MA 0008 – teorie psti

přednáška 02: definice psti, popisná statistika

Co je pravda?

Co je pravda?

- Skutečnost (2+2=4)
- Věrný-přesný popis skutečnosti (první den napršelo 0,5 mm srážek, druhý den 0,3 mm, třetí den 0 mm, čtvrtý den 0 mm, pátý den 1,2 mm)

S pravdou může pomoci i logika:

Vše je relativní

S pravdou může pomoci i logika:

Vše je relativní … je relativní

(obecně řečeno: výroky, které logicky či morálně vyvrací samy sebe, pravdivé nejsou)

Agnosticismus:

Pravdu nelze poznat

Agnosticismus

Pravdu nelze poznat … přece nelze poznat!!

(výrok opět vyvrací sám sebe)

Skepticismus:

O všem musíme pochybovat

Skepticismus:

Musíme pochybovat o tom, že …

O všem musíme pochybovat

(výrok opět vyvrací sám sebe)

Dnešní doba:

Ke všem musíme být tolerantní

Dnešní doba:

Ke všem musíme být tolerantní … je trochu netolerantní

Dnešní doba:

Ke všem musíme být tolerantní … je trochu netolerantní

- neusiluje o to nejlepší pro druhého

(lhostejnost … ať si dělá, co chce)

- odmítá přijmout pravdu, pokud ji řekne někdo druhý

(jsme vůči sobě tolerantní, nebo lhostejní??)

Jak souvisí pravda a pravděpodobnost?

Často přesnou pravdu neznáme, ale musíme se nějak rozhodnout i v situacích, kdy dochází k řadě věcí, které mohou nastat, ale taky nemusí

Úkolem matematiky v těchto situacích je popsat náhodnost

Pst – statistická definice

Pst náhodného jevu A = takové reálné číslo, ke kterému se blíží relativní četnost výskytu jevu A, pokud celý experiment N-krát opakujeme, pro dostatečně velké N:

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n(A)}{N}$$

Slabina definice: přesnou hodnotu limity vlastně nelze ověřit, protože experiment nelze opakovat nekonečněkrát

Statistická definice psti - příklad

Jaká je pst, že při hodu kostkou padne 6?

N=10 hodů .... $P(A) = \frac{3}{10} = 0,3$

N=100 hodů .... $P(A) = \frac{20}{100} = 0,20$

N=1000 hodů .... $P(A) = \frac{170}{1000} = 0,170$

V limitě bychom dostali $P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n(A)}{N} = \ldots$ pst se blíží 0,1666

Axiomatická definice psti:

Ω … základní prostor = množina všech možných elementárních výsledků ω_i daného pokusu (experimentu)

$\mathcal{A}$ … jevové pole = množina všech náhodných jevů $A_i \subseteq \Omega$, které chceme uvažovat (nemusí to být nutně všechny podmnožiny množiny Ω) a přitom platí axiomy

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. Pro $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 - A_2 \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ je uzavřené na rozdíly jevů)
3. Pro $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ také $\cup_i A_i \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ je uzavřené na sjednocení nekonečně mnoha jevů)

A nyní pst je zobrazení jevového pole $\mathcal{A}$ do intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s vlastnostmi

1. $P(\Omega)=1$ ... axiom normovanosti
2. $P(A) \geqq 0$ pro každý jev A ... axiom nezápornosti
3. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1)+P(A_2)+$ ... aditivita při neslučitelných jevech

- (axiom součtu pravděpodobností konečně mnoha nebo nekonečně mnoha neslučitelných jevů)

Tato definice umožňuje korektně definovat všechny různé pstní modely

Vysvětlení třetího axiomu:

Př: experiment = hod kostkou, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$

A ... padne sudé číslo ... $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$

- Jednotlivé elementární výsledky $\omega_2,\omega_4,\omega_6$ jsou navzájem neslučitelné, tj. je rozumné spočítat pst jevu A jako součet jednotlivých pstí daných neslučitelných jevů:

$$P(A)=P(\omega_2)+P(\omega_4)+P(\omega_6)$$

Příklad 0:

Př: experiment = hod vyváženou kostkou, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$

A ... padne 6 ... $A=\{\omega_6\}$

- $P(A)=P(\omega_6) = \frac{1}{6} = 0{,}1666666666666666666$atd.

(pst nezjišťujeme experimentem, ale vypočteme na základě teoret. předpokladů)

princip součtu pstí neslučitelných jevů platí nejen pro elementární jevy:

Pokud A_1, A_2, A_3, A_4 jsou po dvou disjunktní náhodné jevy (= neslučitelné náhodné jevy) a každý z nich může obsahovat i více elementárních výsledků,

Tak pst jejich sjednocení vypočteme jako součet pstí těchto jevů:

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)$

Atd. A teoreticky tento princip platí i pro sjednocení nekonečně mnoha navzájem neslučitelných jevů.

Příklad 1: jaká je pst, že při hodu dvěma kostkami padne součet 5?

Ze tří axiomů psti lze odvodit další vlastnosti:

Větička 1: Pokud $A \subseteq B$, tak $P(A) \leq P(B)$

- Důkaz: množinu B lze rozdělit na dvě disjunktní části A, B-A;

Tedy na základě axiomu 3 platí $P(B)=P(A)+P(B-A)$, a to je $\geq P(A)$, protože podle axiomu 2 je $P(B-A) \geq 0$. (+ obrázek)

Anebo:

Větička 2: Pro každý jev A platí P(A)+P($\bar{A}$)=1

- Důkaz: množinu Ω lze rozdělit na dvě disjunktní části A, $\bar{A}$;
  Tedy na základě axiomů 1 a 3 platí P(Ω)=1=P(A)+P($\bar{A}$). (+ obrázek)

Důsledek: P($\bar{A}$)=1-P(A).

Příklad 2: jaká je pst, že ze 4 vytažených karet z balíčku 32 je aspoň jedna eso?

a) Pomocí jevu A
b) Pomocí jevu opačného k jevu A
c) Metodou, kterou vymyslel Matouš Hájek

Příklad 3: jaká je pst, že ze 3 hodů desetikorunou padne 2x líc a 1x rub?

a) Vypište prvky množiny omega
b) Vypište prvky náhodného jevu A

Příklad 4: házeme 3x kostkou. Jaká je pst, že šestka padne právě dvakrát?

a) Vypište prvky množiny omega
b) Vypište prvky náhodného jevu A
c) Jak se tento příklad liší od předchozího? Také zde přece máme výběr právě dvou případů ze tří?

Nejlepší příklad vysvětlující rozdíl mezi pstí statistickou a axiomatickou:

Příklad 2.7 ve skriptech, str. 14-16 … statistické psti

Příkald 2.8 ve skriptech, str. 16-18 … teoretické (axiomatické) psti