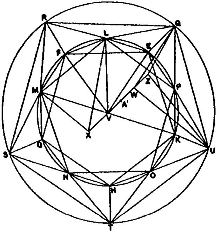
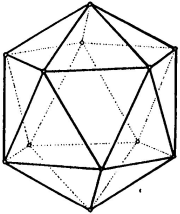
Konstrukční geometrie





Poslední aktualizace: 7. března 2024, Vojtěch Žádník

https://is.muni.cz/el/1441/jaro2024/MA0007/

Cíle

- připomenout, zorganizovat a rozšířit stávající poznatky
- něco udělat, udělané vysvětlit, . . .

Proces

- zapamatovat a zopakovat
- pochopit a použít
- rozlišovat a vysvětlovat
- přetvářet a vytvářet

Kulisy

- geometrie

Přehled celkový

- jaro 2024: konstrukční geometrie („syntetická“) — pravítko, kružítko, trpělivost
- podzim 2024 a jaro 2025: počítací geometrie („analytická“) — soustavy rovnic, matice, determinanty

Přehled aktuální

- klasická konstrukční geometrie: Základy, dotykové úlohy
- geometrická zobrazení: shodná, podobná, afinní, projektivní a pár dalších
- poznámky k zobrazování prostoru do roviny

Materiály

- IS: osnova, přednáška, odkazy, staré písemky[1]

Zakončení

- úlohy → písemka → ústní zkouška

Soutěž

- o nejpovedenější konstrukci/výkres/aplikaci použitelnou ve výuce

[1] https://is.muni.cz/auth/el/ped/jaro2024/MA0007/index.qwarp

Základy

= základy eukleidovské geometrie
= geometrie Eukleidových Základů,[2] ovšem s Hilbertovými upřesněními.[3]

Základní pojmy:

- $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$

Základní vztahy/relace:

- *incidence, uspořádání, rovnoběžnost, shodnost, spojitost*

Základní definice:

- *např. úhel, pravý úhel, resp. kolmost přímek, trojúhelník, čtverec, kružnice, rovnoběžnost přímek, . . .*

Základní tvrzení (axiómy/postuláty):

- *několik ke každému ze základních vztahů. . .*

---

[2] kolem −300, http://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovy_Z%C3%A1klady
[3] kolem +1900, http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms

Eukleidovy geometrické axiómy (postuláty)

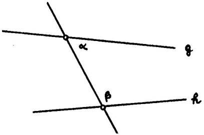
(I) *Každé dva různé body spojuje* $\boxed{\quad}$.

(II) *Každou přímku lze na každé straně libovolně* $\boxed{\quad}$.

(III) *Lze vytvořit* $\boxed{\quad}$ *s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.*

(IV) *Všechny pravé úhly jsou* $\boxed{\quad}$.

(V) $\boxed{\quad}$ *přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé,* $\boxed{\quad}$ *tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*[4]



$\alpha + \beta < 2R$ $\boxed{\quad}$ *g a h se protínají*

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_postulate

Eukleidovy všeobecné axiómy

- *Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.*
- *Když se přidají rovné veličiny k rovným, i celky jsou rovny.*
- apod.

Dnes čteme jako:

- $k = l$ a $m = l \boxed{\quad\quad} k = m$.
- $k = l$ a $m = n \boxed{\quad\quad} k + m = l + n$.
- apod.[5]

[5] https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/cn.html

Eukleidovy nevyslovené axiómy (Hilbertovo upřesnění)

Některé věci nejsou v Eukleidově systému explicitně formulovány...

Typický axióm **uspořádání** je např.:

- *Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je zbylými dvěma.*

Axiómy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiómem.

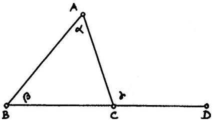
- *Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému) Dedekindovy řezy typu „skok" a „mezera".*

... jde zejména o upřesnění představy eukleidovské přímky jakožto „reálné" přímky![6]

[6]viz konstrukci tělesa reálných čísel (algebra) a problém sestrojitelných veličin (s. 28).

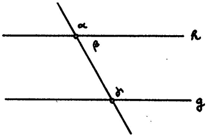
Co na postulátu (V) nezávisí

- Věty SUS, SSS, USU, nerovnosti v trojúhelníku apod.
- Věta o vnějším úhlu trojúhelníku.[7]



$$\gamma \boxed{} \alpha \text{ a } \gamma \boxed{} \beta$$

- *Shodné střídavé úhly implikují rovnoběžnost přímek*[8] (odtud $\boxed{\phantom{\text{existence}}}$ rovnoběžky).

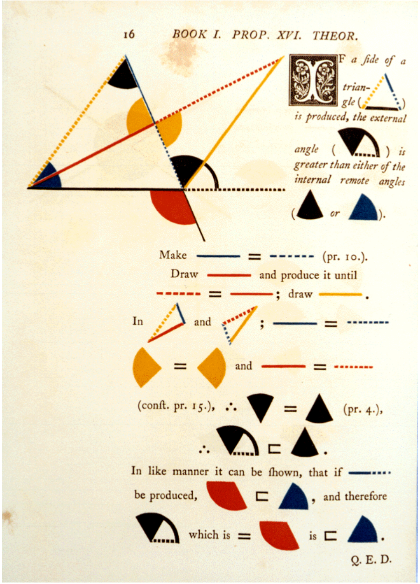


$$\alpha = \gamma \boxed{} h \parallel g$$

[7] Zde jsou poprvé potřeba axiómy uspořádání (viz s. 10).

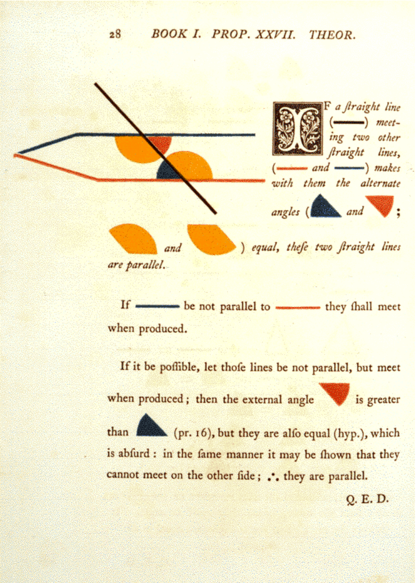
[8] Nepřímo pomocí věty o vnějším úhlu trojúhelníku (viz s. 11).

Detail k větě o vnějším úhlu v trojúhelníku[9]



[9] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-16.html

Detail k větě o existenci rovnoběžky[10]



28 BOOK I. PROP. XXVII. THEOR.

If a ſtraight line ( ) meeting two other ſtraight lines, (and) makes with them the alternate angles (and ; and) equal, theſe two ſtraight lines are parallel.

If be not parallel to they ſhall meet when produced.

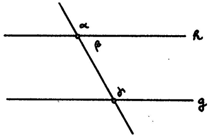
If it be poſſible, let thoſe lines be not parallel, but meet when produced; then the external angle is greater than (pr. 16), but they are alſo equal (hyp.), which is abſurd: in the ſame manner it may be ſhown that they cannot meet on the other ſide; ∴ they are parallel.

Q. E. D.

[10] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-28.html

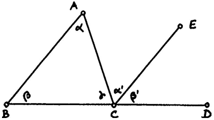
Co na postulátu (V) závisí

- Věta o střídavých úhlech[11] (odtud $\boxed{\qquad\qquad}$ rovnoběžky).



$$h \parallel g \; \boxed{\quad} \; \alpha = \gamma$$

- Věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku.[12]



$$\alpha + \beta + \gamma = \boxed{\quad}$$

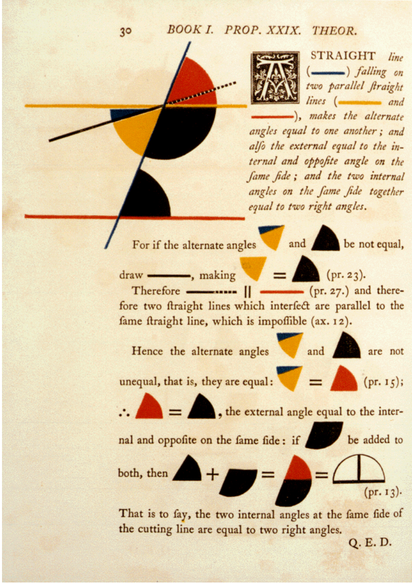
- Věty o rovnoběžnících a trojúhelnících a jejich obsazích.[13]
- Pythagorova věta (a téměř vše co následuje)...

[11] Nepřímo: $\alpha \neq \gamma \implies \alpha + \beta \neq \gamma + \beta \implies 2R \neq \gamma + \beta$; odtud podle (V) plyne, že se přímky h, g protínají, tedy nejsou rovnoběžné (viz s. 13).

[12] Přímo pomocí věty o střídavých úhlech (viz s. 14).

[13] Podrobněji od s. 16...

Detail k větě o střídavých úhlech[14]



30 *BOOK I. PROP. XXIX. THEOR.*

STRAIGHT line ( ) falling on two parallel ſtraight lines (and), makes the alternate angles equal to one another; and alſo the external equal to the internal and oppoſite angle on the ſame ſide; and the two internal angles on the ſame ſide together equal to two right angles.

For if the alternate angles and be not equal, draw , making = (pr. 23).

Therefore || (pr. 27.) and therefore two ſtraight lines which interſect are parallel to the ſame ſtraight line, which is impoſſible (ax. 12).

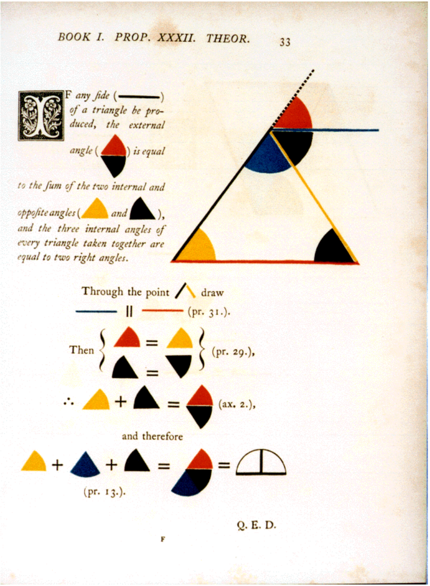
Hence the alternate angles and are not unequal, that is, they are equal: = (pr. 15); ∴ = , the external angle equal to the internal and oppoſite on the ſame ſide: if be added to both, then + = = (pr. 13).

That is to ſay, the two internal angles at the ſame ſide of the cutting line are equal to two right angles.

Q. E. D.

[14] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-30.html

Detail k větě o součtu úhlů v trojúhelníku[15]



BOOK I. PROP. XXXII. THEOR. 33

IF any ſide ( ) of a triangle be produced, the external angle ( ) is equal to the ſum of the two internal and oppoſite angles (and), and the three internal angles of every triangle taken together are equal to two right angles.

Through the point draw

|| (pr. 31.).

Then { = , = } (pr. 29.),

∴ + = (ax. 2.),

and therefore

+ + = =

(pr. 13.).

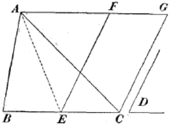
Q. E. D.

F

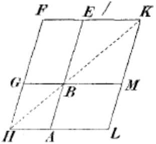
[15] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-32.html

Základní tvrzení o rovnostech obsahů[16]

- *Rovnoběžníky, resp. trojúhelníky se stejnými základnami a stejnými výškami mají* ______ .
- *Trojúhelník ABC a rovnoběžník ECGF mají* ______ (kde $E =$ střed BC a $BC \parallel AF$):



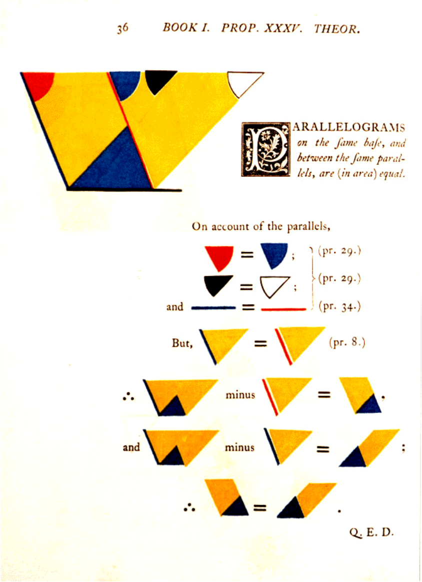
- *Rovnoběžníky BEFG a BALM mají* ______ (kde společný bod $B \in$ úhlopříčce HK):



- Eukleidova věta o odvěsně/výšce, resp. věta ______ . . .

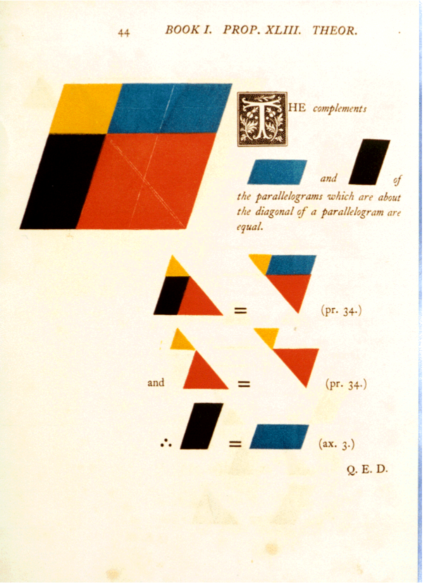
[16] Ve všech důkazech vystačíme s větou o střídavých úhlech a shodnými trojúhelníky (viz s. 17, 18).

Detail k větě o obsazích rovnoběžníků[17]



[17] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-36.html

Detail k větě o složených rovnoběžnících[18]

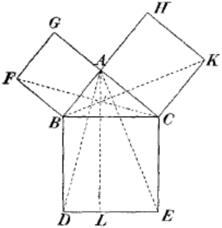


[18] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-44.html

Věta

Trojúhelník BAC je pravoúhlý a P je pata výšky z vrcholu A.

Potom platí $\boxed{}$ *a* $\boxed{}$, *tudíž* $\boxed{}$.

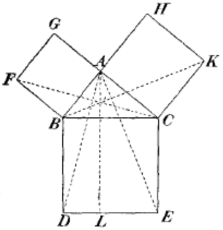


[19] https://www.geogebra.org/m/apubVUSe

Eukleidova věta o odvěsně, resp. Pythagorova věta

Věta

Trojúhelník BAC je pravoúhlý a P je pata výšky z vrcholu A.
Potom platí $\boxed{}$ *a* $\boxed{}$*, tudíž* $\boxed{}$.



Důkaz.

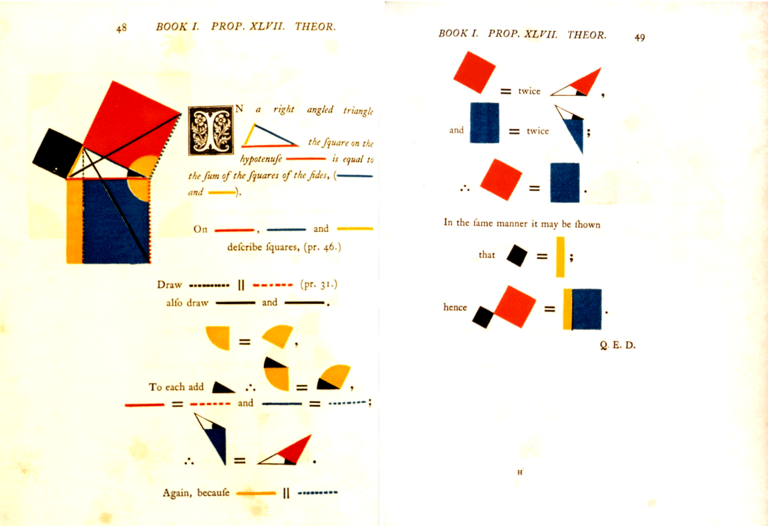
- $FBAG$ je čtverec a úhel BAC je pravý $\Longrightarrow$ body G, A, C leží na $\boxed{}$, a ta je $\boxed{}$.
- Odtud podle zákl. věty o obsazích, shodnosti trojúh. $\boxed{}$ a $\boxed{}$ a znovu podle zákl. věty o obsazích:

$$\text{obsah } \boxed{} = \text{obsah } \boxed{} = \text{obsah } \boxed{} = \text{obsah } \boxed{}.$$

Proto má čtverec $FBAG$ stejný obsah jako obdélník $PBDL$.
Obdobně to funguje na druhé straně...[19] □

[19] https://www.geogebra.org/m/apubVUSe

Detail k Eukleidově větě o odvěsně[20]



[20] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-47.html

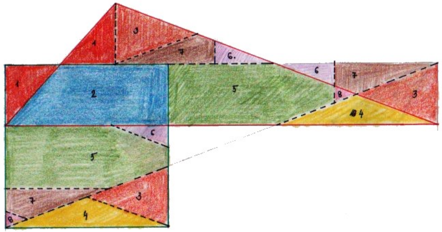
Kvadratura mnohoúhelníku

Kombinací předchozích poznatků zjišťujeme, že libovolný mnohoúhelník lze geometricky *kvadraturovat* = sestrojit čtverec se stejným obsahem.[21]

Navíc každou dílčí konstrukci lze doplnit názorným rozstříháním...

