

MA 0008 – teorie psti

**přednáška 03: klasická a
geometrická pst**

V jednom příkladu z minulé přednášky jsme se setkali s tím, že jistý elementární případ měl jinou pst než ty ostatní ... existuje tedy více modelů pro popis náhodnosti ... dnes se s nimi stručně seznámíme

Z povahy množiny Ω všech elementárních výsledků experimentu lze provést rozdělení na různé pstrní modely

model psti 01 – klasická pst

- a) Ω má konečně mnoho možných výsledků a
- b) všechny tyto výsledky mají stejnou možnost nastat

• Pak pro pst jevu $A \subseteq \Omega$ platí

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

(podíl počtu prvků obou množin)

Př.1: Dvakrát hodíme kostkou – jaká je
pst, že součet obou hodů je roven 5?

$\Omega = \{[1; 1], [1; 2], [1; 3], \dots, [6; 5], [6; 6]\}$... možných výsledků je ...

A ... součet obou čísel je roven 5

$A = \{[1; 4], [4; 1], [2; 3], [3; 2]\}$

Tj. $P(A) = ?$

Př.1: Dvakrát hodíme kostkou – jaká je
pst, že součet obou hodů je roven 5?

$\Omega = \{[1; 1], [1; 2], [1; 3], \dots, [6; 5], [6; 6]\}$... možných výsledků je 36

A ... součet obou čísel je roven 5

$A = \{[1; 4], [4; 1], [2; 3], [3; 2]\}$

Tj. $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0,11111111111111$

Př.2: Z karet na mariáš (32) vybereme 4 ...
jaká je pst, že aspoň jedna je eso?

Ω = všechny možné četveřice karet

A ... aspoň jedna z dané četveřice karet je eso

A = ty četveřice, kde právě jedna karta je eso + četveřice, kde právě dvě karty jsou eso + četveřice, kde právě 3 karty jsou eso + jediná četveřice se všemi čtyřmi esy

○

$$\text{Tedy } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \dots$$

Př.2: Z karet na mariáš (32) vybereme 4 ...
jaká je pst, že aspoň jedna je eso?

Ω = všechny možné čtveřice karet

A ... aspoň jedna z dané čtveřice karet je eso

A = ty čtveřice, kde právě jedna karta je eso + čtveřice, kde právě dvě karty jsou eso + čtveřice, kde právě 3 karty jsou eso + jediná čtveřice se všemi čtyřmi esy

$$\text{Tedy } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{3} + \binom{4}{2} \cdot \binom{28}{2} + \binom{4}{3} \cdot \binom{28}{1} + 1}{\binom{32}{4}} = 0,4305895 \doteq 0,4306.$$

Př.2: Nešel by spočítat nějak jednodušeji?

Ω = všechny možné četveřice karet

A ... aspoň jedna z dané četveřice karet je eso

• Tedy $P(A) = ??$

Př.2: Ano, pomocí opačného jevu:

Ω = všechny možné čtveřice karet

A ... aspoň jedna z dané čtveřice karet je eso

\bar{A} ... žádná z dané čtveřice není eso

○

$$\text{Tedy } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}} \doteq 0,4306.$$

model psti 02 – geometrická pst

- a) Ω má nekonečně mnoho možných výsledků a
- b) všechny tyto výsledky mají stejnou možnost nastat

• Pak pro pst jevu $A \subseteq \Omega$ platí

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

(kde μ je míra daných množin ... podle dimenze množiny je to délka, obsah, objem množiny)

**Př.3: Tramvaj jezdí v 7-min intervalech.
Jaká je pst, že budeme čekat ≥ 4 min?**

Předpoklad: přicházíme na zastávku náhodně, nedíváme se na hodinky.
Tj. každá možná doba čekání na další tramvaj má stejnou šanci nastat

$\Omega=?$

A ... na tramvaj čekáme více než 4 minuty

$P(A)=?$

(nelze počítat podle klasického modelu, protože množiny jsou nekonečné)

**Př.3: Tramvaj jezdí v 7-min intervalech.
Jaká je pst, že budeme čekat ≥ 4 min?**

**Předpoklad: přicházíme na zastávku náhodně, nedíváme se na hodinky.
Tj. každá možná doba čekání na další tramvaj má stejnou šanci nastat**

$$\Omega = \langle 0; 7 \rangle$$

o **A ... na tramvaj čekáme aspoň 4 minuty, $A = \langle 4; 7 \rangle$**

$$P(A) = \frac{d(A)}{d(\Omega)} = \frac{3}{7} = 0,4285714 \doteq 0,4286.$$

Př.4: Honza a Marek se domluvili na setkání mezi 8 a 9 hod ráno

Ovšem oba vstávají náhodně, tj. jejich příchod v jakémkoli okamžiku dané hodiny je stejně možný.

Navíc oba odmítají čekat na toho druhého více než 15 minut.

Jaká je pst , že se vůbec Honza a Marek na daném místě setkají?

Označme: $8+x$... doba přích. Honzy
 $8+y$... doba přích. Marka

Pak $\Omega = \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle$... jedná se o část roviny!!! Čtverec o straně 1.

