{\sin(xy-1)}$. V případe, že limita existuje, vypočtěte její hodnotu, v opačném případe dokažte neexistenci. Odpověď odůvodněte.

$$f(x,y) = \frac{1-xy}{\sin(xy-1)} = g(u), \quad \text{kde} \quad g(u) = \frac{1-u}{\sin(u-1)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,\frac{1}{2})} \frac{1-xy}{\sin(xy-1)} = \lim_{u\to 1} \frac{1-u}{\sin(u-1)} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{\sin t} = -1.$$

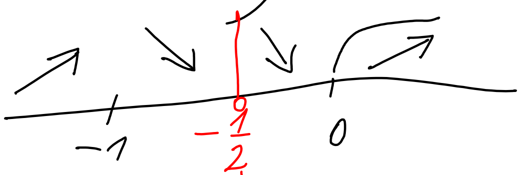
$[(x,y) \to (2,\frac{1}{2}) \Rightarrow xy \to 1]$ Hodnota limity je tedy -1.

Příklad 5
3 body

Určete intervaly růstu a poklesu a lokální extrémy funkce $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$.

$$f'(x) = \frac{2x(2x+1) - x^2\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2+2x-2x^2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x}{(2x+1)^2}$$

$$= 2\cdot\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}$$



Lok. max. v -1 o hodnotě $f(-1) = \frac{1}{1-2} = -1$

Lok. min. v 0 o hodnotě $f(0) = 0$.

Oblast strojově snímatelných informací, nezasahujte. ***Řešení pište jen na tuto stranu.***

Jméno: **Místnost:** **Souřadnice:**

0007 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 6
4 body

Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = y^2 + 2xy - 4x - 2y - 3.$$

$f'_x = 2y - 4$, $f'_y = 2y + 2x - 2$

Stacion. body: $2y - 4 = 0$, $2y + 2x - 2$

$y = 2$ $4 + 2x = 2$, $x = -1$

St. bod $(-1; 2)$ – jediný.

$f''_{xx} = 0$, $f''_{yy} = 2$, $f''_{xy} = 2 = f''_{yx}$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\det H_f(x,y) = -4 < 0$

Lokální extrémy funkce nemá.