Věta (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova)

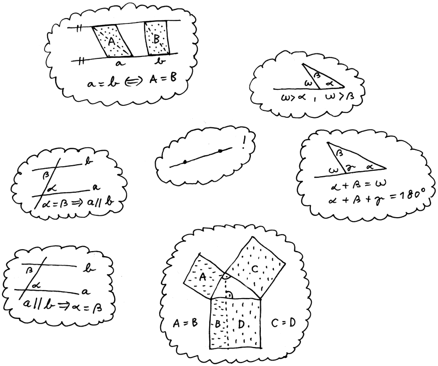
Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah $\boxed{\quad\quad}$ *jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.*



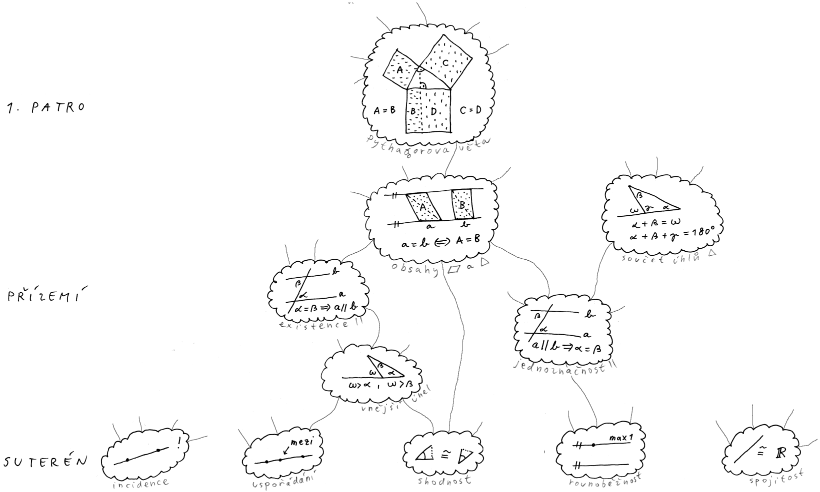
Kvadratura obecného trojúhelníku se stříháním

[21] `http://ggbtu.be/mkripDpYd`

Mezishrnutí — takto $\boxed{}$!

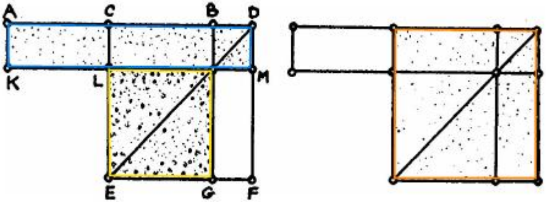


Mezishrnutí — takto $\boxed{}$! (pokračování na s. 51)



Geometrická algebra

... geometrické konstrukce vs. algebraická vyjádření...



Obrázek 4.11: $\boxed{\text{A}}$ II.6: *Pokud je C střed úsečky AB a D je libovolný bod na téže přímce vpravo od B, potom platí* $\boxed{AD \cdot BD} + \boxed{CB^2} = \boxed{CD^2}$.

Poznámky

Při značení $|AB| =: b$ a $|DB| =: x$ lze předchozí tvrzení psát jako

$$(b+x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2 \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2 .$$

Uvedené úpravy známe jako tzv. $\boxed{}$.

Tyto úpravy jsou prvním krokem k vyjádření kořenů obecné kvadratické rovnice (s. 30).

Míříme k charakterizaci sestrojitelných veličin (s. 28)...

Zlatý řez

Definice

Bod H dělí úsečku AB ve *zlatém řezu*, pokud poměr celé úsečky k delší části řezu je stejný jako poměr delší části ke kratší, tzn. pokud

$$BA : AH = AH : HB, \quad \text{nebo} \quad AB : BH = BH : HA.$$

Konstrukce (Eukleidova)

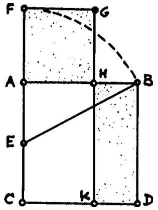
(i) AC je kolmice k AB, přičemž $AC = AB$,

(ii) $E =$ střed AC,

(iii) F leží na polopřímce CA tak, že $EF = EB$,

(iv) H leží na úsečce AB tak, že $AH = AF$

$\Longrightarrow$ AH je delší částí zlatého řezu úsečky AB.



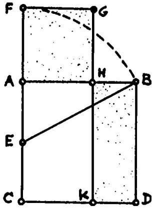
Důkaz a něco navíc

Zdůvodnění konstrukce plyne z předchozího (s. 25) a z Pythagorovy věty (s. 19):

$$CF \cdot FA + AE^2 = \boxed{} = \boxed{} \quad \text{neboli} \quad CF \cdot FA = AB^2.$$

Tzn. obdélník *CFGK* a čtverec *ABDC* mají stejný obsah.
Tyto však mají společnou část *CKHA*, takže
taky čtverec *AHGF* a obdélník *KDHB* mají stejný obsah.
To můžeme zapsat jako

$$\boxed{} \quad \text{neboli} \quad AH : BH = AB : AH. \qquad \square$$



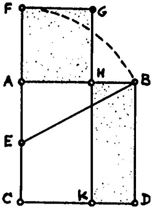
Důkaz a něco navíc

Zdůvodnění konstrukce plyne z předchozího (s. 25) a z Pythagorovy věty (s. 19):

$$CF \cdot FA + AE^2 = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad} \quad \text{neboli} \quad CF \cdot FA = AB^2.$$

Tzn. obdélník *CFGK* a čtverec *ABDC* mají stejný obsah.
Tyto však mají společnou část *CKHA*, takže
taky čtverec *AHGF* a obdélník *KDHB* mají stejný obsah.
To můžeme zapsat jako

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad} \quad \text{neboli} \quad AH : BH = AB : AH. \qquad \square$$



Počítání

Při označení $|AB| =: b$ a $|AH| =: x$ definice zlatého řezu zní:

$$b : x = x : (b - x) \quad \text{neboli} \quad b(b - x) = x^2 \quad \text{neboli} \quad \boxed{\qquad\qquad\qquad}.$$

Postupně sestrojené veličiny jsou:

$$|AE| = |EC| = \boxed{\quad}, \quad |EB| = \boxed{\qquad}, \quad |AF| = |AH| = x = \boxed{\qquad\qquad}.$$

Skutečně, $x = \boxed{\qquad\qquad}$ je kořenem kvadratické rovnice $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ ...

Sestrojitelné veličiny

Reálné veličiny — reprezentované úsečkami — umíme:

- **sčítat** a **odčítat** — pomocí přikládání a odebírání úseček na přímce,
- **násobit** a **dělit** — pomocí stejnoplochých rovnoběžníků, resp. podobných trojúhelníků,
- **druhou odmocninu** — pomocí Eukleidovy věty o odvěsně, resp. o výšce.

Reálné veličiny — reprezentované úsečkami — umíme:

- **sčítat** a **odčítat** — pomocí přikládání a odebírání úseček na přímce,
- **násobit** a **dělit** — pomocí stejnoplochých rovnoběžníků, resp. podobných trojúhelníků,
- **druhou odmocninu** — pomocí Eukleidovy věty o odvěsně, resp. o výšce.

Věta

Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem $\boxed{}$ *jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu*

$$\mathbf{1} \quad + \quad - \quad \cdot \quad : \quad \sqrt{\ } \quad (\quad)$$

Sestrojitelné veličiny

Věta

Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem $\Longleftrightarrow$ jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu

$$\mathbf{1} \quad + \quad - \quad \cdot \quad : \quad \sqrt{} \quad (\quad)$$

Důkaz.

Začneme s úsečkou představující jednotku.

Další sestrojitelné veličiny vznikají konstrukcemi v rovině, a to <u>výhradně</u> jako

(a) průnik dvou přímek $\rightsquigarrow$ soustava $\boxed{\qquad\qquad}$ rovnic,

(b) průnik přímky s kružnicí $\rightsquigarrow$ soustava $\boxed{\qquad}$ a $\boxed{\qquad\qquad}$ rovnice,

(c) průnik dvou kružnic $\rightsquigarrow$ soustava $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ rovnic.

Eliminací jedné proměnné dostaneme $\boxed{\qquad\qquad}$, nebo $\boxed{\qquad\qquad}$ rovnici; vyřešíme, dosadíme, ...

Kořen(y) lib. $\boxed{\qquad}$ a $\boxed{\qquad\qquad}$ rovnice umíme vyjádřit z jejích koeficientů pomocí <u>právě</u> uvedených operací! $\square$

Poznámka (viz s. 25)

Algebraické vyjádření kořenů kvadratické rovnice $x^2 + bx + c = 0$ se dělá takto:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \quad \text{neboli} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,$$

což po odmocnění a úpravě vede k dobře známému vzorečku

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad \text{neboli} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

(a) zdvojení krychle $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt[3]{2}a$,
(b) rozvinutí kružnice $\rightsquigarrow$ $x = 2\pi r$,
(c) kvadratura kruhu $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt{\pi}r$,
(d) roztřetění úhlu $\rightsquigarrow$ $x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$,
(e) pravidelné mnohoúhelníky $\rightsquigarrow$ ...... (s. 54)

Problémy (b) a (c) jsou ekvivalentní; problémy (d) a (e) spolu úzce souvisí.

Díky J.H. Lambertovi, resp. F. Lindemannovi víme, že π není racionální, resp. algebraické číslo.[22]

Z předchozího (a trochu následujícího) víme, že

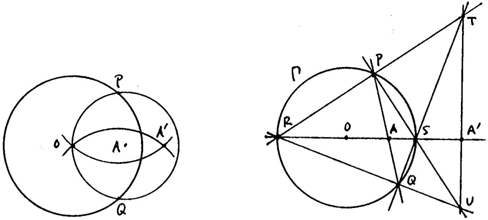
- problémy (a), (b) a (c) $\boxed{}$ řešitelné,
- problémy (d) a (e) $\boxed{}$ řešitelné.

[22] r. 1767, resp. 1882

Eukleidovské konstrukce = konstrukce s kružítkem a pravítkem.

Mascheroniovské konstrukce = konstrukce pouze s kružítkem.

Steinerovské konstrukce = konstrukce pouze s pravítkem a jednou kružnicí.



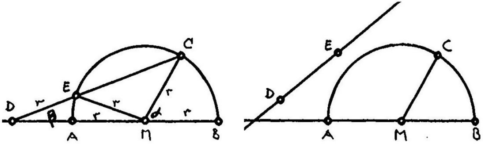
Příklad: Mascheroniovská a steinerovská konstrukce inverzního bodu A' k bodu A vzhledem ke kružnici se středem O.

Věta

Konstrukce je proveditelná eukleidovsky $\boxed{}$ *je proveditelná mascheroniovsky* $\boxed{}$ *je proveditelná steinerovsky.*

Konstrukce *neusis*

Konstrukce *neusis* = konstrukce s kružítkem a pravítkem se značkami (které se přikládají k přímkám, resp. kružnicím)



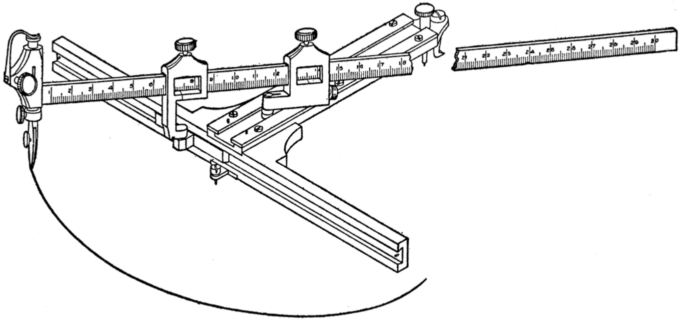
Příklad: Archimédova trisekce úhlu s označeným pravítkem.

Poznámka

Takto lze sestrojit (reálné) kořeny libovolné $\boxed{}$ rovnice, tedy vyřešit problémy (a), (d) a některé další (e) na s. 31...[23]

[23] http://en.wikipedia.org/wiki/Neusis_construction

Užitek



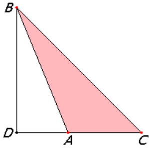
Konstrukce elipsy pomocí *neusis* udělátka.

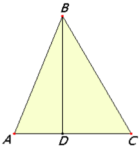
Kosinová věta

Jako důsledek (a zobecnění) $\boxed{\qquad\qquad}$ (s. 19) představujeme:

Věta

V obecném trojúhelníku ABC, kde D = pata výšky z vrcholu B, platí:





$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + \boxed{\qquad}, \qquad BC^2 = BA^2 + AC^2 - \boxed{\qquad}.$$

Důkaz.

Plyne z $\boxed{\qquad\qquad}$ (zde pro trojúh. BDC a BDA) a pár úprav:

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + (DA + AC)^2 =$$

$$= (BD^2 + DA^2) + AC^2 + \boxed{\qquad} = BA^2 + AC^2 + \boxed{\qquad}. \qquad \square$$

Poznámka

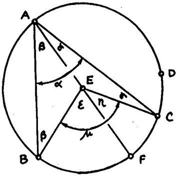
Při obvyklém značení $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a $\alpha = |\angle BAC|$ můžeme obě části předchozí věty psát současně jako

$$a^2 = b^2 + c^2 - \boxed{\qquad}.$$

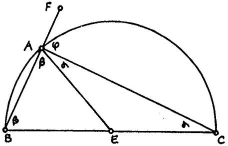
O kružnicích

Jako důsledky věty $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ (s. 12) uvádíme:[24]

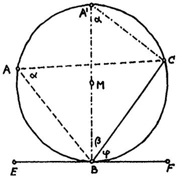
- větu o středovém a obvodovém úhlu,
- spec. případ — Thaletovu větu,
- větu o úsekovém úhlu,
- apod.



$\mu = \boxed{\qquad\qquad}$



$\alpha + \beta = \boxed{\quad}$



$\varphi = \boxed{\;}$

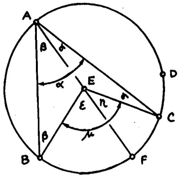
[24] https://ggbm.at/MtseAe67

O středovém a obvodovém úhlu

Pro kružnici se středem *E* a úseč *BC* je úhel *BEC* *středový* (ozn. μ) a úhel *BAC* *obvodový* (ozn. α):

Věta

Středový úhel k dané úseči je dvakrát větší než lib. úhel obvodový ($\mu = 2\alpha$).
Proto jsou obvodové úhly k téže úseči ***všechny stejné****.*



Důkaz.

- Trojúhelník *ABE* je rovnoramenný $\implies$ úhly u základny jsou $\boxed{}$.
- Věta o součtu úhlů v trojúhelníku *ABE* $\implies$ vnější úhel $\boxed{}$.

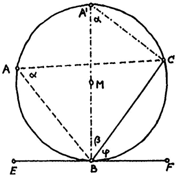
Ze stejných důvodů platí také $\boxed{}$, odkud plyne $\mu = 2\alpha$.
(Podobně se zdůvodní i ostatní varianty. . .) □

O úsekovém úhlu

Pro kružnici, úseč *BC* a tečnu *BF* je úhel *CBF* *úsekový* (ozn. φ):

Věta

Úsekový úhel k dané úseči je stejný jako úhel obvodový ($\alpha = \varphi$).



Důkaz.

- Věta o obvodovém úhlu $\Longrightarrow$ úhel *BAC* je $\boxed{}$.
- Vezměme A' tak, aby $A'B$ byl průměrem kružnice ($\angle A'BC$ ozn. β).
  Věta o tečně $\Longrightarrow$ $\boxed{}$.
- Thaletova věta $\Longrightarrow$ úhel u *C* je $\boxed{}$.
  Věta o součtu úhlů v trojúhelníku $A'BC$ $\Longrightarrow$ $\boxed{}$.

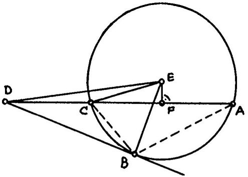
Celkem tedy $\alpha = \varphi$. □

O mocnosti

Sečna jdoucí bodem D protíná kružnici v bodech C a A:

Věta

*Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin $DC \cdot DA$ je* $\boxed{}$.



$$DC \cdot DA = \boxed{}$$

Důkaz 1 (pro D vně kružnice).

Lze zdůvodnit několikerým užitím $\boxed{}$ (pro trojúhelníky DBE, DFE, CFE)[25] a pár úpravami:

$$\boxed{} = DE^2 - EB^2 = DE^2 - EC^2 = (DF^2 + FE^2) - (EF^2 + FC^2) =$$
$$= DF^2 - FC^2 = (DF + FC) \cdot (DF - FC) = DA \cdot DC.$$

□

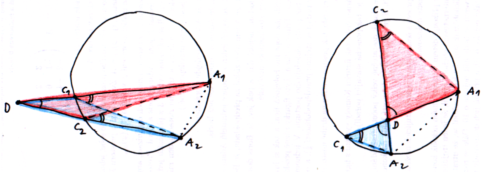
[25] kde E = střed kružnice a F = pata kolmice na AC

O mocnosti

Sečna jdoucí bodem D protíná kružnici v bodech C a A:

Věta

*Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin $DC \cdot DA$ je* $\boxed{}$.



$$DC_1 \cdot DA_1 = \boxed{}$$

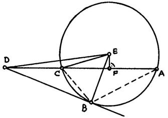
Důkaz 2 (univerzální).

Alternativně pomocí $\boxed{}$ trojúhelníků:

- Věta o obvodových úhlech $\implies$ vyznačené úhly u vrcholů C_i $\boxed{}$.
- Navíc úhly u vrcholu D jsou stejné $\implies$ trojúhelníky C_1DA_2 a C_2DA_1 jsou $\boxed{}$.
- Tedy $\boxed{}$, což je ekviv. $DC_1 \cdot DA_1 = \boxed{}$. □

O mocnosti

Pro bod D vně kružnice (a B bod dotyku tečny) platí



$$DC \cdot DA = DB^2 = DE^2 - EB^2.$$

Definice

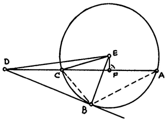
Mocnost bodu D ke kružnici se středem E a poloměrem r je reálné číslo

$$m := DE^2 - r^2.$$

[26] Vyplývá z definice a Pythagorovy věty...