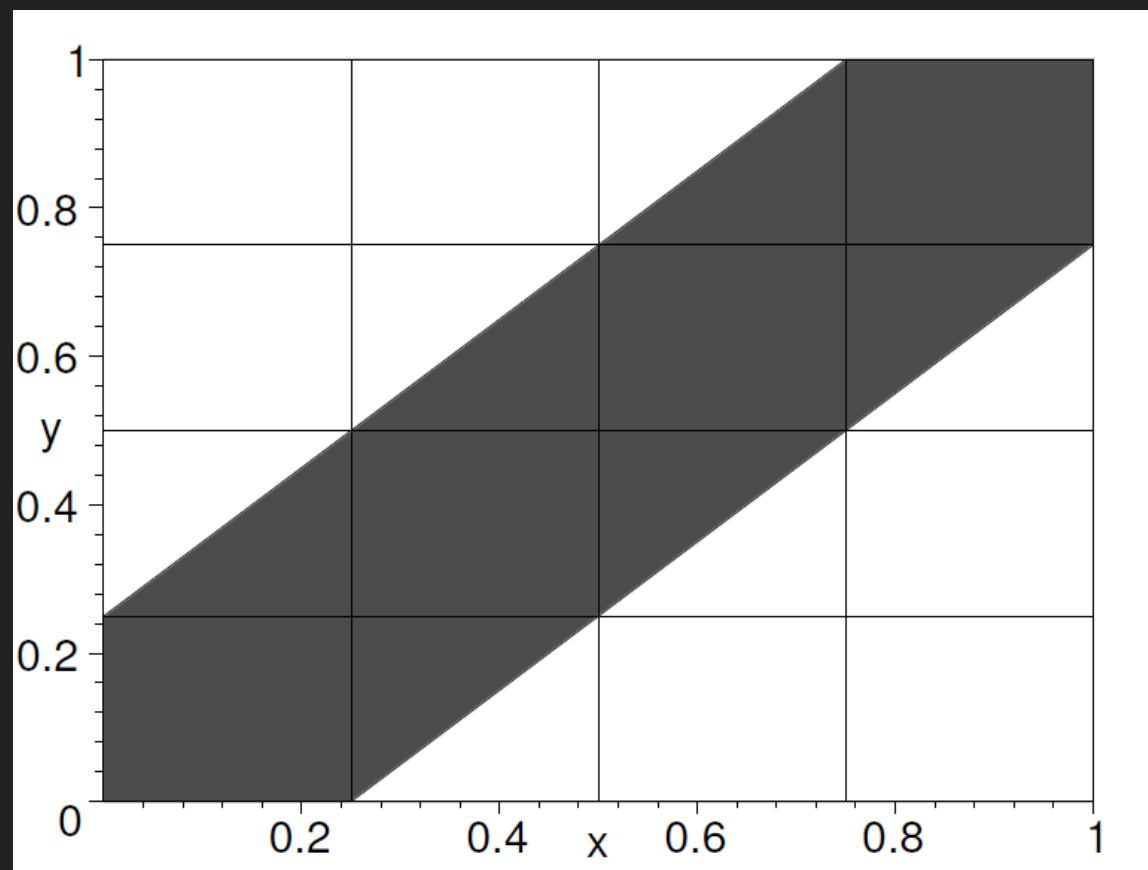
A ... Honza a Marek se setkají;

a) Které body v dané části roviny odpovídají jevu A?

b) Jedná se o dvoudimenzionální úlohu, $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \dots$???,

kde $S()$ je obsah plochy

x, y se nesmí lišit o více než 0,25 hod:



Obsah plochy A lze zjistit podle počtu vyšrafovaných čtverců o hraně 0,25:

$$\bullet P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{7}{16} = 0,4375.$$

09: model psti 03 – diskrétní pst

a) Ω má konečně mnoho elementárních výsledků, nebo je jich stejně jako přirozených čísel

b) tyto výsledky mají obecně RŮZNOU možnost nastat

○ Pak pro pst jevu $A \subseteq \Omega$ platí

$$P(A) = \sum_{\omega_j \in A} p(\omega_j)$$

(kde p je tzv pstní funkce)

Z axiomů psti plyne pro pstní funkci:

1. $\sum_{\omega_i \in \Omega} p(\omega_i) = 1$... axiom normovanosti
2. $p(\omega_i) \geq 0$ pro každý elementární výsledek $\omega_i \in \Omega$
3. $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$ (axiom součtu pstí neslučitelných jevů)

Př. 5: hážeme kostkou tak dlouho, až poprvé padne šestka; pak skončíme; ω_i je jakákoli přípustná sekvence hodů za těchto podmínek. Určete pst, že na první šestku budeme potřebovat více než tři hody.

model psti 04 – spojitá pst

a) Ω má nespočetně nekonečně mnoho elementárních výsledků, tedy se jedná o interval reálných čísel

b) tyto výsledky mají obecně RŮZNOU možnost nastat

○ Pak pro pst jevu $(a;b) \subseteq \Omega$ platí

$$P((a;b)) = \int_a^b f(x) dx$$

(kde f je tzv hustota psti ... je to funkce nezáporná a po částech spojitá)

Z axiomů psti plyne pro hustotu psti:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$... axiom normovanosti
2. $p(\omega_i) = \int_{\omega_i} f(x)dx = 0$ (pst měříme pomocí obsahů, nikoli pomocí funkčních hodnot);
 $P((a;b)) = \int_a^b f(x)dx \geq 0$ (protože hustota f je nezáporná, tj. obsah podgrafu je nezáporný)
3. $P((a;b)) = \int_a^b f(x)dx$ (součet má formu integrálu)

Př. 6: mobily jisté firmy mají životnost v průměru 15 let; jaká je pst, že náhodně koupený mobil vydrží více než 10 let?

Rekapitulace otázek:

7. Klasická pst
8. Geometrická pst
9. Diskrétní pst
10. Spojitá pst