O mocnosti

Pro bod D vně kružnice (a B bod dotyku tečny) platí



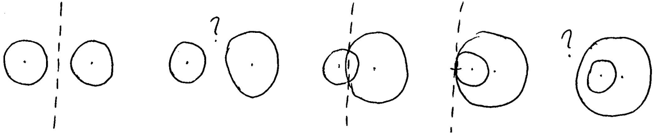
$$DC \cdot DA = DB^2 = DE^2 - EB^2.$$

Definice

Mocnost bodu D ke kružnici se středem E a poloměrem r je reálné číslo

$$m := DE^2 - r^2.$$

Chordála je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím.

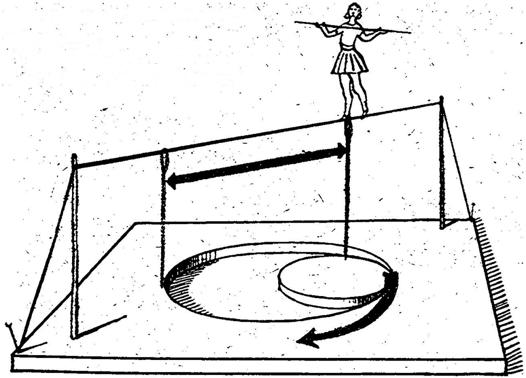


Věta

Chordála dvou nesoustředných kružnic je $\boxed{}$*, která je* $\boxed{}$ *na spojnici jejich středů.*[26]

[26] Vyplývá z definice a Pythagorovy věty...

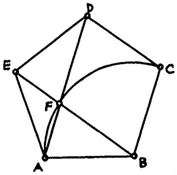
Užitek

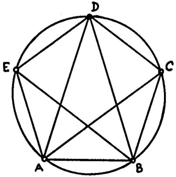


Kotoulením kružnice uvnitř kružnice s [ ] poloměrem se převádí pohyb otáčivý na přímočarý.

Pravidelný pětiúhelník

Pravidelný = všechny strany a všechny úhly navzájem shodné.





Postřehy

(1) Souměrnost podle osy jdoucí $E \implies AD \boxed{\quad} BC$ a $BE \boxed{\quad} CD \implies BCDF$ je $\boxed{\qquad\qquad}$.

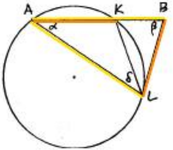
(2) Obvodové úhly *BAC*, *CAD*, *DAE* atd. jsou všechny shodné $\implies$ trojúhelník *ABD* je $\boxed{\qquad\qquad}$ a úhly u základny jsou $\boxed{\qquad\qquad}$ úhlu u vrcholu *D*, tzv. zlatý trojúhelník.

(3) Trojúhelníky *ADE* a *EAF* jsou oba $\boxed{\qquad\qquad}$ a mají společný úhel u vrcholu $A \implies$ jsou $\boxed{\qquad}$.

Zlatý trojúhelník

Věta

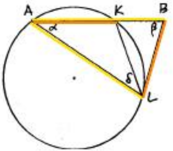
V rovnoramenném trojúhelníku platí:
poměr ramene a základny je ***zlatý*** $\boxed{}$ *trojúhelník je* ***zlatý****.*



Zlatý trojúhelník

Věta

V rovnoramenném trojúhelníku platí:
poměr ramene a základny je ***zlatý*** $\boxed{}$ *trojúhelník je* ***zlatý****.*



Důkaz.

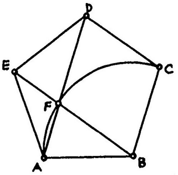
Poměr stran je určen poměrem úhlů a naopak. Stačí předp. AK = delší část zlatého řezu AB, $AL = AB$, $BL = AK$ a ukázat $\beta = 2\alpha$:

- K = zlatý řez a $AK = BL \implies AB : BL = BL : BK$ neboli $\boxed{}$.
- Toto je $\boxed{} \implies BL$ = tečna.
- Úsekový $\angle BLK$ $\boxed{}$ obvodový $\angle LAK \implies \angle ALB = \boxed{}$.
- $\triangle ABL$ je $\boxed{} \implies \underline{\beta = \alpha + \delta}$.
- $\angle LKB$ je vnějším úhlem v $\triangle AKL \implies \angle LKB = \boxed{}$.
- Odtud plyne, že $\triangle BLK$ je $\boxed{} \implies KL = BL = AK$.
- Proto také trojúhelník AKL je $\boxed{} \implies \underline{\alpha = \delta}$.

Celkem tedy $\beta = \alpha + \delta = 2\alpha$. □

Zlatý řez přímo

Zlatý řez lze v pravidelném 5-úhelníku objevit rovnou:



Věta

*Úhlopříčky pravidelného 5-úhelníku se protínají v poměrech **zlatého řezu**. . .* [27]

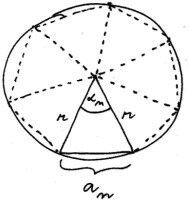
Důkaz.

- Trojúhelníky ADE a EAF jsou rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu A $\implies$ jsou $\boxed{}$.
- Odpovídající si strany jsou úměrné $\implies$ $AD : DE = EA : AF$.
- Současně však platí $\boxed{}$, tedy

$$AD : DF = DF : FA. \qquad \square$$

[27] . . . jejichž delší části jsou shodné se stranami 5-úhelníku.

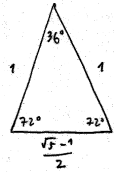
Výpočet a něco navíc



Středový úhel v pravidelném n-úhelníku je $\alpha_n = 360^\circ/n$.

Velikost strany pravidelného n-úhelníku veps.
do kružnice s poloměrem r je (podle   )

$$a_n = r\sqrt{2 - 2\cos\alpha_n}.$$



Pro $n = 10$ je $\alpha_{10} = 36^\circ$, pro $n = 5$ je $\alpha_5 = 72^\circ$.

Ale to jsou právě úhly ve   !

Odtud

$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

a (podle   ) $\cos 72^\circ = \frac{a_{10}}{2r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Po dosazení dostáváme

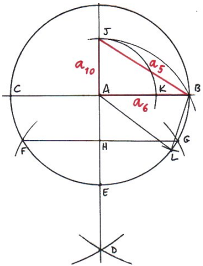
$$a_5 = r\sqrt{2 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \cdots = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Zkratka a něco navíc

Na obr. je konstrukce zlatého řezu úsečky AB a zlatý trojúhelník ABL:

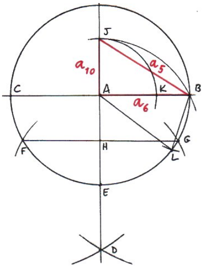
Věta

Strana pravidelného 5-úhelníku vepsaného do kružnice je přeponou ***pravoúhlého trojúhelníku****, jehož odvěsnami jsou strany pravidelného 6-úhelníku, resp. 10-úhelníku vepsaného do téže kružnice.*



Zkratka a něco navíc

Na obr. je konstrukce zlatého řezu úsečky AB a zlatý trojúhelník ABL:



Věta

*Strana pravidelného 5-úhelníku vepsaného do kružnice je přeponou **pravoúhlého trojúhelníku**, jehož odvěsnami jsou strany pravidelného 6-úhelníku, resp. 10-úhelníku vepsaného do téže kružnice.*

Důkaz.

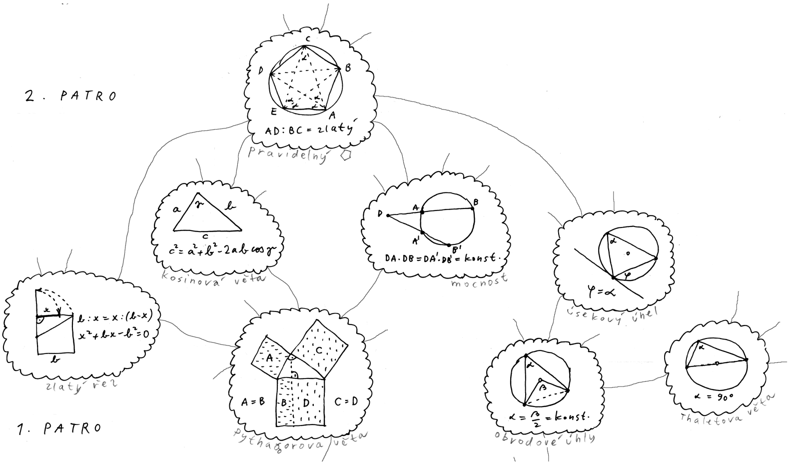
Z předchozího víme, že

$$a_6 = r, \qquad a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1), \qquad a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Podle $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$ v trojúhelníku ABJ platí

$$|BJ| = r\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2} = \cdots = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = a_5. \quad \square$$

Mezishrnutí (navazuje na s. 23, pokračování na s. 71)



Další pravidelné mnohoúhelníky

Pravidelný n-úhelník umíme sestrojit pro $n = \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6$.

Půlením úhlů lze sestrojit také např. pro $n = 8, 10, 12, 16, 20, \ldots$

Kombinací předchozího lze sestrojit také např. pro $n = \mathbf{15}, \ldots$

[28] Pozor: n.s.n. nelze obecně nahradit součinem (viz např. $3 \cdot 3 = 9$)!

Další pravidelné mnohoúhelníky

Pravidelný n-úhelník umíme sestrojit pro $n = \mathbf{3}, 4, \mathbf{5}, 6$.

Půlením úhlů lze sestrojit také např. pro $n = 8, 10, 12, 16, 20, \ldots$

Kombinací předchozího lze sestrojit také např. pro $n = \mathbf{15}, \ldots$

Věta

*Pokud lze sestrojit pravidelný **k**-úhelník a **l**-úhelník, potom lze sestrojit také pravidelný **n**-úhelník, kde $\boldsymbol{n} = \boxed{}$ **k** a **l**.*[28]

Důkaz.

Bez újmy můžeme předp. $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ nesoudělné.
Kombinacemi odp. středových úhlů umíme:

$$\left(\frac{a}{\boldsymbol{k}} + \frac{b}{\boldsymbol{l}}\right) \cdot 360^\circ = \frac{a\boldsymbol{l} + b\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{l}} \cdot 360^\circ.$$

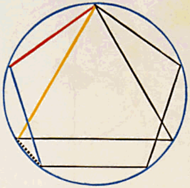
$\boxed{}$: $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ nesoudělné $\Longrightarrow a\boldsymbol{l} + b\boldsymbol{k} = \boxed{}$, pro nějaká celá čísla $a, b, \ldots$

$\ldots$, tedy umíme středový úhel $\boxed{}$-úhelníku.

□

[28] Pozor: n.s.n. nelze obecně nahradit součinem (viz např. $3 \cdot 3 = 9$)!

Detail pro $k = 3$ a $l = 5$ [29]



TO inſcribe an equilateral and equiangular quindecagon in a given circle.

Let and be the ſides of an equilateral pentagon inſcribed in the given circle, and the ſide of an inscribed equilateral triangle.

The arc ſubtended by and $= \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ of the whole circumference.

The arc ſubtended by $= \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ of the whole circumference.

Their difference $= \frac{1}{15}$

∴ the arc ſubtended by $= \frac{1}{15}$ difference of the whole circumference.

Hence if ſtraight lines equal to be placed in the circle (B. 4. pr. 1), an equilateral and equiangular quindecagon will be thus inſcribed in the circle.

Q. E. D.

---

29 http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book4/images/bookIV-prop16.html

Další sestrojitelné mnohoúhelníky

Z předchozího tušíme, že $\boxed{}$ pravidelný mnohoúhelník je sestrojitelný:

Věta (Gaussova–Wantzelova)

Pravidelný n-úhelník lze sestrojit eukleidovským pravítkem a kružítkem $\iff$ *n je součinem libovolné mocniny* 2 *a navzájem různých Fermatových prvočísel.*

Fermatovo prvočíslo je prvočíslo tvaru $F_k = 2^{2^k} + 1$.

K dnešnímu dni[30] je známo pouze pět Fermatových prvočísel:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537.$$

Tedy:

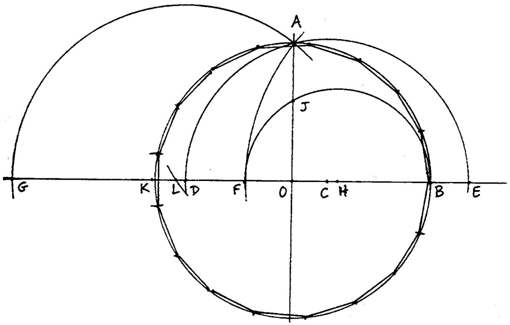
lze	**3**	4	**5**	6		8		10		12			15	16	**17**			20		
nelze					7		9		11		13	14				18	19		21	22

[30] 7. března 2024, viz https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number

Délku strany pravidelného 17-úhelníku vepsaného do kružnice s poloměrem r lze vyjádřit jako

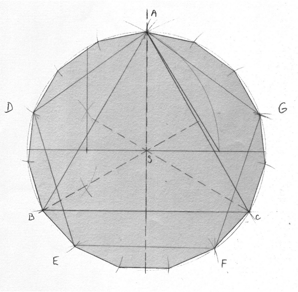
$$a_{17} = \frac{r}{4}\sqrt{34 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}.$$

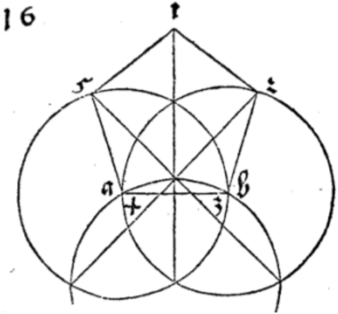
Gaussova konstrukce pravidelného 17-úhelníku vypadá takto[31]



[31] 30. března 1796, viz https://en.wikipedia.org/wiki/Heptadecagon

Užitek





Konečně umíme rozeznat přesné konstrukce od přibližných. . .

Úměrnosti

Teorie podobnosti (kniha VI) je založena na pojmu úměrnosti, tedy rovnosti poměrů veličin (kniha V):

Definice

Veličiny a, b jsou *ve stejném poměru* jako veličiny c, d,

$$a : b = c : d,$$

pokud pro každá čísla m, n platí

$$na \,\Box\, mb \iff nc \,\Box\, md.$$

Poznámky pro moderního čtenáře

Veličiny a, b, c, d jsou reálná čísla, čísla m, n jsou čísla celá.
Předchozí definici můžeme vyslovit taky takto:[32]
Reálná čísla r $(= \frac{a}{b})$ a s $(= \frac{c}{d})$ jsou si rovna, pokud pro každé racionální číslo q $(= \frac{m}{n})$ platí

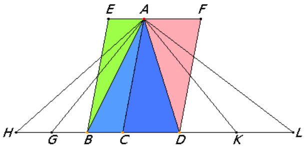
$$r \,\Box\, q \iff s \,\Box\, q.$$

[32] Tady by se nám měla vybavovat konstrukce reálných čísel z racionálních pomocí tzv. Dedekindových řezů...

Základní tvrzení o poměrech obsahů

Věta

Poměr obsahů trojúhelníků (resp. rovnoběžníků) se stejnou výškou je poměr délek jejich základen.



obsah ACB : obsah ACD $CB : CD$

Důkaz.

Plyne přímo ze základní věty trojúhelníků (s. 17) a z definice (s. 58)... $\square$

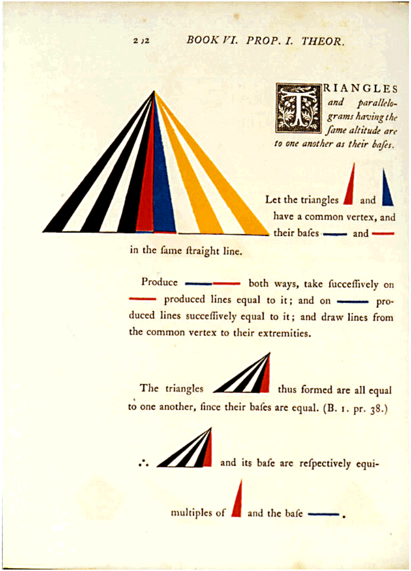
Poznámka

Odtud máme vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníku:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot v,$$

kde S = obsah trojúhelníku, a = velikost strany, v = velikost výšky na stranu a.

Detail k větě o poměrech obsahů[33]



212 BOOK VI. PROP. I. THEOR.

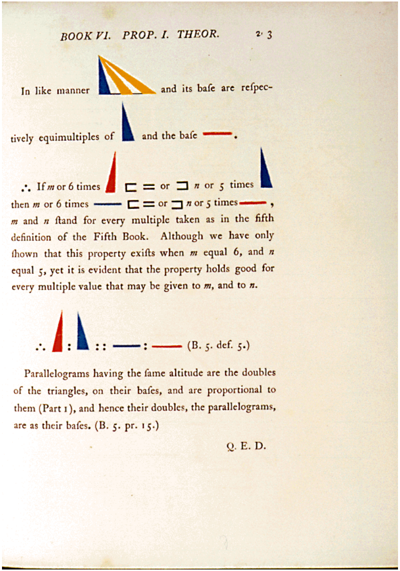
TRIANGLES and parallelograms having the ſame altitude are to one another as their baſes.

Let the triangles and have a common vertex, and their baſes —— and —— in the ſame ſtraight line.

Produce —— both ways, take ſucceſſively on —— produced lines equal to it; and on —— produced lines ſucceſſively equal to it; and draw lines from the common vertex to their extremities.

The triangles thus formed are all equal to one another, ſince their baſes are equal. (B. 1. pr. 38.)

∴ and its baſe are reſpectively equimultiples of and the baſe ——.



BOOK VI. PROP. I. THEOR. 213

In like manner and its baſe are reſpectively equimultiples of and the baſe ——.

∴ If *m* or 6 times ⊏ = or ⊐ *n* or 5 times then *m* or 6 times —— ⊏ = or ⊐ *n* or 5 times ——, *m* and *n* ſtand for every multiple taken as in the fifth definition of the Fifth Book. Although we have only ſhown that this property exiſts when *m* equal 6, and *n* equal 5, yet it is evident that the property holds good for every multiple value that may be given to *m*, and to *n*.

∴ : :: —— : —— (B. 5. def. 5.)

Parallelograms having the ſame altitude are the doubles of the triangles, on their baſes, and are proportional to them (Part 1), and hence their doubles, the parallelograms, are as their baſes. (B. 5. pr. 15.)

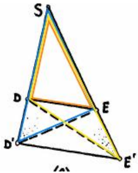
Q. E. D.

33 http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book6/images/bookVI-prop1.html

Základní tvrzení o poměrech ramen

Věta

Přímka je $\boxed{}$ *s jednou stranou trojúhelníku* $\iff$ *protíná zbylé dvě strany* $\boxed{}$.



$$SD' : SD \,\square\, SE' : SE \iff D'E' \,\square\, DE$$

Důkaz.

Podle předchozí věty víme, že

$$SD' : SD \,\square\, \text{obsah } SD'E : \text{obsah } SDE,$$
$$SE' : SE \,\square\, \text{obsah } SE'D : \text{obsah } SED.$$

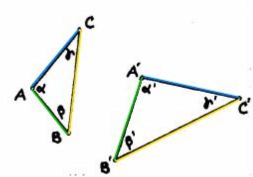
Jmenovatelé na pravé straně jsou $\boxed{}$ a trojúhelníky $SD'E$ a $SE'D$ mají společný $\boxed{}$. Tedy (s. 17):

$$SD' : SD \,\square\, SE' : SE \iff \text{obsah } DD'E \,\square\, \text{obsah } EE'D \iff D'E' \,\square\, DE.$$

Podobné trojúhelníky

Definice

Trojúhelníky (obecněji, mnohoúhelníky) jsou *podobné*, pokud mají po dvou <u>shodné</u> vnitřní úhly a strany u shodných úhlů mají <u>úměrné</u>.



Tedy: trojúhelníky jsou podobné, pokud (při obvyklém značení)

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma',$$
$$b : c = b' : c', \quad c : a = c' : a', \quad a : b = a' : b'.$$

Druhou sadu rovností obvykle přepisujeme takto

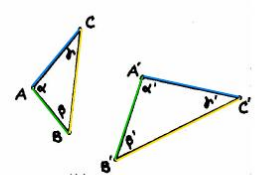
$$a' : a = b' : b = c' : c = \boxed{}.$$

Ekvivalence v definici podobnosti

Vlastnosti v definici podobných trojúhelníků (s. 62) jsou $\boxed{}$:

Věta

Trojúhelníky mají po dvou shodné vnitřní úhly $\iff$ strany u shodných úhlů jsou úměrné.



$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma' \iff b : c = b' : c', c : a = c' : a', a : b = a' : b'.$$

Důkaz.

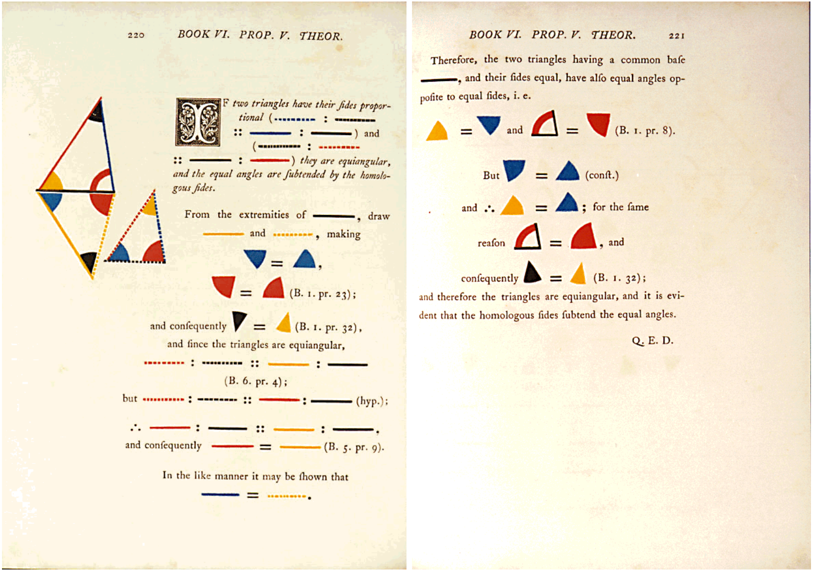
Implikace $\boxed{}$ je důsledkem předchozí věty (s. 61)...

Pro implikaci $\boxed{}$ uvažme pomocný trojúhelník *ABD*, který má shodné vnitřní úhly s trojúhelníkem $A'B'C'$:

- strany u shodných úhlů jsou $\boxed{}$ a současně trojúhelníky *ABD* a *ABC* mají společnou stranu,
- tedy trojúhelníky *ABD* a *ABC* jsou $\boxed{}$......

□

Detail k implikaci „$\Longleftarrow$“[34]



220 BOOK VI. PROP. V. THEOR.

If two triangles have their ſides proportional (:) :: (:) and (:) :: (:) they are equiangular, and the equal angles are ſubtended by the homologous ſides.

From the extremities of , draw and , making = , = (B. 1. pr. 23);

and conſequently = (B. 1. pr. 32),

and ſince the triangles are equiangular,

: :: : (B. 6. pr. 4);

but : :: : (hyp.);

∴ : :: : ,

and conſequently = (B. 5. pr. 9).

In the like manner it may be ſhown that = .

BOOK VI. PROP. V. THEOR. 221

Therefore, the two triangles having a common baſe , and their ſides equal, have alſo equal angles oppoſite to equal ſides, i. e.

= and = (B. 1. pr. 8).

But = (conſt.)

and ∴ = ; for the ſame reaſon = , and

conſequently = (B. 1. 32);

and therefore the triangles are equiangular, and it is evident that the homologous ſides ſubtend the equal angles.

Q. E. D.

---

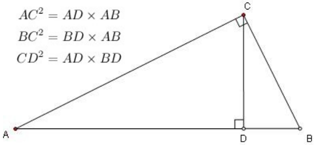
[34] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book6/images/bookVI-prop5.html

Poznámky

Implikaci „$\Longrightarrow$“ v předchozí větě se přezdívá věta UU.

Mnoho předchozích úvah lze nahradit úspornějším argumentem s podobnými trojúhelníky, viz např.:

- Věta o mocnosti bodu ke kružnicí (s. 42).
- Věta o zlatém řezu v pravidelném pětiúhelníku (s. 48).
- Eukleidova věta o odvěsně/výšce (s. 19):



Důkaz.

Trojúhelníky ADC a ACB mají po dvou shodné vnitřní úhly $\Longrightarrow$ jsou podobné

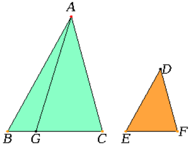
$\Longrightarrow$ $AC : AD = AB : AC$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\qquad\qquad}$.

Ostatní vztahy lze zdůvodnit podobně. . . □

O obsazích podobných útvarů

Věta

Poměr obsahů podobných trojúhelníků (mnohoúhelníků) je stejný jako poměr $\boxed{}$ *odpovídajících stran.*



Je-li koeficient podobnosti $= k$, potom poměr obsahů $\boxed{}$.

Poznámky k důkazu

Snadné pro $k \in \mathbb{Z}$, resp. $k \in \boxed{}$.

Problematické pro $k \in \boxed{}$ — možné přístupy:

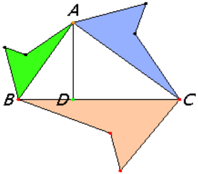
- limitní přechod,
- vzoreček,
- "elementární" trik.[35]

[35] https://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book6/images/bookVI-prop19.html

Věta

Pokud jsou mnohoúhelníky nad stranami pravoúhlého trojúhelníku $\boxed{}$ *,*

potom obsah mnohoúhelníku nad přeponou je $\boxed{}$ *obsahů těch nad odvěsnami.*



Důkaz.

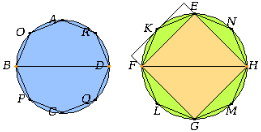
Plyne z předchozího tvrzení (s. 66) a z Pythagorovy věty (s. 19)... □

O obsazích kruhů

U křivočarých útvarů se $\boxed{\quad\quad}$ úvahám nevyhneme…[36]

Věta

Poměr obsahů kruhů je stejný jako poměr $\boxed{\quad\quad}$ *jejich průměrů.*



Idea důkazu.

Každý kruh lze $\boxed{\quad\quad}$ aproximovat mnohoúhelníky.

Každé dva kruhy jsou $\boxed{\quad\quad}$ a pokud jsou aproximovány analogicky, jsou odpovídající mnohoúhelníky taky $\boxed{\quad\quad}$.

Poměrům obsahů takových mnohoúhelníků rozumíme (s. 66)… □

Poznámka

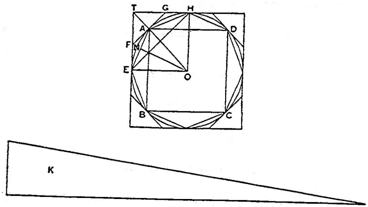
Při obvyklém značení můžeme předchozí tvrzení psát jako

$$S_1 : S_2 = r_1^2 : r_2^2 \quad \text{neboli} \quad S_1 : r_1^2 = S_2 : r_2^2 = \boxed{\quad\quad}$$

[36] …v klasickém pojetí pomocí tzv. Eudoxovy metody.

Věta (Archimédova)

Obsah kruhu $\boxed{}$ *pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je shodná s poloměrem, druhá s obvodem kruhu.*



Poznámky

Jinými slovy: $S = \frac{1}{2} r \cdot o$, kde $r =$ poloměr kružnice a $o =$ její obvod.
To spolu s rovností na s. 68 dává

$$S = \frac{1}{2} r \cdot o = \boxed{} \cdot r^2.$$

Tzn. stejná konstanta vystupuje ve vyjádření jak obsahu, tak obvodu!
Při tradičním značení:

$$S = \boxed{} \cdot r^2 \quad \text{a} \quad o = 2\boxed{} \cdot r.$$

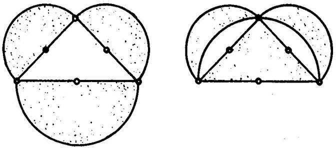
[37] https://en.wikipedia.org/wiki/Area_of_a_circle#Archimedes's_proof

Poznámky ke kvadratuře

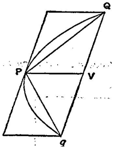
Libovolný mnohoúhelník kvadraturovat (s. 21), kruh (s. 31).

Některé křivočaré útvary však kvadraturovat :

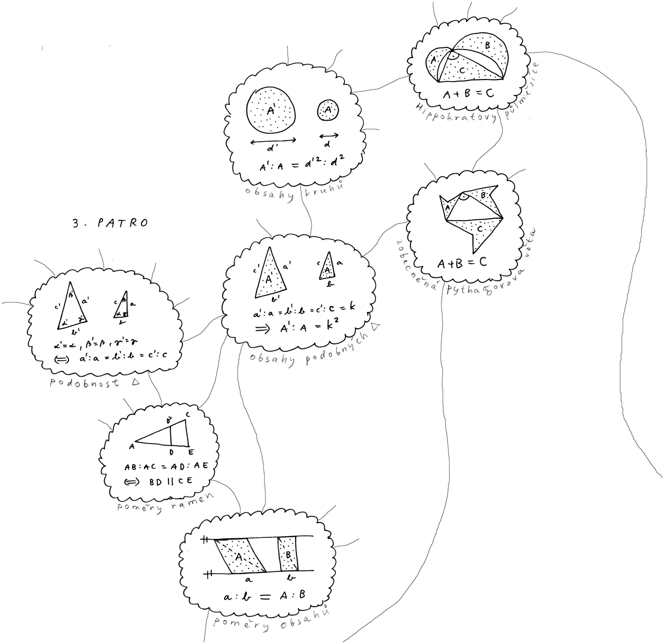
- Hippokratés: *Vyznačené půlměsíce nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku mají jako tento trojúhelník.*



- Archimédés: *Obsah parabolické úseče je trojúhelníku PQq (což jsou opsaného rovnoběžníku).*



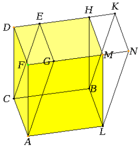
Mezishrnutí (navazuje na s. 51, pokračování na s. 77)

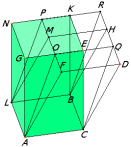


O objemech rovnoběžnostěnů (a hranolů)

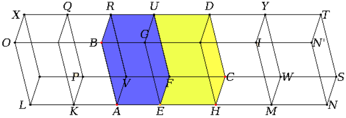
K tvrzením o rovnoběžnících (s. 16, s. 59, s. 66) máme tyto 3D **analogie**:

- Rovnoběžnostěny se stejnými základnami a stejnými výškami mají .





- Poměr objemů rovnoběžnostěnů se stejnou výškou je poměr obsahů jejich základen.

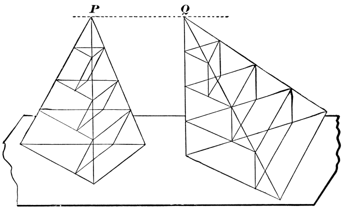


- Poměr objemů podobných rovnoběžnostěnů je stejný jako poměr odpovídajících stran.

K tvrzením o trojúhelnících uvádíme na ukázku jednu 3D analogii s naprosto **neanalogickým** důkazem:

Věta

Poměr objemů jehlanů se stejnou výškou je $\boxed{}$ *poměr obsahů jejich základen.*



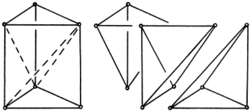
Idea důkazu.

Každý jehlan lze $\boxed{}$ konečným počtem hranolů.
Např. můžeme v obou jehlanech použít hranoly se stejnými výškami.
Poměrům objemů takových hranolů rozumíme (s. 73)… □

Poznámky

Limitní verze předchozí úvahy je známá jako tzv. *Cavalieriho princip*.[38]

Z uvedeného např. vyvozujeme, že objem trojbokého jehlanu je roven $\boxed{\quad\quad}$ objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou:



Teprve odtud máme vzorečky

$$V = \boxed{\phantom{\frac{1}{3}}}\, S \cdot v,$$

kde $V =$ objem jehlanu, $S =$ obsah podstavy a $v =$ velikost odpovídající výšky.

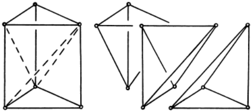
[38] http://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s_principle

[39] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_third_problem

Poznámky

Limitní verze předchozí úvahy je známá jako tzv. *Cavalieriho princip*.[38]

Z uvedeného např. vyvozujeme, že objem trojbokého jehlanu je roven $\boxed{\quad\quad}$ objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou:



Teprve odtud máme vzorečky

$$V = \boxed{\quad} S \cdot v,$$

kde V = objem jehlanu, S = obsah podstavy a v = velikost odpovídající výšky.

Pozor

Ani v případě jehlanů se stejnými základnami a stejnými výškami (tedy se stejnými objemy) $\boxed{\quad\quad}$ úvahy v předchozím důkazu nahradit stříháním a přeskupováním částí jako u rovnoběžnostěnů, resp. hranolů![39]

Tzn. 3D analogie Wallaceovy–Bolyaiovy–Gerwienovy věty (s. 21) obecně $\boxed{\quad\quad}$.

[38] http://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s_principle

[39] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_third_problem

O válcích, kuželích, koulích

S podobnými úvahami jako na s. 74 (s odkazy na předchozí poznatky o rovnoběžnostěnech a hranolech) se zdůvodní, že

- *Poměr objemů válců se stejnou výškou je* *poměr obsahů jejich podstav,*
- *poměr objemů koulí je stejný jako poměr* *jejich průměrů,*
- *objem kužele je roven* *objemu jemu opsaného válce,*
- apod.

[40] viz např. opět https://cs.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%C5%AFv_princip

O válcích, kuželích, koulích

S podobnými úvahami jako na s. 74 (s odkazy na předchozí poznatky o rovnoběžnostěnech a hranolech) se zdůvodní, že

- *Poměr objemů válců se stejnou výškou je* $\boxed{\quad}$ *poměr obsahů jejich podstav,*
- *poměr objemů koulí je stejný jako poměr* $\boxed{\quad}$ *jejich průměrů,*
- *objem kužele je roven* $\boxed{\quad}$ *objemu jemu opsaného válce,*
- apod.

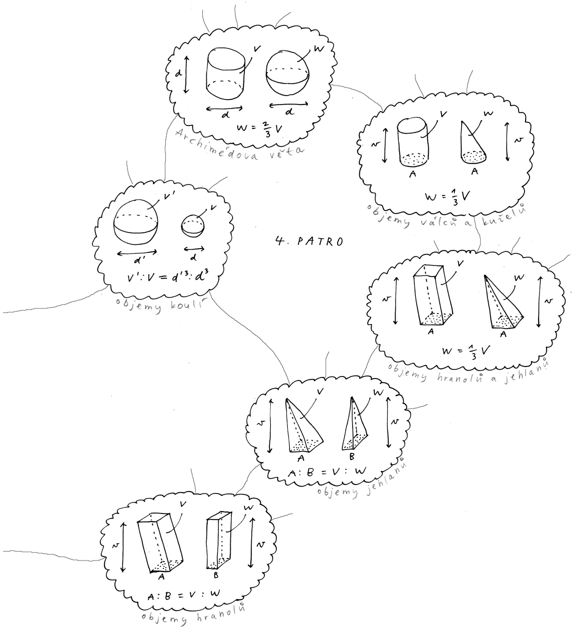
Tyto poznatky doplňuje pozoruhodná

Věta (Archimédova)

Objem koule je roven $\boxed{\quad}$ *objemu jemu opsaného válce.*[40]

[40] viz např. opět https://cs.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%C5%AFv_princip

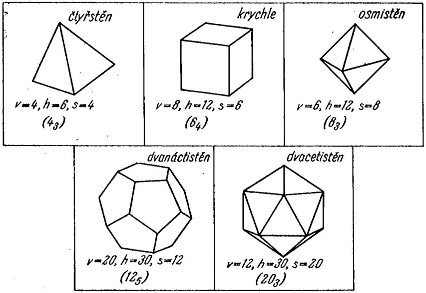
Mezishrnutí (navazuje na s. 71, pokračování na s. 86)



= *pravidelné konvexní mnohostěny*
= konvexní mnohostěny, které mají stejný počet stěn kolem každého vrcholu a jejichž stěny jsou navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky[41]

Věta

Platónských těles je právě pět druhů:

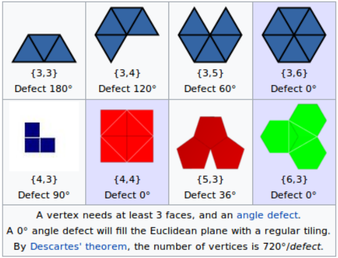


[41] $\Longrightarrow$ mají všechny stěnové úhly shodné, lze je vepsat do koule atd.

http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

Důkaz

(1) Platónských těles $\boxed{}$ pět druhů:
součet úhlů kolem každého vrcholu musí být ostře menší než plný úhel:



(2) Platónských těles $\boxed{}$ pět druhů:
pro každou z pěti možností je třeba „složit“ odpovídající těleso:

- čtyřstěn $\{3, 3\}$, krychle $\{4, 3\}$, osmistěn $\{3, 4\}$ jsou snadné,
- pro rozbor dvacetistěnu $\{3, 5\}$ a dvanáctistěnu $\{5, 3\}$ budeme potřebovat větu o pravidelném 5-, 6- a 10-úhelníku vepsaném do téže kružnice (s. 50)...

Pravidelný dvacetistěn poprvé

Bubínek:

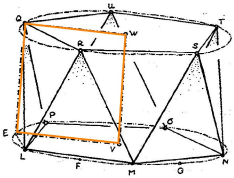
$QL = QR =$ strana vepsaného $\boxed{}$-úhelníku,

$LE =$ strana vepsaného $\boxed{}$-úhelníku,

$LEQ = \boxed{}$ trojúhelník.

Proto podle s. 50:

- *$EQ =$ strana vepsaného 6-úhelníku $=$ poloměr kružnice.*



$EQ = VE$, tedy $EVWQ$ je čtverec.

Pravidelný dvacetistěn podruhé

Čepičky:

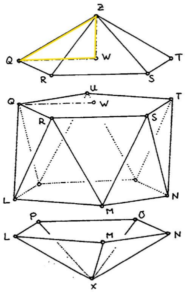
$QWZ = \boxed{}$ trojúhelník,

$QZ = QR =$ strana vepsaného $\boxed{}$-úhelníku,

$QW =$ strana vepsaného $\boxed{}$-úhelníku.

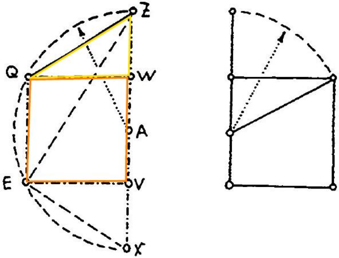
Proto podle s. 50:

- *WZ = strana vepsaného 10-úhelníku = delší část zlatého řezu poloměru kružnice.*



WZ = delší část zlatého řezu úsečky WQ.

Pravidelný dvacetistěn je vepsán do koule. . .



Řez dvacetistěnu a řez $\square$.[42]

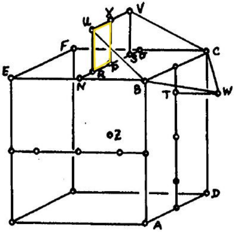
[42]viz konstrukci na s. 26

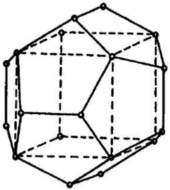
Pravidelný dvanáctistěn stručně

Nad každou stěnou krychle uvažme vrcholy U, V, W podle obr. . .

. . . a postupně se zdůvodní, že:

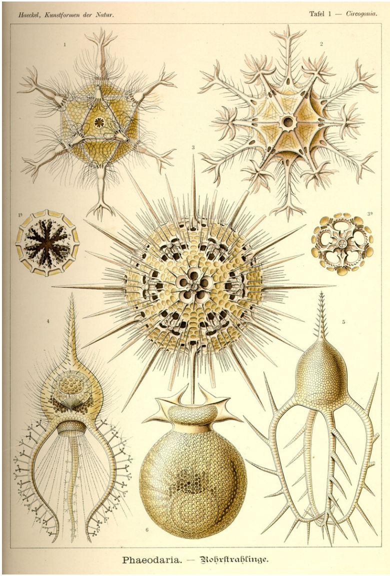
- body $UBCWV$ leží v jedné rovině,
- pětiúhelník $UBCWV$ je pravidelný,
- vzdálenost středu krychle je od všech vrcholů stejná.





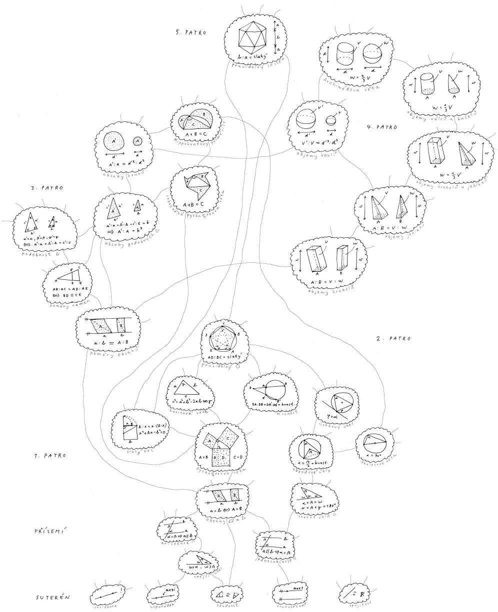
$RU = RP =$ delší část $\boxed{}$ úsečky PN.

Užitek



Circogonia icosahedra je $\boxed{}$.

Shrnutí[43] (navazuje na s. 77)



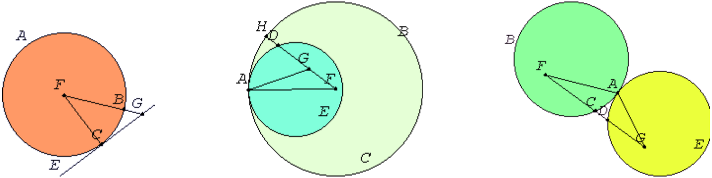
[43] https://is.muni.cz/el/ped/jaro2024/MA0007/um/prednaska/zaklady.pdf

Dotykové úlohy

= úlohy s body, přímkami, kružnicemi a jejich dotykem.

Definice

Přímka a kružnice, resp. dvě kružnice se *dotýkají*, pokud mají právě jeden společný bod.



Věta

Přímka se dotýká kružnice v bodě C $\boxed{\quad}$ *je kolmá k průměru FC.*
Kružnice se dotýkají v bodě A $\boxed{\quad}$ *spojnice jejich středů prochází bodem A.*[44]

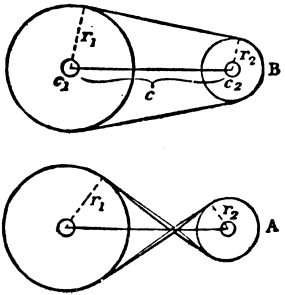
---

[44] Důkazy zpravidla nepřímo, viz např. https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookIII/propIII11.html

Dotyk vs. orientovaný dotyk

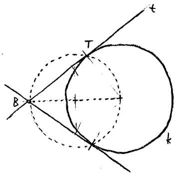
Často je výhodné (občas nutné) rozlišovat orientace:

- *cyklus* = orientovaná kružnice,
- *paprsek* = orientovaná přímka,
- *orientovaný dotyk* = dotyk ve shodě s orientacemi.

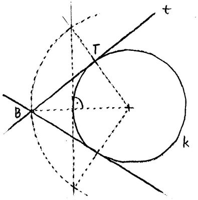


Základní úlohy s tečnami

Tečna z bodu ke kružnici:

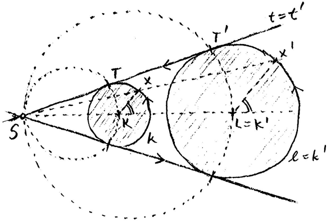


(a) pomocí

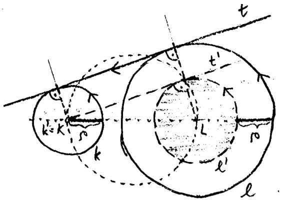


(b) pomocí

Společné tečny ke dvěma kružnicím:



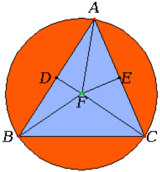
(a) pomocí

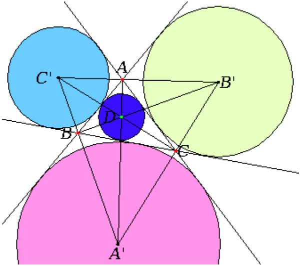


(b) pomocí [45]

[45] . . . redukováno na předchozí případ.

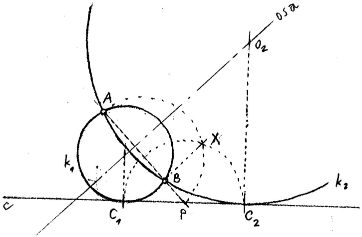
Kružnice opsaná trojúhelníku, kružnice vepsaná mezi tři přímky:

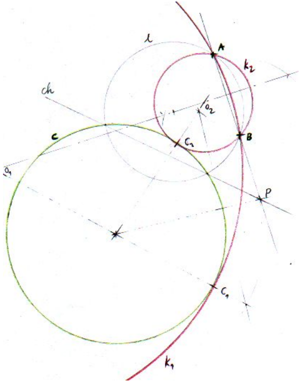




pomocí $\boxed{}$, $\boxed{}$

Kružnice procházející dvěma body a dotýkající se přímky, resp. kružnice:

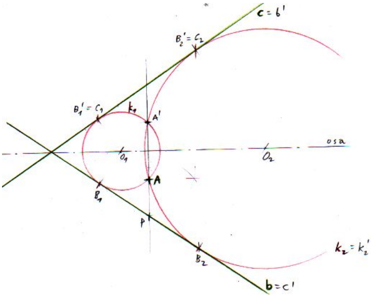




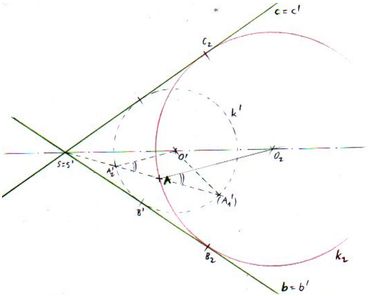
např. pomocí $\boxed{}$

Základní úlohy s kružnicemi

Kružnice procházející bodem a dotýkající se dvou přímek:



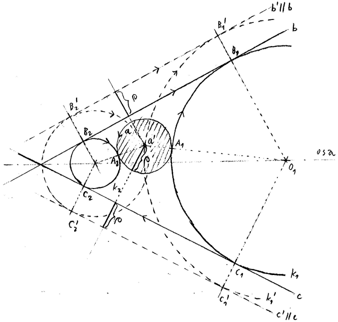
(a) pomocí [46]



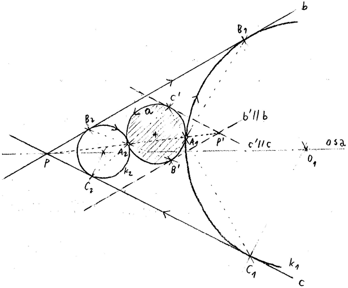
(b) pomocí

[46] . . . redukováno na předchozí případ (s. 93).

Kružnice dotýkající se kružnice a dvou přímek:



(a) pomocí $\boxed{}$ [47]



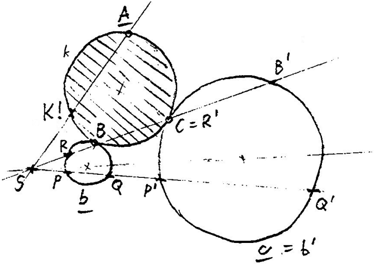
(b) pomocí $\boxed{}$

---

[47]... redukováno na předchozí případ (s. 94).

(Další zobecnění)

Kružnice procházející bodem a dotýkající se dvou kružnic:



Pomocí lze ukázat, že platí

$$SK \cdot SA = SP \cdot SQ'.$$

Tím je bod K jednoznačně určen, umíme jej sestrojit, ...[48]

[48]... a tím redukováno na předchozí případ (s. 93).

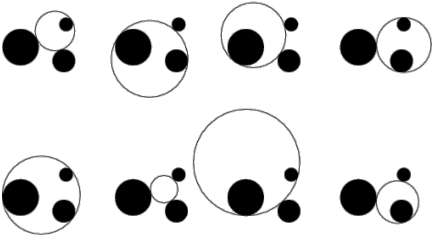
Obecná Apollóniova úloha

$=$ dotyková úloha se třemi danými kružnicemi.

Všechny předchozí úlohy (a mnoho dalších) chápeme jako mezní případy:

$$\lim_{r\to 0}(\text{kružnice}) = \boxed{}, \qquad \lim_{r\to\infty}(\text{kružnice}) = \boxed{}.$$

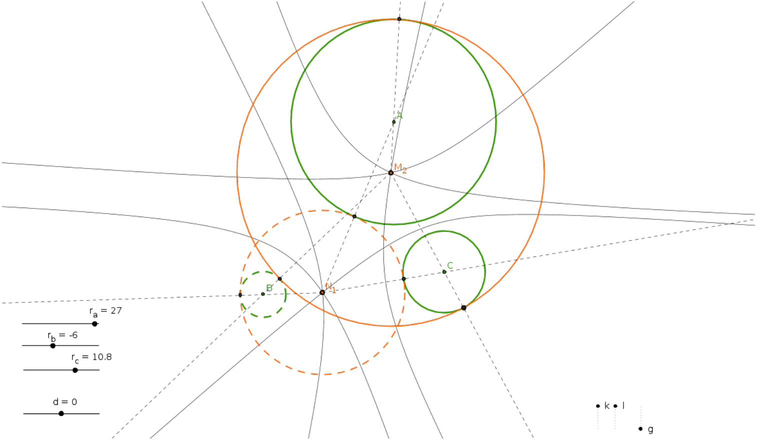
Obecná (neorientovaná) úloha má až 8 řešení; se zvolenými orientacemi dostáváme řešení po $\boxed{}$:



Poznámky

Zajímavá historie, mnoho rozličných řešení a řada aplikací...[49]

Viz např. van Roomenovo řešení, Newtonovu reformulaci a problém *trilaterace*...



Středy všech cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů, tvoří $\boxed{}$.

[49] http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius

Náš přístup

Z předchozích ukázek je patrné, že budeme protěžovat užití geometrických **transformací** k zjednodušení problému:

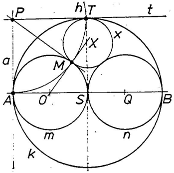
- souměrnosti,
- stejnolehlost,
- dilatace,
- kruhová inverze,
- apod.

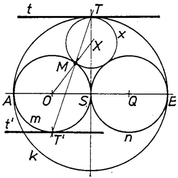
Podrobnosti k jednotlivým transformacím od s. 104...

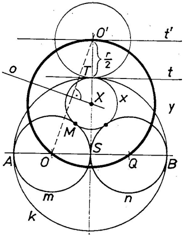
Ukázka typického použití na s. 116...

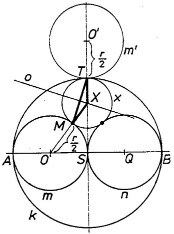
Poznámka

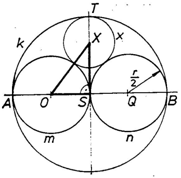
Specifická zadání nabízejí mnohá (a specifická) řešení:







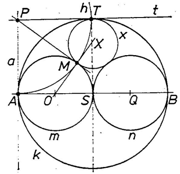


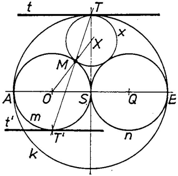


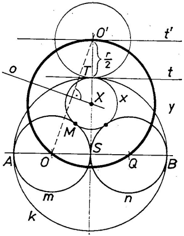
atd.

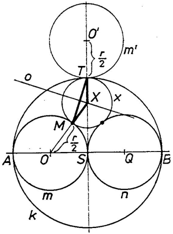
Poznámka

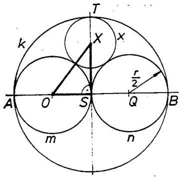
Specifická zadání nabízejí mnohá (a specifická) řešení:[50]











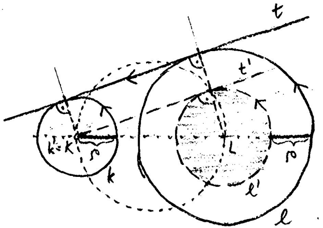
atd.

---

[50]např. pomocí mocnosti, stejnolehlosti, dilatace, souměrnosti, výpočtu, kruhové inverze

Dilatace jakožto příklad problémového zobrazení

Dilataci jsme poprvé potkali při konstrukci společných tečen ke dvěma kružnicím (s. 91):



Popis dilatace jakožto geometrického zobrazení je ošidný:

- nemá smysl mluvit o obrazu bodu jako takovém ( ),[51]
- měli jsme vždy bod na orientované kružnici, resp. přímce,
- není podstatná ona kružnice, resp. přímka, ale ,
- orientovaný dotyk nejsnáze znázorníme tečným (vázaným) vektorem. . .

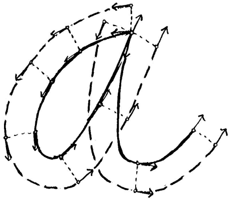
[51] Na rozdíl od všech ostatních zobrazeních v tomto kurzu!

Dilatace jakožto příklad **kontaktního** zobrazení

Co to je? Orientované kontaktní zobrazení v rovině.

Čím je určena? Nenulovým reálným číslem ρ.

Jak je určena? Obraz lib. $\boxed{}$ zastoupeného vektorem $\boldsymbol{v}$ je reprezentován vektorem $\boldsymbol{v}'$, který je posunut o vzdálenost ρ kolmo k $\boldsymbol{v}$, a to na správnou stranu v závislosti na orientaci. . .



Jaké má vlastnosti? Orientované kontaktní zobrazení!

K čemu to je dobré? Zachovává orientovaný dotyk křivek (viz s. 91, 96, 117, . . .)!

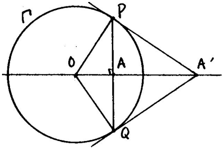
Kruhová inverze

Co to je? Transformace roviny vyjma $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$.[52]

Čím je určena? Kružnicí se středem O a poloměrem r.[53]

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu $A \neq O$ leží na polopřímce OA, a to tak, že

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2 \quad \text{neboli} \quad |OA'| = \frac{r^2}{|OA|}.$$



Jaké má vlastnosti? Involutivní transformace s kružnicí pevných bodů, základní konformní transformace v rovině, nepřímá, ...

[52]tzv. *střed kruhové inverze*

[53]tzv. *řídící kružnice*

Vlastnosti

Zřejmé:

(a) *Kruhová inverze je involutivní transformace.*

(b) *Všechny body na řídící kružnici jsou pevné.*

(c) *Všechno, co je vně řídící kružnice, se zobrazuje dovnitř, a naopak.*

(d) *Každá přímka procházející středem inverze je pevná;*
přitom jediné pevné body jsou průsečíky s řídící kružnicí a

$$\lim_{X\to\infty} X' = \boxed{}, \quad \textit{resp.} \quad \lim_{X\to O} X' = \boxed{}.$$

Nezřejmé:

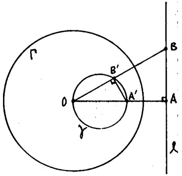
(e) *Kružnice procházející středem O se zobrazuje na* $\boxed{}$ *(neprocházející středem O), a naopak.*

(f) *Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje* $\boxed{}$.
Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke Γ.

(g) *Obecná kružnice neprocházející středem O se zobrazuje do* $\boxed{}$ *neprocházející O.*

(h) *Kruhová inverze je konformní, tzn.* $\boxed{}$ *zobrazení.*

(e) *Kružnice procházející středem O se zobrazuje na přímku (neprocházející středem O), a naopak.*



Důkaz.

Předp. extrémní dvojici $A \mapsto A'$, kde $OA \perp \ell$ a $OA' =$ průměr γ.
Ozn. $B \in \ell$ a $B' \in \gamma$ průsečíky s lib. přímkou jdoucí O.
Dokážeme, že B a B' jsou inverzního vzhledem ke Γ:

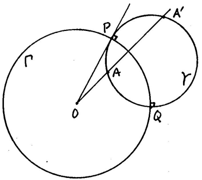
- Thaletova věta $\implies$ úhel $OB'A'$ je $\boxed{\quad}$ $\implies$ trojúhelníky OAB a $OA'B'$ jsou $\boxed{\quad}$ $\implies$

$$\boxed{\qquad\qquad} \quad \text{neboli} \quad OB' \cdot OB = OA' \cdot OA.$$

- Body A a A' jsou inverzní vzhledem ke Γ, takže B a B' taky:

$$OB' \cdot OB = OA' \cdot OA = \boxed{\quad}. \qquad \square$$

(f) *Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje sama na sebe.*
Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke Γ.



Důkaz.

Kružnice γ protíná řídící kružnici Γ kolmo[54]

$\Longleftrightarrow$ poloměr OP je ☐ ke kružnici γ

$\Longleftrightarrow$ pro libovolnou sečnu jdoucí bodem O platí[55]

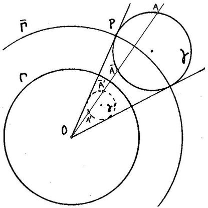
$$OA \cdot OA' = \boxed{}$$

$\Longleftrightarrow$ body A a A' jsou ☐ vzhledem ke Γ. □

[54] tzn. tečny ve společném bodě P jsou kolmé

[55] podle věty o ☐ bodu ke kružnici (s. 42)

(g) *Obecná kružnice neprocházející středem O se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející O.*



Důkaz.

Uvažme kružnici $\bar{\Gamma}$, která je soustředná s Γ a protíná kružnici γ kolmo. Ukážeme, že složení kruhových inverzí $\bar{\Gamma}$ a Γ je $\boxed{}$:[56]

- Ozn. $A \mapsto A'$ kruhovou inverzi vzhledem ke Γ a $A \mapsto \bar{A}$ kruhovou inverzi vzhledem ke $\bar{\Gamma}$, tedy

$$OA \cdot O\bar{A} = \boxed{} \quad \text{a} \quad O\bar{A} \cdot O\bar{A}' = \boxed{}.$$

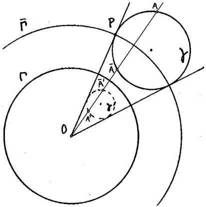
- Odtud po úpravě

$$O\bar{A}' : OA = \boxed{} = \textbf{konst.} \quad \text{neboli} \quad O\bar{A}' = \textbf{konst} \cdot OA. \qquad \square$$

[56]. . . zbytek je jasný: z předchozího (s. 110) a vlastností stejnolehlosti (s. 133) plyne, že obrazem γ vzhledem ke Γ je kružnice.

Pozor

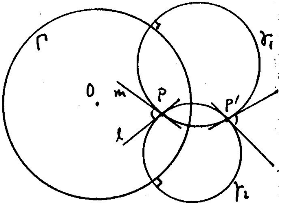
Při stejnolehlosti $\Gamma \circ \bar{\Gamma} : A \mapsto \bar{A}'$ se střed γ $\boxed{\qquad\qquad}$ na střed γ'.



Při kruhové inverzi $\Gamma : A \mapsto A'$ se střed γ $\boxed{\qquad\qquad}$ na střed γ'!

(Viz též obraz středu γ vzhledem ke kruhové inverzi $\bar{\Gamma}\ldots$)

(h) *Kruhová inverze je konformní zobrazení.*[57]



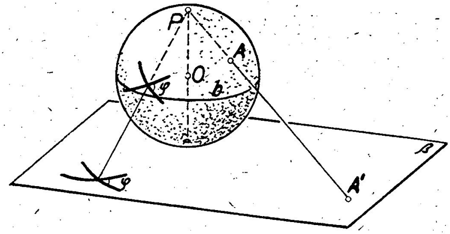
Důkaz.

- Odchylka dvou křivek v jejich společném bodě $P =$ odchylka jejich ☐ m a ℓ.
- Místo dvou obecných křivek můžeme uvažovat lib. dvě ☐, které prochází bodem P a mají přímky m a ℓ jako tečny.
- Místo obecných dvou kružnic můžeme uvažovat kružnice γ_1 a γ_2, které jsou ☐ k řídící kružnici Γ!
- Avšak kružnice γ_1 a γ_2 se zobrazují ☐ (s. 110), obrazem bodu P je ☐ bod P' kružnic a odchylka v bodě P je ☐ jako odchylka v bodě P'. □

[57] ... *úhlojevné*, tzn. zachovává odchylky protínajících se křivek.

Každé podobné zobrazení je konformní.

Dalším známým **ne**podobným konformním zobrazením je např. stereografická projekce (sféry bez jednoho bodu do roviny):



Kruhovou inverzi lze vyjádřit pomocí stereografické projekce a souměrnosti sféry podle roviny rovníku. . .

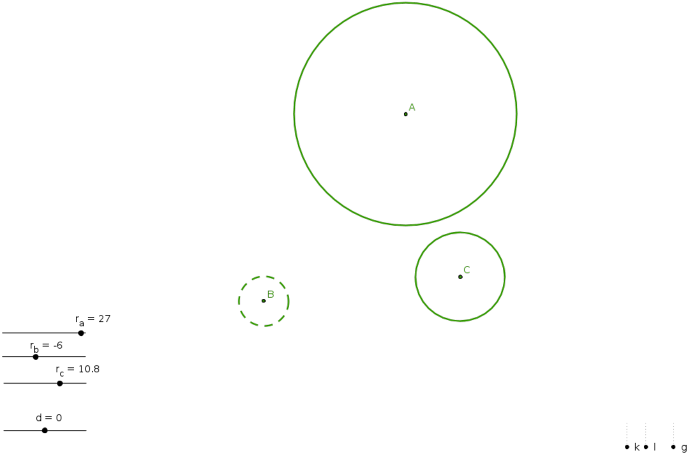
Konformní zobrazení

Kruhová inverze a obecná konformní zobrazení:

- **ne**zachovávávají vzdálenosti ani poměry vzdáleností,
- **ne**zobrazují přímky na přímky,
- **ne**zachovávávají obsahy, resp. objemy,

- ale zachovávávají odchylky protínajících se křivek,
- jsou prostá (injektivní).

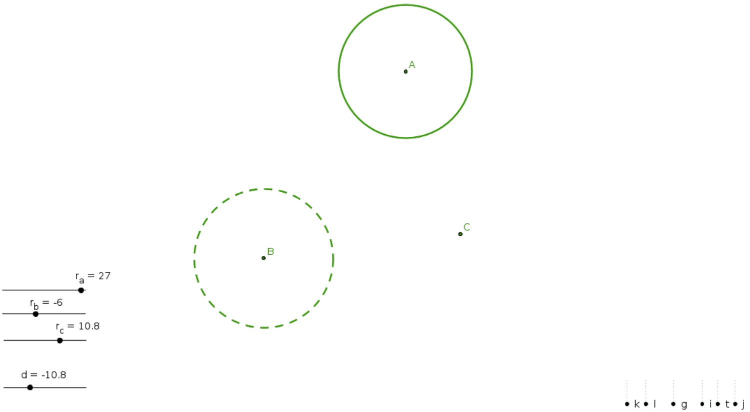
Orientovaná Apollóniova úloha:[58]



Sestrojit cykly, které se dotýkají tří daných cyklů.

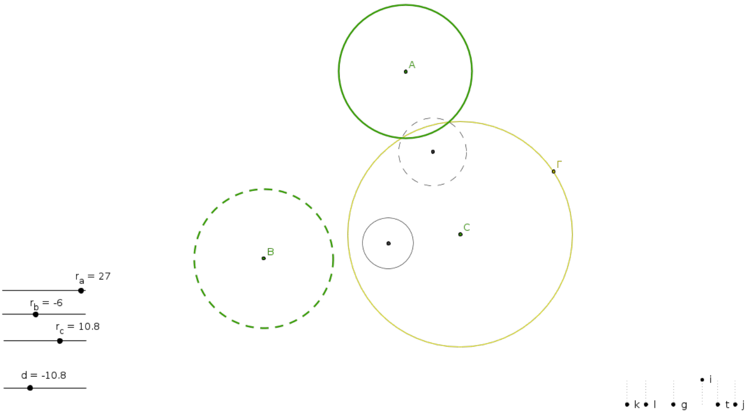
[58] http://ggbtu.be/mrFsNSnbN

(1) vhodná $\boxed{\qquad\qquad}$:



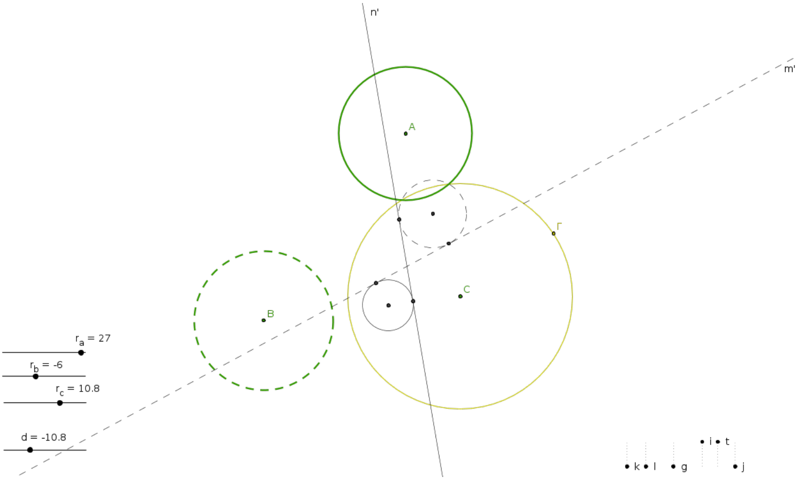
. . . tím je úloha redukována na případ s bodem místo kružnice, . . .

(2) vhodná :



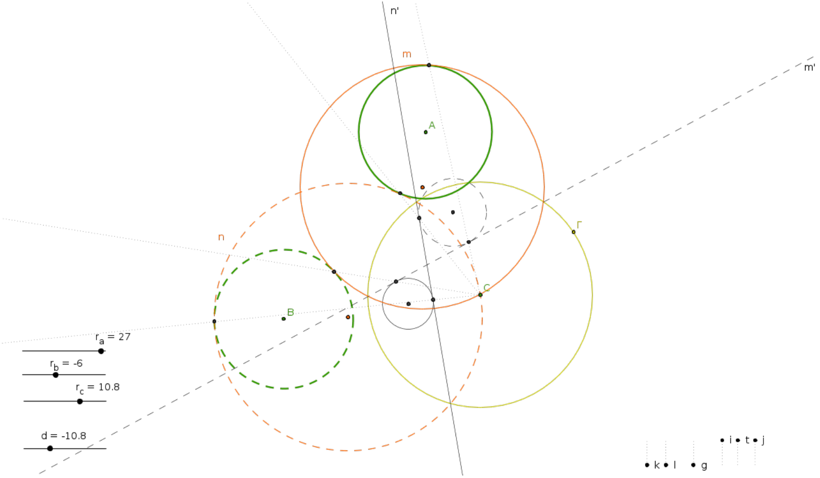
...kružnice procházející bodem C se zobrazují do přímek (s. 109), ...

(3) $\boxed{}$ dvou kružnic:



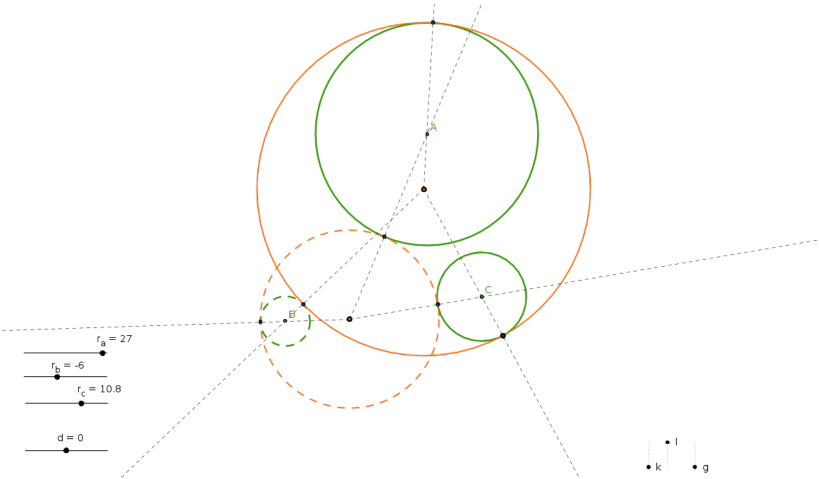
. . . což je jedna ze základních úloh (s. 91), . . .

(4) $\boxed{}$ zpět:



. . . což je snadné, . . .

(5) $\boxed{}$ zpět:

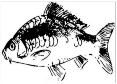


...což je taky snadné.

Hlavní větev geometrických zobrazení

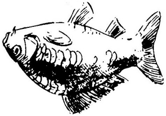
projektivní

afinní



podobná

ekviafinní



shodná

Osová souměrnost

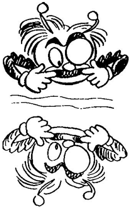
Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Přímkou o.[59]

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží na kolmici k ose, a to tak, že

$$\boxed{},$$

kde $X_o =$ průsečík XX' s osou o.



Jaké má vlastnosti? Involutivní transformace s přímkou pevných bodů, základní shodnost v rovině, nepřímá transformace, ...

[59] tzv. *osa*

Obecná shodná zobrazení

Definice

Shodné zobrazení

(a) zachovává vzdálenosti,

tzn. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí

$$\boxed{}\,.$$

Další vlastnosti

(b) zachovává kolineárnost bodů,

(c) zachovává odchylky přímek,

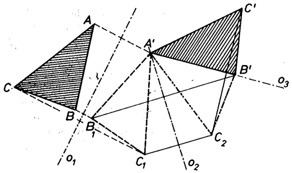
(d) zachovává obsahy, resp. objemy,

(e) je prosté (injektivní).

Shodnost v rovině je dána obrazem trojúhelníku (tj. tří bodů v obecné poloze).

Věta

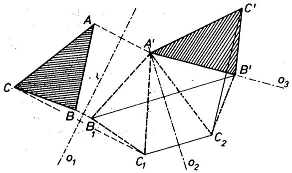
Každá shodnost v rovině je složením nejvýše $\boxed{}$ *osových souměrností:*



Shodnost v rovině je dána obrazem trojúhelníku (tj. tří bodů v obecné poloze).

Věta

Každá shodnost v rovině je složením nejvýše $\boxed{}$ osových souměrností:



Důkaz.

Postupně vkládáme osy tak, aby

- $A \mapsto A'$ ... dořešíme obrazy $B \mapsto B_1$ a $C \mapsto C_1$,
- $B_1 \mapsto B'$ ... dořešíme obraz $C_1 \mapsto C_2$, atd. □

...proto je osová souměrnost <u>základní</u> shodností v rovině.

Odtud klasifikace shodností v rovině:

(a) *identita* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \boxed{\quad} o_2$,

(b) *posunutí* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \boxed{\quad} o_2$,

(c) *otáčení* = složení dvou os. soum. takových, že o_1 a o_2 jsou $\boxed{\qquad\qquad}$,

(d) *středová souměrnost* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \boxed{\quad} o_2$,

(e) *osová souměrnost* = jedna os. soum.,

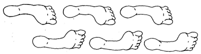
(f) *posunutá souměrnost* = složení $\boxed{\qquad\qquad}$ os. soum.

Poznámky

Shodnost s přímkou pevných bodů je právě osová souměrnost (e).

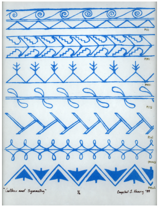
Shodnosti (a)–(d) jsou *přímé* (zachovávají orientaci), shodnosti (e)–(f) jsou *nepřímé* (mění orientaci).

Pojmenování (f) je odvozeno z možného rozkladu na osovou souměrnost a posunutí:

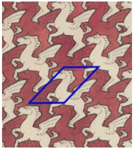
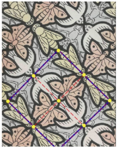
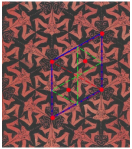
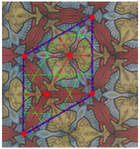
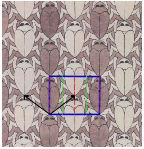


Odtud klasifikace symetrických vzorů, viz např.

- frízových vzorů[60]



- tapetových vzorů[61]

     . . .

- atp.

[60] http://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group

[61] http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

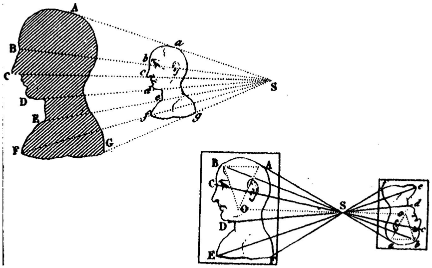
Stejnolehlost aneb škálování

Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Bodem S a nenulovým reálným číslem k.[62]

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží přímce SX, a to tak, že

$$\boxed{}\,.$$



Jaké má vlastnosti? Transformace se pevným bodem, základní podobnost, v rovině přímá transformace, ...

[62] tzv. *střed* a *koeficient* = poměr škálování

Speciální a mezní případy

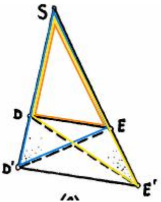
Spec. pro koeficient $|k| = 1$ dostáváme shodnosti:

- $\boxed{}$, pokud $k = 1$,
- $\boxed{}$, pokud $k = -1$.

Pokud bychom připustili $k = 0$, dostaneme velmi degenerovaný případ:

- $\boxed{}$.

Základní vlastnosti a skládání stejnolehlostí



Základní poznatek známe ze s. 61!

Zejména, každá stejnolehlost je

- podobné zobrazení, které
- každou přímku zobrazuje na přímku s ní rovnoběžnou.

Zobrazení s těmito vlastnostmi není mnoho, jmenovitě tři:

Věta

Složení dvou stejnolehlostí se středy S_1, resp. S_2 a koeficienty k_1, resp. k_2 je:

- $\boxed{\qquad\quad}$, *právě když* $k_1 \cdot k_2 = 1$ *a* $S_1 = S_2$,
- $\boxed{\qquad\quad}$, *právě když* $k_1 \cdot k_2 = 1$ *a* $S_1 \neq S_2$,[63]
- $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$, *právě když* $k_1 \cdot k_2 \neq 1$.[64]

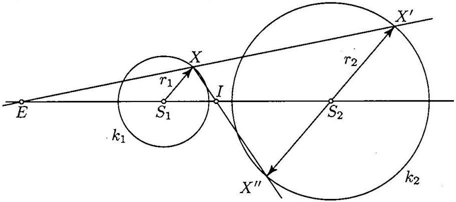
---

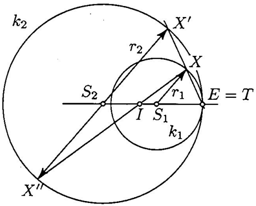
[63] . . . , přičemž vektor posunutí je násobkem vektoru $\overrightarrow{S_1S_2}$

[64] . . . pokud $S_1 \neq S_2$, potom střed výsledné stejnolehlosti leží na přímce S_1S_2

Stejnolehlý obraz kružnice

Stejnolehlým obrazem kružnice je kružnice, . . .





. . . každé dvě kružnice jsou stejnolehlé, . . .

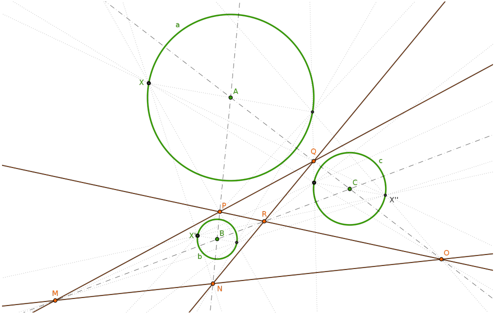
. . . a to ☐ způsobem.

Mongeova věta

Odtud (pro zajímavost) Mongeova věta:[65]

Věta

Mezi šesti středy stejnolehlostí tří kružnic jsou $\boxed{}$ *trojice.*



Důkaz.

Plyne z věty o skládání stejnolehlostí (s. 132). . . □

[65] . . . uplatnění např. při řešení obecné Apollóniovy úlohy

Obecná podobná zobrazení

Definice

Podobné zobrazení

(a) zachová poměry vzdáleností,

tzn. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí

$$\boxed{},$$

kde $k =$ kladná konstanta, tzv. *koeficient podobnosti*.

Další vlastnosti

(b) zachovává kolineárnost bodů,

(c) zachovává odchylky přímek,

(d) obsahy se mění $\boxed{}$-krát, resp. objemy se mění $\boxed{}$-krát,

(e) je prosté (injektivní).

Poznámky

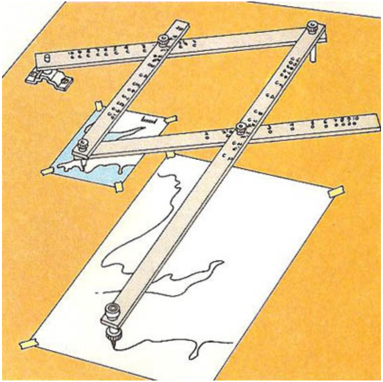
Podobnost v rovině je dána obrazem trojúhelníku (tj. tří bodů v obecné poloze).

Každé shodné zobrazení je podobné (s koeficientem $k = 1$).

Každé podobné zobrazení je složením nějaké $\boxed{}$ a $\boxed{}$.

... proto je stejnolehlost základní podobností.

Užitek



Pantograf[66]

[66] http://en.wikipedia.org/wiki/Pantograph

Osová afinita aneb škálování v jednom směru

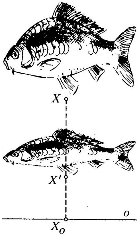
Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Přímkou o, směrem $\boldsymbol{s}$ a nenulovým reálným číslem m.[67]

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží na přímce se směrem $\boldsymbol{s}$, a to tak, že

$$\boxed{}$$

kde X_o = průsečík XX' s osou o.



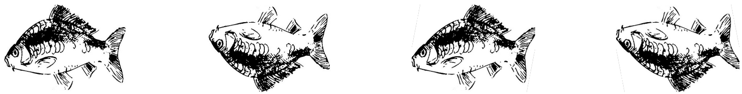
Jaké má vlastnosti? Transformace s přímkou pevných bodů,
základní afinní transformace v rovině,
přímá/nepřímá podle znaménka m, ...

[67] tzv. *osa*, *směr* škálování a *modul* = poměr škálování v daném směru

Speciální a mezní případy

Speciálními, resp. mezními případy osové afinity jsou:

- *osová souměrnost*, pokud $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$,
- *šikmá souměrnost*, pokud $\boxed{\qquad\qquad\qquad}$,
- *elace* aneb *naklonění*, pokud $\boxed{\qquad}$ ($\Longrightarrow m = \boxed{\;}$),



Pokud bychom připustili $m = 0$, dostaneme degenerovaný (neinjektivní) případ:

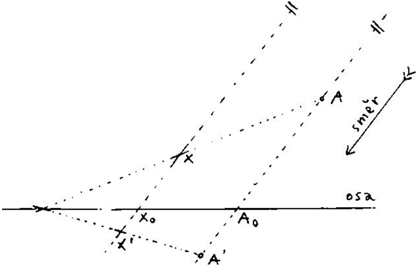
- $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ do přímky o ve směru $\boldsymbol{s}$.

Osová afinita zachovává:

(a) kolineárnost bodů,

(b) poměry vzdáleností trojic kolineárních bodů,

(c) rovnoběžnost přímek.



Důkaz.
Variace na $\boxed{}$ . . . □

Další vlastnosti

Osová afinita s osou o, směrem $\boldsymbol{s}$ a modulem m:

(d) zobrazuje přímku p do sebe, právě když $\boxed{}$ nebo $\boxed{}$,

(e) je přímá, resp. nepřímá, právě když $m\ \boxed{}$, resp. $m\ \boxed{}$,

(f) je involutivní, právě když $m = \boxed{}$,

(g) obsahy se mění $\boxed{}$-krát.

Obecná afinní zobrazení

Definice

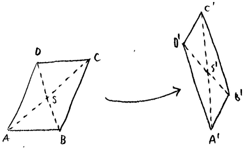
Obecné *afinní* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a)–(c) z předchozí strany.

Bijektivní afinní zobrazení se nazývá *afinita*.

Afinita, která zachovává obsahy (resp. objemy), se nazývá *ekviafinita* (viz šikmou souměrnost nebo elaci).

Poznámka

Za předpokladu (a) jsou vlastnosti (b) a (c) . . .



Ve skutečnosti (v jistých případech) vlastnost (a) (b) a (c). . . [68]

[68] . . . viz základní větu afinní geometrie (příští semestr)

Afinity v rovině

Analogicky k tvrzení na s. 126 máme:

Věta

Každá afinita v rovině je složením nejvýše $\boxed{}$ *osových afinit.*

Důkaz.

Myšlenka důkazu je $\boxed{}$, volnost v realizaci $\boxed{}$ □

. . . proto je osová afinita <u>základní</u> afinitou v rovině.

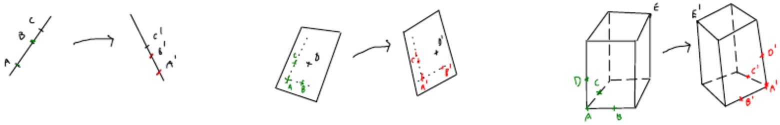
Příklad

Stejnolehlost jako složení dvou osových afinit:

O určenosti afinního zobrazení

Afinní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b), tj. obrazy ______ různých bodů…

Afinní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno obrazy ______ bodů v obecné poloze…



Věta

Prosté afinní zobrazení prostoru dimenze n je jednoznačně určeno obrazy ______ bodů v obecné poloze.

Důkaz.

Induktivní a konstruktivní — pomocí ______ a přenášení ______ …[69] □

[69] https://ggbm.at/yWcCaQeA

Shrnutí a poznámky

Každé podobné zobrazení je afinní.

Každé shodné zobrazení je ekviafinní.

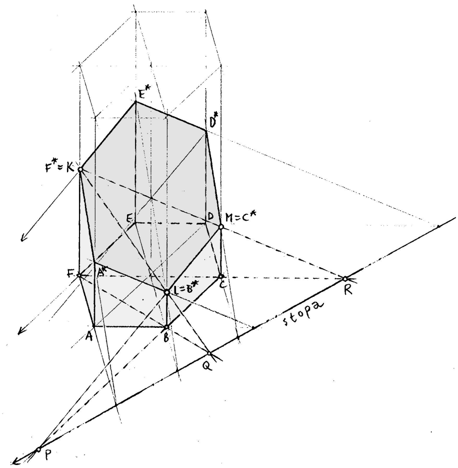
Podobné a ekviafinní zobrazení je $\boxed{\quad\quad}$.

3-rozměrnou analogií osové afinity je afinita s $\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

3-rozměrnou analogií rovnoběžného promítání do přímky je rovnoběžné promítání do $\boxed{\quad\quad}$ . . .

Obecné afinní zobrazení:

- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- zachovává rovnoběžnost,
- **ne**zachovává obsahy, resp. objemy,
- **ne**zachovává odchylky,
- $\boxed{\quad\quad}$ být prosté (injektivní).



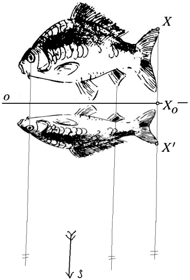
Afinní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho řez rovinou *KLM*. . . [70]

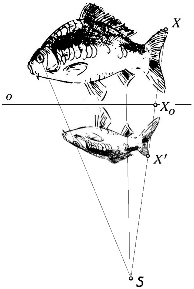
[70] http://ggbtu.be/mkvJL3iqr

Poslední příspěvky do sbírky základních zobrazení (s. 122):

Od posunutí ke stejnolehlosti to je stejné. . .

. . . jako od osové afinity k osové kolineaci. . .

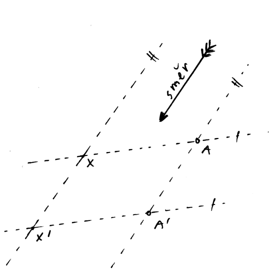


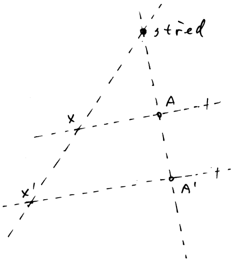


. . . nebo jako od rovnoběžného promítání ke středovému. . .

Jak to funguje?

Posunutí vs. stejnolehlost:





- $X'X \parallel A'A \parallel \dots$ směr,
- $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AA'} = \dots$ vektor posunutí,

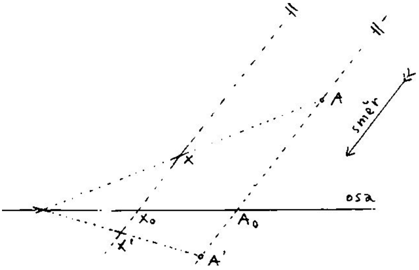
$X'X \cap A'A \cap \dots$ střed,

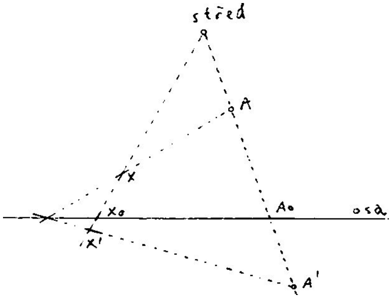
$\frac{\overrightarrow{SX'}}{\overrightarrow{SX}} = \frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = \dots$ koef. stejnolehlosti,

„Posunutí $=$ stejnolehlost se středem v $\boxed{}$."

Jak to asi funguje?

Osová afinita vs. osová kolineace:





- $X'X \parallel A'A \parallel \ldots$ směr,
- $\dfrac{\overrightarrow{X'X_o}}{\overrightarrow{XX_o}} = \dfrac{\overrightarrow{A'A_o}}{\overrightarrow{AA_o}} = \ldots$ modul,

$X'X \cap A'A \cap \ldots$ střed,

$???? = ???? = \ldots$ modul,[71]

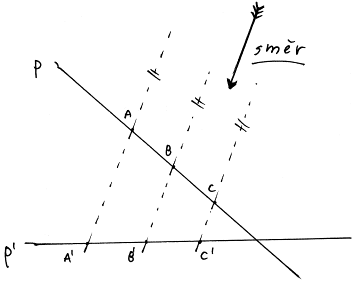
$\underbrace{\hspace{20em}}$

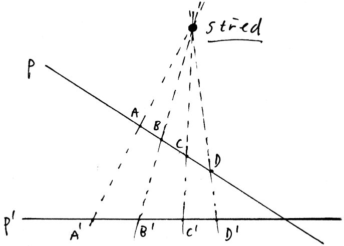
„Osová afinita = osová kolineace se středem v $\boxed{}$."

[71] kde ???? je *nějak* určeno body A, A', A_o a S.

Jak to asi funguje?

Rovnoběžné vs. středové promítání:





- $A'A \parallel B'B \parallel \ldots$ směr, $\qquad A'A \cap B'B \cap \ldots$ střed,
- $\dfrac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \ldots$ zákl. invariant, $\qquad ???? = ???? = \ldots$ zákl. invariant,[72]

„Rovnoběžné promítání $=$ středové promítání se středem v $\boxed{\qquad}$."

[72] kde ???? je *nějak* určeno body A, B, C a D.

Definice

Dělicí poměr trojice kolineárních bodů (A, B, C) je reálné číslo d takové, že platí $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$; značíme a zapisujeme takto:

$$d = (AB\,C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Dvojpoměr čtveřice kolineárních bodů (A, B, C, D) je poměr dělicích poměrů $(AB\,C) : (AB\,D)$; značíme a zapisujeme takto:

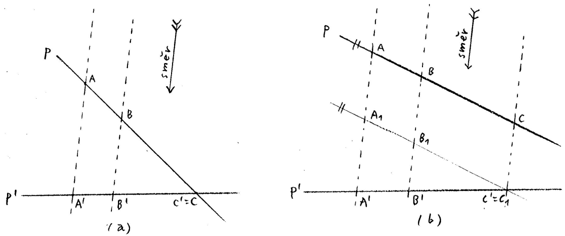
$$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

Poznámky

Vzhledem k tomu, že $\lim_{D\to\infty}(AB\,D) = \boxed{}$, platí $\lim_{D\to\infty}(AB\,CD) = \boxed{}$.

Věta

Při rovnoběžném promítání se zachovávají poměry trojic kolineárních bodů.[73]



Důkaz.

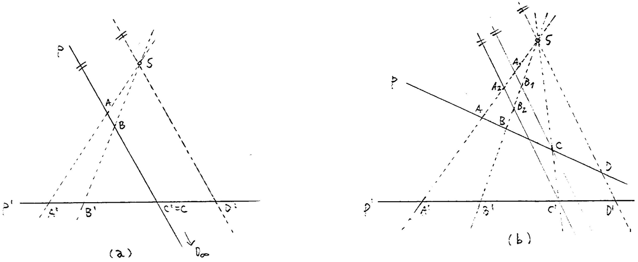
(a) Spec. případ plyne z ☐ trojúhelníků $AA'C$ a $BB'C'$ (s. 61).

(b) Obecný případ plyne z (a) a ☐ protilehlých stran v rovnoběžnících. ☐

[73] . . . pokud se různé body zobrazí na různé body.

Věta (Pappova)

Při středovém promítání se zachovávají dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.[74]



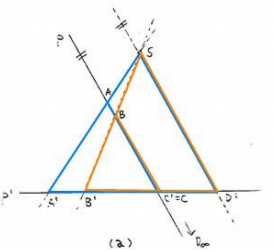
Důkaz.

(a) Spec. případ ($C = C'$ a $SD' \parallel p$) plyne z $\boxed{}$ trojúhelníků (s. 61) a vztahu $(AB\,C) = (AB\,CD_\infty)$ (s. 153).

(b) Obecný případ plyne z (a) a $\boxed{}$ trojúhelníků... □

[74] ...pokud se různé body zobrazí na různé body.

Detaily k důkazu Pappovy věty (a)



Z modré, resp. oranžové podobnosti plyne

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{SD'}} = \boxed{\quad\quad} \quad \text{resp.} \quad \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{SD'}} = \boxed{\quad\quad}$$

Po dělení

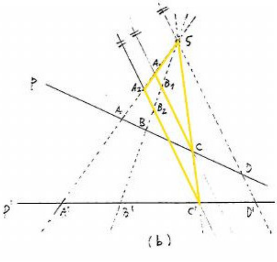
$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$

tudíž $(AB\,C) = (A'B'\,C'D')$.

Levá strana je však totéž, co $(AB\,CD_\infty)$, tedy

$$(AB\,CD_\infty) = (A'B'\,C'D').$$

Detaily k důkazu Pappovy věty (b)



Doplníme rovnoběžky s přímkou SD jdoucí bodem C, resp. C'.

Z (a) plyne $(A_1 B_1\, C) = \boxed{}$, resp. $(A_2 B_2\, C') = \boxed{}$.

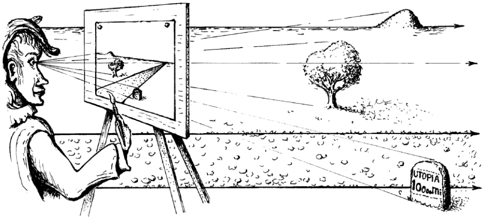
Ze žluté podobnosti plyne $\boxed{}$, a tedy

$$(AB\, CD) = (A'B'\, C'D').$$

Pozor!

Obecná afinní zobrazení fungují v rovině, resp. prostoru.

Při osové kolineaci či středovém promítání některé body obraz, jiné vzor; resp. jsou „ “:



. . . to jsou tzv. *úběžníky*, *horizont* apod.

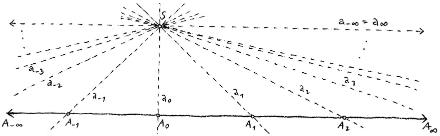
Pro větší pohodlí si náš eukleidovský prostor :

Eukleidovský prostor rozšířený o „body v nekonečnu“ je tzv. *projektivní* prostor.

Původní body jmenujeme *vlastní*, ty nové pak *nevlastní*.

Projektivní rozšíření

Přesněji, body rozšířeného prostoru (A_i) ztotožňujeme s přímkami (a_i) procházejícími nějakým externím bodem (S):



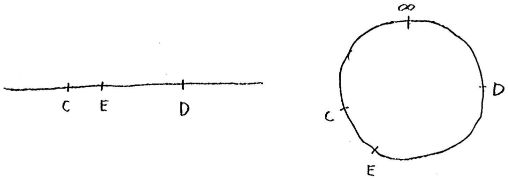
Vlastní body odpovídají $\boxed{}$, nevlastní body $\boxed{}$ s původním (nerozšířeným) prostorem.

Tedy:

- Projektivní rozšíření eukleidovské přímky má $\boxed{}$ nevlastní bod,
- Projektivní rozšíření eukleidovské roviny má $\boxed{}$ nevlastních bodů.
- Každé dvě přímky v projektivní rovině se $\boxed{}$.
- Atd.

Uspořádání

- Projektivní přímka je .
- Projektivní přímka projektivní rovinu na dvě nesouvislé části.[75]
- Uspořádání bodů na projektivní přímce valného smyslu:



Eukleidovská vs. projektivní přímka

[75] Vzpomeňte na diskuzi kolem věty o vnějším úhlu v trojúhelníku (s. 10).

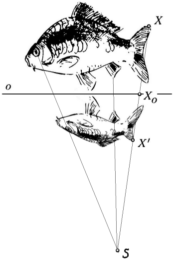
Osová kolineace pořádně (viz s. 151)

Co to je? Transformace **projektivní** roviny.

Čím je určena? Přímkou o, bodem S a nenulovým reálným číslem m.[76]

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu A leží na přímce SA, a to tak, že

kde A_o = průsečík AA' s osou o.



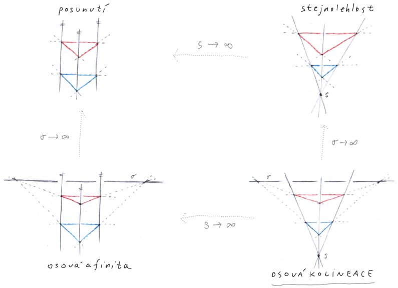
Jaké má vlastnosti? Transformace s přímkou pevných bodů, základní projektivní transformace v rovině, . . .

[76] tzv. *osa*, *střed* a *modul*

Speciální a mezní případy

Speciálními, resp. mezními případy osové kolineace jsou:

- *osová afinita*, pokud S je $\boxed{\qquad\qquad}$,
- *stejnolehlost*, pokud o je $\boxed{\qquad\qquad}$,
- *posunutí*, pokud S i o jsou $\boxed{\qquad\qquad}$.



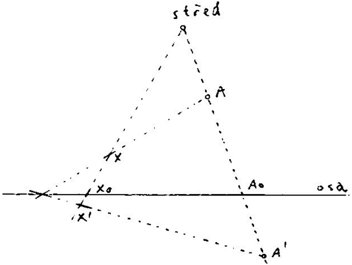
Pokud bychom připustili $m = 0$, dostaneme degenerované (neinjektivní) případy:

- *středové promítání* do přímky o z bodu S.
- *rovnoběžné promítání* do přímky o, pokud S je $\boxed{\qquad\qquad}$.

Osová kolineace zachovává:

(a) kolineárnost bodů,

(b) dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.



Důkaz.
Plyne z definice a z $\boxed{}$ . . . □

Další vlastnosti (viz s. 142)

Osová kolineace s osou o, středem S a modulem m:

(d) zobrazuje přímku p do sebe, právě když $\boxed{\quad}$ nebo $\boxed{\quad}$,

(e) je involutivní, právě když $m = \boxed{\quad}$.

Poznámky

(f) $\boxed{\quad}$ smysl (globálně) řešit zda je přímé/nepřímé,

(g) $\boxed{\quad}$ smysl (globálně) řešit změny obsahů.

Obecná projektivní zobrazení (viz s. 143)

Definice

Obecné *projektivní* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a) a (b) z předchozí strany.

Bijektivní projektivní zobrazení se nazývá *projektivita* nebo *kolineace*.

Poznámky

Základní vlastnosti (a) a (b) nejsou zcela nezávislé.

Ve skutečnosti (v jistých případech) vlastnost (a) $\boxed{}$ (b)...[77]

[77]... viz základní větu projektivní geometrie a její důsledky (za rok)!

Analogicky k předchozím případům máme:

Věta

Každá kolineace v (projektivní) rovině je složením nejvýše ☐ osových kolineací.

Důkaz.

Myšlenka důkazu je ☐, volnost v realizaci ☐ □

. . . také proto je osová kolineace <u>základní</u> kolineací v rovině.

O určenosti projektivního zobrazení (doplňuje s. 145)

Projektivní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b),

- tj. obrazy $\boxed{}$ různých bodů,
- tedy např. obrazy $\boxed{}$ různých vlastních bodů a $\boxed{}$ úběžníkem. . .

Projektivní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno

- obrazy $\boxed{}$ bodů v „dostatečně obecné" poloze,
- nebo obrazy $\boxed{}$ vlastních bodů v obecné poloze a $\boxed{}$ odpovídajími úběžníky. . .

O určenosti projektivního zobrazení (doplňuje s. 145)

Projektivní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b),

- tj. obrazy ☐ různých bodů,
- tedy např. obrazy ☐ různých vlastních bodů a ☐ úběžníkem…

Projektivní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno

- obrazy ☐ bodů v „dostatečně obecné“ poloze,
- nebo obrazy ☐ vlastních bodů v obecné poloze a ☐ odpovídajími úběžníky…

Věta

Prosté projektivní zobrazení prostoru dimenze n je jednoznačně určeno obrazy ☐ vlastních bodů v obecné poloze a ☐ odpovídajícími úběžníky.

Důkaz.

Induktivní a konstruktivní — pomocí ☐ a přenášení ☐ …[78] □

[78] https://ggbm.at/yWcCaQeA

Shrnutí a poznámky (viz s. 146)

Každé afinní zobrazení je projektivní.

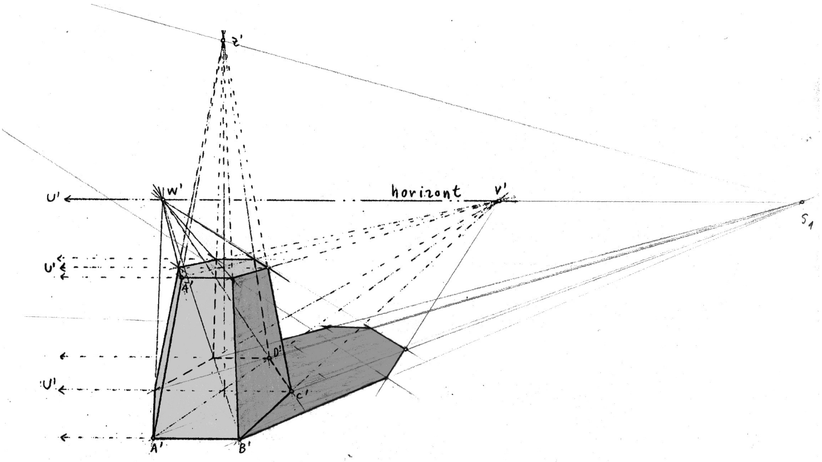
Projektivní zobrazení, které zobrazuje (ne)vlastní body na (ne)vlastní, je $\boxed{}$.

3-rozměrnou analogií osové kolineace je kolineace s $\boxed{}$

3-rozměrnou analogií středového promítání do přímky je středové promítání do $\boxed{}$...

Obecné projektivní zobrazení:

- zobrazuje přímky na přímky,
- zachovává dvojpoměry vzdáleností čtveřic kolin. bodů,
- **ne**zachovává poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- **ne**zachovává rovnoběžnost,
- **ne**zachovává obsahy, resp. objemy,
- **ne**zachovává odchylky,
- $\boxed{}$ být prosté (injektivní).



Projektivní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho stín...[79]

[79] https://www.geogebra.org/m/sbeyg5zy

Osa vs. střed

Vše, co jsme kdy jmenovali základní transformací v rovině, mělo[80]

- *osu* = přímku $\boxed{}$
- *střed* = takový bod, že každá jím jdoucí přímka je $\boxed{}$

Osa nebo střed mohou být jak vlastní, tak nevlastní (s. 163).

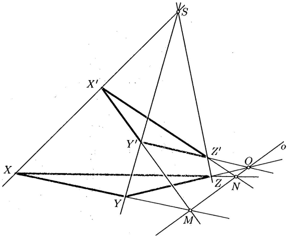
Z Desarguesovy věty (s. 173) vyplývá, že

- *projektivní transformace v rovině má osu* $\boxed{}$ *má střed!*

[80] https://ggbm.at/az7e9qsC

Věta

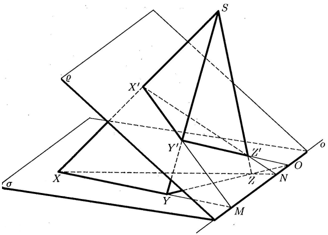
Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí: přímky XX', YY', ZZ' prochází jedním bodem $\iff$ průsečíky přímek XY a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.



Desarguesova věta...

Věta

Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí: přímky XX', YY', ZZ' prochází jedním bodem $\iff$ průsečíky přímek XY a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.



. . . a její trojrozměrná interpretace.[81]

[81] Elementární zdůvodnění problematické; jiný přístup (a zobecnění) za rok. . .

Přehled základních transformací v rovině

střed S	osa o	$S \in o$	modul	druh
vlastní	vlastní	ne	0	(středové promítání do přímky)
		ano	1	projektivní elace
		ne	-1	harmonická souměrnost
		ne	jinak	**osová kolineace**
nevlastní	vlastní	ne	0	(rovnoběžné promítání do přímky)
		ano	1	elace
		ne	-1	šikmá, resp. osová souměrnost
		ne	jinak	osová afinita
vlastní	nevlastní	ne	0	(promítání do bodu)
		ne	1	identita
		ne	-1	středová souměrnost
		ne	jinak	stejnolehlost
nevlastní	nevlastní	ano	1	posunutí

Transformace je involutivní $\iff$ modul $= \boxed{}$.

(Degenerované případy $\iff$ modul $= \boxed{}$.)

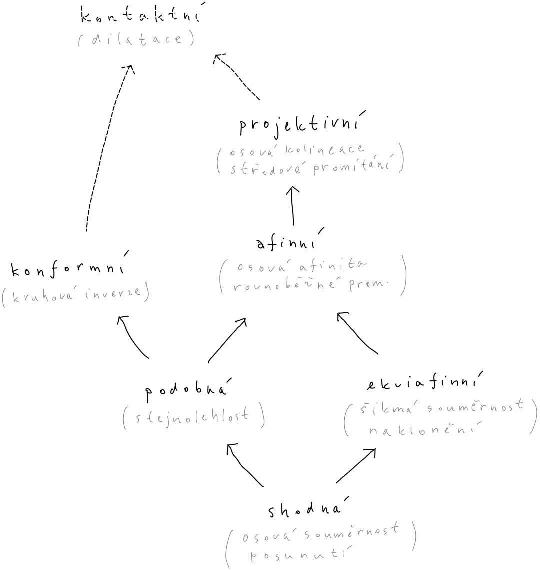
Pro afinní transformace: přímá $\iff$ modul $\boxed{}$, nepřímá $\iff$ modul $\boxed{}$.

Přehled typů zobrazení a jejich vlastností

	kolin.	vzdál.	děl. pom.	dvojpom.	rovnob.	obs.	odch.
projektivní	+	−	−	+	−	−	−
afinní	+	−	+	+	+	−	−
ekviafinní	+	−	+	+	+	+	−
podobná	+	−	+	+	+	−	+
shodná	+	+	+	+	+	+	+
konformní	−	−	−	−	−	−	+

- Projektivní zobrazení, které zobrazuje všechny vlastní body na vlastní (ekvivalentně, nevlastní body na nevlastní), je $\boxed{\quad\quad}$.
- Afinní zobrazení, které zachovává poměry vzdáleností jakýchkoli (tedy i nekolineárních) trojic bodů, je $\boxed{\quad\quad}$.
- Konformní zobrazení, které je projektivní, je $\boxed{\quad\quad}$.
- Podobné zobrazení, které je ekviafinní, je $\boxed{\quad\quad}$.

Hierarchie zobrazení (viz s. 122)



Užitek

Mnoho základních zobrazení můžeme (resp. $\boxed{}$) pozorovat při znázorňování původně stereometrických problémů: