MA 0008 – Teorie pravděpodobnosti

PEDAGOGICKÁ FAKULTA MASARYKOVY UNIVERZITY

Břetislav Fajmon

Verze textu: březen 2024

Obsah

Úvod

Rádi bychom v tomto textu poskytli materiál, který podepře výuku předmětu MA0008 na Pedagogické fakultě Masarykovy Univerzity v Brně.

Představit pravděpodobnost i statistiku v jednom semestru není jednoduché – přesto je kurs někdy zaměřen kromě jistých metod, které mohou pomoci na ZŠ při prezentaci nebo zpracování statistických údajů v Excelu (tomu bude též věnována pozornost), také na výpočty a některá odvození vysokoškolského rázu. Studenti mají částečné povědomí o statistických metodách z kurzů věnovaných tomu, jak psát bakalářskou práci a jak dělat pedagogický výzkum – tento kurs MA 0008 by měl nejen navázat na takové kursy, ale navíc poskytnout jistou matematickou důkladnost v některých věcech, a odvození a vysvětlení základních faktů, je-li to možné zejména s využitím některých znalostí zejména z matematické analýzy (pravděpodobnost je totiž mezioborem matematiky, protože se snaží popisovat náhodnost jak u diskrétních, tak u spojitých veličin, tj. využívá poznatky „diskrétních“ i „spojitých“ matematických disciplín).

Při psaní textu budou využity zkušenosti získané z učebního textu (Fajmon, Hlavičková, Novák 2014) společně s mými bývalými kolegy na FEKT VUT, kde byl hojně využit i text (Loftus, Loftusová 1988). Důležitým textem na téma pravděpodobnosti z Brněnské matematické komunity je (Budíková, Králová, Maroš 2009). Na pedagogické fakultě se ovšem musíme také držet patřičně „při zemi“ a myslet na středoškolskou úroveň, popřípadě úroveň ZŠ – materiálem reprezentujícím tuto oblast je učebnice (Robová, Hála, Calda 2013). Děkuji také studentům Petrovi Nezvalovi a Romaně Hodkové za přepis některých částí skript v počítačovém prostředí TEX.

Obsah předmětu je rozdělen na tři části:

- Cvičení 01-02: Popisná statistika – zpracovává informace na základě naměřených dat pomocí tabulek, grafů, funkcí, číselných hodnot. V podstatě vyučováno na ZŠ. Výuka bude doplněna úkoly zpracovanými v programu Excel.
- Přednáška 01-08, cvičení 03-08: Teorie pravděpodobnosti – zabývá se popisem náhodnosti v experimentech či měřeních veličin, kdy za stejných vstupních podmínek nastávají různé výsledky.
- Přednáška a cvičení 09-12: Úsudková statistika – prezentace některých metod analýzy dat, kdy je informace získaná z náhodného výběru jedinců zobecněna na celou populaci. Její součástí je teorie odhadu, testování statistických hypotéz, statistická predikce (předpověď).

Text je v roce 2024 stále dokončován.

Břetislav Fajmon, březen 2024

1 Týden 01: Popisná statistika

1.1 Přednáška 01: Statistika v prostředí Excel

Zde má být napsána přednáška o základech statistického zpracování dat v Excelu. Na základě následujících videí jsem zpracoval základní pokyny ke zpracování dvou typů proměnných v Excelu, a jsou přístupné v souboru 01pred-cetnosti.xlsx v materiálech k předmětu v IS.

- https://www.youtube.com/watch?v=2A1nqRN0jKY&ab_channel=AG-IVT
- https://www.youtube.com/watch?v=3bNt_i_bR24&ab_channel=AG-IVT
- https://www.youtube.com/watch?v=c2f1HZ1Z9UY&list=PLGlp46vbIbJ7uBqh-vaGUAN7a-Gt4-Q3_&
- https://www.youtube.com/watch?v=tL1KCp1mlCY&list=PLGlp46vbIbJ7uBqh-vaGUAN7a-Gt4-Q3_&
- https://www.youtube.com/watch?v=GxqV77AbfGw&list=PLGlp46vbIbJ7uBqh-vaGUAN7a-Gt4-Q3_&
- https://www.youtube.com/watch?v=o55UX0nPSas&list=PLGlp46vbIbJ7uBqh-vaGUAN7a-Gt4-Q3_&

Na první přednášce je také tradičně prováděno malé statistické šetření: Každý ze studentů anonymně vyplní pět údajů: 1) muž či žena (zaškrtněte); 2) barva očí; 3) druh domácího mazlíčka (nikoli počet mazlíčků, ale co ten váš domácí mazlíček je: např. křeček, kniha, apod.; 4) výška v cm; 5) počet sourozenců v rodině, do které jste se narodili (= počet dětí v rodině včetně vás samotných). Výsledky tohoto výzkumu si projdeme na cvičení, a také je vidíte v souboru 01cvic-obleky-a-anketa.xlsx, kde se můžete podívat na hodnoty měření a jejich průměr a rozptyl v minulých letech.

Zbyde-li na přednášce čas, začněte přednášku číslo 2!!!!!!!!

1.2 Cvičení 01: Zpracování souboru měření – průměr

Na tomto cvičení se výuka zhruba odehrává podle slajdu 01cviceni-znak-a-prumer.pptx, ale za diskrétní proměnnou zpracovávanou bereme většinou počet dětí v rodině, za intervalovou proměnnou bereme většinou výšku studentů. Pokud cvičení následuje hned po přednášce, lze vzít hodnoty souboru z loňského roku, nebo v souboru 01cvic-obleky-a-anketa.xlsx jsou data o fiktivním počtu prodaných obleků a data o fiktivní výšce u 200 zaměstnanců jisté firmy (zajímavější je asi projít data studentů z minulého roku).

- Statistická jednotka - elementární jednotka podrobená zstatistickému zpracování (např zaměstnanec, student, firma, věc). Jedna zpracovávaná jednotka má zpravidla několik statistických znaků

- Statistický znak = (stat. proměná) - konkrétní vlastnost stat. jednotky (věk zaměstnance, mzda zaměstnance, zaměstnancovo vzdělání,...)

    1. kvantitativní znak (quantity = množství)
       Lze vyjádřit číselně (počet členů v domácnosti, spotřeba vody,...)
       Kvantitativní znaky často dále dělíme na:
        - diskrétní znaky ... nabývají oddělených číselných hodnot (N), např. počet členů domácnosti, počet výrobků)
        - spojité znaky ... nabývají hodnot z intervalu, např. spotřeba vody, doba čekání na příchod zákazníka
    2. kvalitativní = nominální = kategoriální znak
       Vyjadřuje se slovně (nomen = jméno, název) nebo subjektivním číslem
       Kvalitativní znaky dělíme na:
        - alternativní ... nabývají dvou hodnot (ano-ne, muž-žena, pravda-lež)
        - množné ... nabývají 2 a více hodnot (vzdělání: ZŠ, SŠ, VŠ, Ph.D.)
        - ordinální ... vyjádřené subjektivní stupnicí (míra spokojenosti s výrobkem vyjádřena na číselné škále 1- hodně, 5- vůbec ne, známka ve škole)

       I kvalitativní znaky lze vyjádřit číslem a zpracovat počítačem
        - alternativní ... např ano = 1, ne = 0
        - množné ... např ZŠ = 1, SŠ = 2, VŠ = 3, Ph.D. = 4
        - ordinální ... už je vyjádřeno číslem na stupnici (např 1 až 5)

       Ovšem tyto číselné hodnoty jsou subjektivní, např 2 minus 1 je číselně to samé jako 3 minus 2, přesto nelze říci, že existuje stejný odstup mezi "rozhodně ano" a "spíše ano" jako mezi "nevím" a "spíše ano" (nebo ve škole nelze říci, že mezi známkou 1 a 2 je hodnotově stejný rozdíl jako mezi 4 a 5)

Příklad na ZŠ - práce v hodině

- kvantitativní znaky ... počet sourozenců, výška v cm,velikost nohy

- kvalitativní znaky ... barva očí, chlapec/dívka, oblíbený předmět

Jak získáme data? Měřením nebo dotazníkem.

- Základní soubor ... soubor všech jednotek, na kterých má smysl sledovat určité znaky = proměnné. Zpravidla je velmi obsáhlý, někdz nekonečný, tj. změřit všechny jednotky je často nákladné nebo neproveditelné.
  A proto provádíme tzv.
- Výběrové šetření ... pro získání informací ze základního souboru vybereme jenom několik jednotek - měřením či dotazníkem. Získáme tzv. výběrový soubor

  Tento výběrový soubor by měl bát získán z tzv. reprezentativního vzorku populace = z takové množiny vybraných jedinců, který je věrnou zmenšeninou populace, má tedy stejné vlastnosti. Výběr nestraní, žádnému jednotlivci nebo skupině, tvoří ho jednotky pro základní soubor typické.
  (Získat takový nestranný vzorek může být dost náročné)

Máme 3 druhy průměru, které můžeme počítat – jejich vysvětlení a zdůvodnění viz cvičení.

1. Aritmetický průměr hodnot: $\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$
2. Geometrický průměr hodnot: $\overline{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$
3. Harmonický průměr hodnot: $\overline{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$

Úloha 1.1 *50 studentů psalo test z pravděpodobnosti. Jejich bodové zisky byly následující. 5 studentů získalo 4 body, 10 studentů 6 bodů, 12 studentů 8 bodů, 15 studentů 11 bodů a zbylí studenti 12 bodů. Vypočtěte v excelu aritmetický průměr bodů.*

Úloha 1.2 *Hodnoty růstu firmy v procentech za posledních 5 let byly 101,3%, 108,5%, 100,6%, 98,7% a 102,3%. Vypočtěte průměrný roční nárůst za dané pětileté období.*

Úloha 1.3 *Slon šel na vycházku po obvodu svého čtvercového výběhu o straně 2 km, po jedné straně šel rychlostí 1 km/h, druhou rychlostí 2 km/h, třetí rychlostí 4 km/h, a poslední opět 1km/h. Jaká byla jeho průměrná rychlost během jeho vycházky?*

Odpovědi na otázky a některá cvičení viz 14.1.

Pokyny k jazyku R ignorujte, to je taková alternativa k Excelu, jazyk R doporučuji používat jako dobrou kalkulačku (musíte nainstalovat u sebe, manuály k matematickým funkcím a operacím najdete na internetu i v češtině).

Ve cvičení bude ještě čas začít slajdy 02, přesněji 02cviceni-popisna-statistika.xlsx, a zde jsou úkoly k příkladu s obleky, namísto kterého zpravidla děláme příklad s počty dětí v rodině – najděte četnosti a zpracujte podle úkolů na straně 3 slajdů ... po a),b) pokračujte s částí e) a nalezením kvantilů. Části c),d) se asi stihnou na cvičení druhém.

2 Týden 02: Popisná statistika II

2.1 Přednáška 02: Statistická a axiomatická definice pravděpodobnosti

Ve slově pravděpodobnost vidíme, že se jedná o něco podobného pravdě, nebo blízké pravdě. Při hledání odpovědi na otázku, co je to pravda, bychom asi slyšeli řadu odpovědí. Na tuto otázku se například zeptal i Pilát Ježíše Krista, když ho vyslýchal před jeho popravou. Neměl dost trpělivosti počkat si na odpověď, kterou už dříve Ježíš řekl svým učedníkům (Jan 14,6 – Bible): Já jsem ta cesta, pravda i život, nikdo nepřichází k Otci než skrze mne. Všeobsáhle mluvící apoštol Jan ve svém evangeliu také říká (Jan 1,17): Milost a pravda se stala skrze Ježíše Krista. Tj. pravda, to nejsou jen slova, ale pravdou lze nazvat též skutečnost (věci, které se odehrály – v pojetí Bible ovšem pravda je něco víc než jen to, co se odehrálo, ale ve slově pravda je obsažena i věrnost, že v životě Ježíše Krista byl Pán Bůh věrný vůči nám lidem). Tedy

- Pravda = skutečnost.
- Pravda = věrný či přesný popis skutečnosti. Z matematického hlediska se jedná i o zákonitosti, které stojí za skutečností, např. $2 + 2 = 4$. Z pohledu statistiky se může jednat o záznamy srážek v úhrnu za každý den na daném meteorologickém stanovišti.

V tomto předmětu se budeme zabývat tou částí pravdy, která souvisí se druhým uvedeným bodem: popisem skutečnosti, zejména tedy popisem měření číselných (kvantitativních) veličin, i když někdy lze matematicky zpracovat i veličiny kvalitativní (kvalitu či spokojenost s kvalitou dnes často vyjadřujeme i na číselné stupnici, kde např. 1 = velmi dobrá kvalita, 2 = spíše dobrá kvalita, 3 = průměr, 4 = spíše horší kvalita, 5 = špatná kvalita). Přitom

- Ve statistice (a statistické pravděpodobnosti) většinou jde o popis veličiny **a posteriori**[1], tj. na základě měření či zkušenosti (slovo zkušenost je pokusem o překlad slova empirie – empirické poznání je poznání, které můžeme číselně změřit či zaznamenat, např. informace o tom, jak nám v našem impériu prší).
- V pravděpodobnosti se jedná o popis veličin **a priori**[2], kdy na základě teoretických informací o povaze daného experimentu chceme popsat matematickým aparátem, jak nám v našem impériu budou padat čísla na kostce, líce či ruby na minci, apod. ještě dříve, než k měření dojde.

V Této přednášce se budeme věnovat dvěma definicím (pojetím) pravděpodobnosti.

Definice 2.1 *Statistickou pravděpodobností náhodného jevu A, který při opakování experimentu či měření za stejných vstupních podmínek nastává jen v některých případech,*

[1] Z latinské předložky post či posteá, což znamená potom, poté.

[2] Z latinského prior = dřívejší, tj. a priori = dříve než, předem.

definujeme jako takové reálné číslo, ke kterému se blíží relativní četnost výskytu jevu A, pokud celý experiment opakujeme nekonečněkrát, tj.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}.$$

Předností této definice je fakt, že pokud jsme schopni dostatečně zajistit, aby měření experimentu bylo vykonáno vždy za stejných vstupních podmínek, máme predikci neboli předpověď pravděpodobnosti výskytu jevu A podloženu reálným měřením. Slabinou definice je to, že přesnou hodnotu limity nikdy nejsme schopni experimentálně zjistit – experiment nelze opakovat nekonečněkrát. Nicméně, při dostatečně velkém n lze tuto pravdě podobnost rozumně odhadnout.

Příklad 2.1 *Jaká je pst náhodného jevu A: při hodu kostkou padne šestka?*

Při statistickém určení psti vycházíme z opakování experimentu, hodíme tedy

- desetkrát, a pro $n = 10$ dostaneme $P(A) \doteq \frac{3}{10} = 0{,}3$;
- stokrát, a pro $n = 100$ dostaneme $P(A) \doteq \frac{20}{100} = 0{,}2$;
- tisíckrát, a pro $n = 1000$ dostaneme $P(A) \doteq \frac{170}{1000} = 0{,}17$; stále se nejedná o přesnou hodnotu, ale hodnotu blízkou hledané limitě.

Zatímco právě popsané statistické pojetí psti nebudeme zanedbávat (koneckonců, v řadě případů máme k popisu budoucího chování veličiny pouze její minulá měření), ještě častěji budeme užívat pojetí axiomatické, které je představené v následující definici (pomůcka pro zapamatování definice: potřebujete si pamatovat sedm faktů: 1) co je to Ω; 2,3,4) tři axiomy (1), (2), (3) pro náhodné jevy A_i; 5,6,7) tři axiomy (P1), (P2), (P3) pro pst P, která je definována jako zobrazení určitých vlastností).

Definice 2.2 *Pravděpodobnostním prostorem nazveme uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, kde*

- *Ω je tzv.* **základní prostor** *neboli množina všech možných elementárních výsledků ω_i daného měření či experimentu;*
- *$\mathcal{A}$ je tzv.* **jevové pole** *neboli taková třída podmnožin A_i (tyto podmnožiny nazýváme* **náhodné jevy***) množiny Ω (nemusí to být nutně všechny podmnožiny množiny Ω, ale takové, ...), že platí axiomy*
  - *(1) $\Omega \in \mathcal{A}$;*
  - *(2) pro $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ také $A_1 - A_2 \in \mathcal{A}$ (třída $\mathcal{A}$ je uzavřená na rozdíl náhodných jevů);*
  - *(3) pro $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ také $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ (třída $\mathcal{A}$ je uzavřená na sjednocení nekonečně mnoha náhodných jevů $A_1, A_2, \dots$).*
- *$P : \mathcal{A} \to \langle \prime; \infty \rangle$ je zobrazení, které nazveme* **pravděpodobností na jevovém poli** *$\mathcal{A}$, když pro ně platí axiomy*

(P1) $P(\Omega) = 1$ *(axiom normovanosti);*

(P2) $P(A) \geq 0 \ \ \forall A \in \mathcal{A}$ *(axiom nezápornosti);*

(P3) *pro navzájem neslučitelné jevy* ($A_i \cap A_j = \emptyset$ *při* $i \neq j$) *platí*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(axiom součtu pravděpodobností nekonečně mnoha neslučitelných náhodných jevů).

Právě uvedená axiomatická definice umožňuje korektně definovat všechny různé pravděpodobnostní modely – budeme se jimi zabývat v následující přednášce. Nejprve ovšem několik poznámek k ní:

Poznámka 1. Axiom (3) u jevového pole $\mathcal{A}$ lze vyslovit i pro konečně mnoho náhodných jevů $A_1, A_2 \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Nemusíme ho ovšem uvádět jako zvláštní axiom, plyne totiž z uvedeného třetího axiomu volbou $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots$: pro $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ také $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ (třída $\mathcal{A}$ je uzavřená i na sjednocení konečně mnoha náhodných jevů $A_1, A_2, \ldots$).

Poznámka 2. Axiom (P3) u pravděpodobnosti P lze vyslovit i pro konečně mnoho navzájem neslučitelných náhodných jevů $A_1, A_2 \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Nemusíme ho ovšem uvádět jako zvláštní axiom, plyne totiž z uvedeného třetího axiomu volbou $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots$:

$$(A_i \cap A_j = \emptyset \ \text{ pro } \ i \neq j) \implies P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Poznámka 3. K jednotlivým axiomům psti:

ad P1) Pravděpodobnost jevu Ω je rovna jedné, protože Ω obsahuje všechny možné výsledky měření, které mohou nastat. Jev Ω proto někdy označujeme jako jev jistý, protože nastane vždy.

ad P2) Pravděpodobnost náhodného jevu A bude vždy číslo nezáporné.

ad P3) Jednotlivé náhodné jevy se navzájem vůči sobě vztahují podmínkou aditivity (= podmínkou sečtitelnosti): Pokud výskyt jevu A_1 se vylučuje s výskytem jevu A_2, pak pst jevu $A_1 \cup A_2$ lze vyjádřit jako součet pstí dílčích jevů A_1, A_2. Tento princip je vlastně analogický principu součtu v kombinatorice. A podobně jako kombinatorice počet sjednocení dvou množin konfigurací, které mají některé prvky ve společném průniku, nelze už vyjádřit jako součet prvků dílčích množin, ale musíme brát v úvahu jejich průnik a užít princip inkluze a exkluze, tak i u pravděpodobnosti obecného sjednocení jevů, z nichž dílčí dvojice jevů nemají prázdný průnik, musíme podobně užít složitější vzorec – budeme se mu věnovat ve třetí přednášce.

Kromě daných tří axiomů psti platí i další vlastnosti (viz následující dvě věty). Ty už nepokládáme za axiomy, protože jejich zdůvodnění plyne z axiomů už uvedených.

Věta 2.1

$$\forall A, B \text{ z jevového pole } : \quad A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B).$$

Důkaz: Množinu B lze rozdělit na dvě disjunktní části A, $B - A$, pro které na základě axiomu (P3) platí: $P(B) = P(A) + P(B - A)$. A protože $P(A) \geq 0$, $P(B - A) \geq 0$ na základě (P2), vidíme, že $P(B)$ získáme jako součet dvou nezáporných čísel, z nichž jedním je číslo $P(A)$ – proto platí tvrzeníčko věty. □

Příklad 2.2 *Náhodný jev A udává, že při hodu vyváženou kostkou padne počet ok roven šesti. Jaká je jeho pst?*

Řešení: tuto pst nezjišťujeme experimentem, ale na základě teoretických předpokladů: množina všech možných elementárních výsledků je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ Všechny tyto výsledky nastávají stejně často. Tedy

$$P(\omega_6) = \frac{1}{6} = 0{,}1666666666666666 atd.$$

Příklad 2.3 *Náhodný jev A udává, že při hodu dvěma kostkami, červenou a modrou, padne součet ok roven pěti. Jaká je jeho pst?*

Řešení: viz přednáška.

Věta 2.2 *Pro každý náhodný jev A a jev k němu opačný*[3] $\overline{A}$ *platí* $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Důkaz: Celou množinu Ω lze rozdělit (rozložit) na dvě disjunktní množiny A, $\overline{A}$. Tedy na základě (P1) a (P3) platí $P(\Omega) = 1 = P(A) + P(\overline{A})$. □

Právě uvedená větička bude užitečná, namísto výpočtu $P(A)$, když bude pro nás jednodušší vypočítat pst $P(\overline{A})$ jevu opačného, a pak vyjádříme $P(A)$ jako $1 - P(A)$.

Příklad 2.4 *Jaká je pst, že při náhodném vybrání čtyř karet z balíčku dvaatřiceti mariášových karet je aspoň jedna karta eso?*

Řešení viz přednáška: a) pomocí jevu A, b) pomocí opačného jevu $\overline{A}$; c) pomocí jevu A podle metody Matouše Hájka.

Příklad 2.5 *Jaká je pst, že pokud hodíme současně pětikorunou, desetikorunou a dvacetikorunou, padne dvakrát líc a jednou rub?*

Řešení viz přednáška.

Příklad 2.6 *Házeme současně pěti kostkami, a sice červenou, modrou, zelenou, žlutou a bílou. Jaká je pst, že právě na dvou z pěti kostech padne počet ok šest?*

[3] V teorii psti mají všechny množinové pojmy svůj terminologický ekvivalent. Množinově je $\overline{A}$ doplňkem množiny A, ale v teorii psti mluvíme o $\overline{A}$ jako o jevu opačném.

Řešení viz přednáška.

Předchozí čtveřice příkladů dobře ilustruje některé základní problémy a pojmy při popisu náhodnosti zatím jen u házení kostkou nebo mincí. Než kapitolu ukončíme, tak ještě série dvou příkladů, která snad nejlépe ilustruje rozdíl mezi pstí statistickou (empirickou) a pstí axiomatickou (teoretickou):

Příklad 2.7 *Byla získána data tím způsobem, že každá z dvaceti osob hodila čtyřikrát korunou (měříme tedy hodnotu veličiny X = počet líců ve čtyřech hodech korunou). V tabulce 14.18 jsou zaznamenány počty líců ve čtyřech hodech u každé z osob. Určete empirické rozdělení pravděpodobnosti veličiny X.*

Tabulka 2.1: K př. 2.7: Naměřené hodnoty veličiny X.

osoba	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X-hodnota	3	1	1	3	1	2	0	2	4	4
osoba	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X-hodnota	1	2	2	1	2	1	2	3	3	3

Řešení: Nejprve si všimněme, že naše veličina X nabývá pouze pěti hodnot, a to $0, 1, 2, 3$ *nebo* 4. Zpracování této úlohy je založeno na pojmu **četnost**, který udává počet výskytů dané hodnoty v našem souboru. Například ze všech dvaceti měření je jen jedna hodnota 0, tj. veličina X nabývá hodnoty 0 s četností 1 (budeme značit $c(0) = 1$). Hodnota 1 se vyskytuje s četností 6, atd. Všechny četnosti jsou zaznamenány v tabulce 2.2:

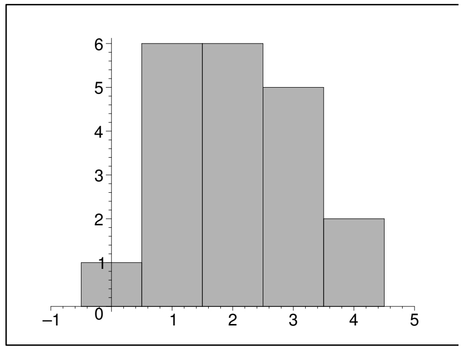
Tabulka 2.2: K př. 2.7: Tabulka empirických četností hodnot veličiny X.

X-hodnota	0	1	2	3	4
četnost	1	6	6	5	2

Musí platit jednoduchá kontrola, že součet všech četností ve druhém řádku tabulky je roven počtu hodnot (v našem případě 20).

Uvedené četnosti lze také znázornit v tzv. **histogramu četností** - viz obr. 2.1, kde výšky jednotlivých obdélníčků jsou rovny konkrétním četnostem a délka základny každého z obdélníčků je rovna 1.

K určení statistického (či empirického = naměřeného) rozdělení pravděpodobnosti nám zbývá poslední krok – vydělit četnosti délkou souboru (= počtem hodnot), v našem případě



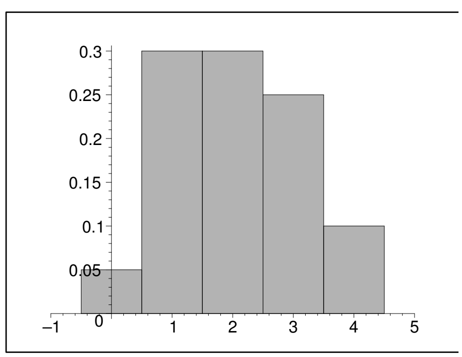
Obrázek 2.1: K příkladu 2.7: Histogram četností veličiny X.

číslem 20*. Tak dostaneme tabulku (2.3) relativních četností vzhledem k počtu měření. Tyto relativní četnosti můžeme prohlásit za naměřené (statistické) psti různých hodnot veličiny* X*.*

Tabulka 2.3: K př. 2.7: Funkce $p(x)$ empirického rozdělení pravděpodobnosti veličiny X.

X-hodnota	0	1	2	3	4
p(x)	0,05	0,3	0,3	0,25	0,1

Součet těchto relativních četností je roven jedné, jak bychom asi čekali.



Obrázek 2.2: K př. 2.7: Histogram pravděpodobností veličiny X.

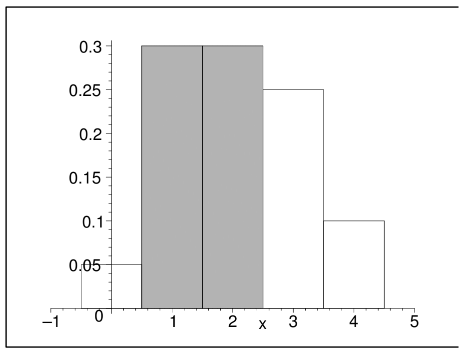
Jediný rozdíl mezi obrázky 2.1 a 2.2 je v tom, že v prvním případě se na osu y nanáší hodnoty četnosti a ve druhém případě pravděpodobnosti. Na pravděpodobnostním histogramu je zajímavé to, že součet obsahů všech obdélníků na obrázku je roven jedné.

Obrázek 2.2 tedy představuje první krok k určení pro určení psti v tom prvním představeném, statistickém pojetí. Pro naprostou přesnost bychom opět museli provést limity relativních četností pro celkový počet hodů jdoucí k nekonečnu. V této chvíli se ovšem spokojíme jen s tímto přibližným, ne naprosto přesným statistickým určením psti.

Pokud chceme s využitím histogramu pravděpodobnosti v našem diskrétním případě vyčíslit třeba pravděpodobnost,že při 4 *hodech mincí padl líc jednou nebo dvakrát, dostáváme*

$$P(X \in < 1, 2 >) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6,$$

což je rovno součtu obsahů obdélníků histogramu nad hodnotami 1 *a* 2 *(viz obrázek):*



Nyní se věnujme popisu celého jevu teoreticky, aniž bychom jakkoli házeli korunou a počítali počty líců, tj. bez měření. Při popisu nám pomůže pst axiomatická (teoretická):

Příklad 2.8 *Nalezněte teoretické rozdělení veličiny X, která udává počet líců při čtyřech hodech mincí.*

Řešení: Podrobíme naši situaci teoretickým úvahám za předpokladu, že mince je vyvážená a vyrobená ze stejnorodého materiálu. V tabulce 2.4 jsou uvedeny všechny možné výsledky čtyř hodů mincí (druhý sloupec udává vždy počet líců v dané variantě):

Bystrému pozorovateli asi neušlo, že všech možných výsledků je 16*. A protože líc padá s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, každý z těchto* 16 *výsledků je stejně pravděpodobný. A proto můžeme z tabulky určit četnosti počtu líců (viz tabulka 2.5)*

a vydělením hodnotou 16 *pak i relativní četnosti, které už jsou hodnotami hledané teoretické pravděpodobnostní funkce $p(x)$ (viz tabulka 2.6).*

Příslušný histogram pravděpodobnosti je znázorněn na obrázku 2.3.

K teoretickému rozdělení pravděpodobnosti v příkladu 2.8 lze jednoduše sestrojit teoretické rozdělení četnosti, a dokonce si můžeme vybrat, kolikrát se má experiment „prakticky“ provádět. Například pro 128 opakování experimentu čtyř hodů mincí má teoretické rozdělení četnosti stejný tvar jako pravděpodobnostní histogram 2.3, jen na osu y vynášíme hodnoty reprezentující četnost $c(i)$ (obrázek zde už není uveden, od 2.3 se liší jen měřítkem svislé osy):

Tabulka 2.4: K př. 2.8: přehled všech možných výsledků při čtyřech hodech mincí.

výsledek	počet líců	výsledek	počet líců
LLLL	4	LRRL	2
LLLR	3	RLRL	2
LLRL	3	RRLL	2
LRLL	3	LRRR	1
RLLL	3	RLRR	1
LLRR	2	RRLR	1
LRLR	2	RRRL	1
RLLR	2	RRRR	0

Tabulka 2.5: K př. 2.8: Tabulka teoretických četností hodnot veličiny X.

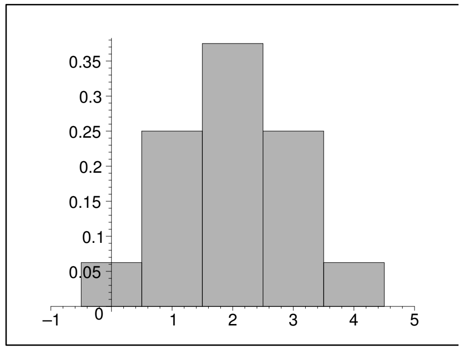
X-hodnota	0	1	2	3	4
četnost	1	4	6	4	1

Tabulka 2.6: K př. 2.8: Funkce $p(x)$ teoretického rozdělení pravděpodobnosti veličiny X.

X-hodnota	0	1	2	3	4
p(x)	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

$$
\begin{aligned}
c(0) &= p(0) \cdot 128 = 0{,}0625 \cdot 128 = 8 \\
c(1) &= p(1) \cdot 128 = 0{,}25 \cdot 128 = 32 \\
c(2) &= p(2) \cdot 128 = 0{,}375 \cdot 128 = 48 \\
c(3) &= p(3) \cdot 128 = 0{,}25 \cdot 128 = 32 \\
c(4) &= p(4) \cdot 128 = 0{,}0625 \cdot 128 = 8
\end{aligned}
$$

Čili kdybychom učinili 128 pokusů, z nichž jeden sestává ze čtyř hodů mincí, náš nejlepší teoretický odhad je ten, že v 8 pokusech by nepadl žádný líc, ve 32 pokusech



Obrázek 2.3: K př. 2.8: Histogram pravděpodobnosti teoretického rozdělení veličiny X.

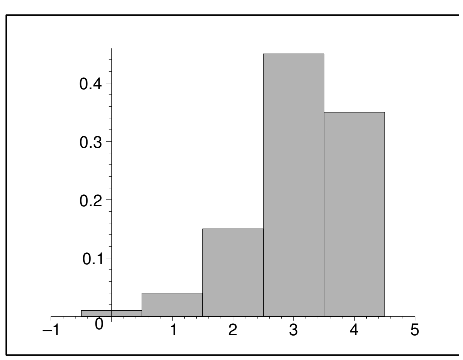
jeden líc, atd.

Teoretické rozdělení pravděpodobnosti je jakési očekávané rozdělení, které nastane za jistých předpokladů. Například při pokusu 4 hodů mincí těmito předpoklady jsou:

- Mince je vyrobena tak, že rub a líc padá se stejnou pravděpodobností.
- Mincí je házeno „normálně“, ne nějakým divným stylem, který by zvýhodňoval buď rub, nebo líc.
- Každý účastník pokusu pravdivě nahlásí své výsledky.

Rozdělení získané empiricky v příkladu 2.7 „zhruba“ odpovídá teoretickému rozdělení z příkladu 2.8. Zdá se tedy rozumné uzavřít, že se světem je všechno v pořádku: mince je pravděpodobně dobře vyvážená, lidé jí házou dobrým způsobem a nahlašují výsledky poctivě.

Pokud by data z příkladu 2.7 vedla na empirické rozdělení pravděpodobnosti uvedené na následujícím obrázku, bylo by patrné, že tři nebo čtyři líce padaly ve čtyřech hodech mnohem častěji, než jsme očekávali, na úkor výsledků 0 líců, 1 líc, 2 líce. To by zpochybnilo některý z našich předpokladů. Uzavřeli bychom, že buď je mince nějak divně vyvážená, nebo lidé jí házejí divným stylem:



2.2 Shrnutí

Při popisu náhodnosti jevů, které se mohou odehrát, vycházíme ze dvou možných popisů: statistická pst vlastně popisuje budoucí náhodnost na základě minulého měření – i když není stoprocentně přesná, je založena na pozorování, měření dané veličiny, a tedy se snaží předpovědět chování veličiny podle toho, jak se (za analogických vnějších podmínek experimentu) chovala dosud. Příklad: pst toho, že na kostce padne šestka, stanovíme na základě toho, že danou kostkou hodíme dostatečněkrát a sledujeme výsledky hodu.

Naproti tomu, axiomatická definice psti se snaží podpořit popis náhodnosti který je teoretický – nevychází z měření, ale z teoretických předpokladů o tom, jak se bude veličina, kterou měříme, při zopakování analogických vnějších podmínek experimentu, chovat. Tyto teoretické předpoklady jsou sestrojeny na základě toho, že při měření veličiny zajistíme takové podmínky, ze kterých dané teoreticky spočtené psti vychází.

Porovnání obou pojetí je vidět na příkladech 2.7 a 2.8. Na obrázku 2.2 vidíme histogram pstí získaných měřením = empiricky = statisticky, na obrázku 2.3 histogram pstí získaných pouze teoretickými úvahami. Obě pojetí se při popisu náhodnosti používají: někdy máme k dispozici měření konkrétních hodnot nebo je můžeme snadno provést, jindy měření nemáme možnost zjistit a musíme se omezit na odhad dílčích pstí na základě předpokládaného charakteru a podmínek dané situace.

2.3 Otázky a cvičení 02: Rozptyl, intervalové četnosti, kvantily

U následujících výroků rozhodněte, zda se jedná o výrok pravdivý či nepravdivý.

Otázka 2.1 *Pravděpodobnost se zabývá otázkou: pokud vycházíme z jistého stavu světa, jaké důsledky budou následovat?*

Otázka 2.2 *Empirické rozdělení pravděpodobnosti je rozdělení, které získáme z naměřených dat.*

Otázka 2.3 *Empirické pravděpodobnosti jsou vlastně relativní četnosti.*

Otázka 2.4 *Třetí axiom psti je řečen jen pro sjednocení nekonečně mnoha jevů, nelze ho formulovat pro konečně mnoho disjunktních jevů.*

Otázka 2.5 *Pst opačného jevu $\overline{A}$ k jevu A vypočteme, když $P(A)$ vynásobíme jednou polovinou.*

Otázka 2.6 *Prvky jevového pole $\mathcal{A}$ jsou všechny možné podmnožiny A množiny Ω, které existují.*

Otázka 2.7 *Pro každé dva náhodné jevy platí: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

Plán cvičení 02: Hlavní náplní cvičení je příklad na samostatné četnosti analogický úloze 2.1 a intervalové četnosti analogický úloze 2.2. Doplněn je příklad na vážený průměr, který je důležitý. Zhruba osnova:

- Úloha 2.1 na statistický popis velikostí obleků, nebo lépe: úloha na statistický popis počtu dětí v rodině (soubor získaný v anketě na přednášce). V rámci tohoto příkladu budou vysvětleny **dva vzorce pro výpočet rozptylu**, ještě v textu není zpracováno – viz cvičení!! ... dodělány úkoly ze str. 3 souboru 02cviceni-popisna-statistika.xlsx.

- Úloha 2.2 ceny bytů v korunách za metr čtvereční ... intervalové rozdělení četností (nebo lépe: statistický popis výšku studenta ze souboru získaného na přednášce); speciálně vysvětlen **vzorec pro výpočet kvantilů při intervalovém rozdělení četností**; ... udělejte úkoly ze str. 4 souboru 02cviceni-popisna-statistika.xlsx;

- V předchozí úloze vypočtěte zhruba **průměr a rozptyl měření, pokud jsou zadány jen intervalové četnosti, a nikoli už původní hodnoty**;

- V úloze 2.2 (nebo jí analogické o výšce studenta) určete **medián, modus a aritmetický průměr** ... jedná se o tři různé „typy průměru“ ... příklad analogický str. 5-6 slajdů 02cviceni-popisna-statistika.xlsx.

- V úloze o výšce studenta určete celkovou průměrnou výšku, znáte-li pouze průměrnou výšku mužů a jejich počet a průměrnou výšku žen a jejich počet ... musíme spočítat tzv. **vážený průměr dvou skupin** závislý na počtu měření v každé z obou skupin ... slajdy 02cviceni, str. 7.

Úloha 2.1 *V prodejně obleků prodali během týdne 46 obleků. Velikosti prodaných obleků byly následující: 39 41 40 42 41 40 42 42 40 43 42 41 43 39 42 41 42 39 41 37 43 41 38 43 42 41 40 41 38 40 40 39 41 40 42 40 41 42 40 43 38 39 41 41 42 a 45.*

a) *sestavte histogram četností a polygon četností z těchto dat*

b) *sestavte tabulku relativních četností, kumulativních absolutních četností, kumulativních relativních četností pro tato data*

c) *určete modus a medián, průměr, rozptyl a směrodatnou odchylku velikostí obleků*

d) *určete variační rozpětí a mezikvartilové rozpětí velikosti obleků*

e) *určete 0,45 kvantil, 0,57 kvantil, 0,869 kvantil... (pomocí kumulativních relativních četností)*

Úloha 2.2 *V největších 27 městech České republiky jsou následující ceny bytů v korunách za m*^{2}*. 12 736, 12 975, 13 829, 14 316, 14 546, 14 897, 16 343, 16 369, 17 217, 17 327, 17 332, 18 200, 19 221, 20 162, 20 319, 20 864, 21 456, 21 794, 22 083, 22 215, 22 425, 22 768, 24 567, 25 078, 25 436, 29 031, 45 061. Proveďte intervalové rozdělení četností (relativní, kum. absolutní, kum. relativní), průměr, rozptyl, směrodatnou odchylku, variační rozpětí, 0,25-kvantil a 0,85- kvantil.*

Úloha 2.3 *Politický představitel učinil výzkum u 77 lidí o kvalitě své práce. Každý z dotázaných (cizím slovem se takovým lidem říká respondenti, protože to, co dělají je „respond“ – odpovídají) hodnotil číslem ze stupnice* 1 *až* 5*, kde* 1 = *hrozná kvalita práce,* 5 = *vynikající kvalita práce. Výsledky jsou v tabulce:*

2	1	3	3	2	1	3	4	2	1	4
1	4	1	5	3	4	1	1	2	1	2
2	3	1	1	1	2	1	3	4	4	5
1	4	1	4	4	4	2	4	2	3	5
3	1	1	1	5	5	3	2	5	5	3
4	1	3	4	4	3	3	4	3	3	1
4	5	2	3	5	5	4	5	3	4	4

Určete

a) rozdělení četnosti a rozdělení pravděpodobnosti kvality představitelovy práce;

b) střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku této kvality.

Úloha 2.4 *V případě spojité veličiny je situace trochu složitější, protože každá hodnota měření je většinou jiná než všechny ostatní*[4]*. V tabulce četností by tedy byl stejný počet sloupců jako je hodnot měření. To by nám žádnou přehlednou informaci nesdělilo. Zpravidla rozdělíme tedy nejprve reálnou osu na několik (7 až 10) podintervalů (většinou stejné délky) a provedeme tzv. intervalové rozdělení četností, kde četnosti* $c(\nu_i)$ *udávají, kolik hodnot měření padlo do intervalu obsahujícího hodnotu* ν_i *(tato hodnota je zpravidla středem daného intervalu).*

Uvažujme tento příklad: byla získána data (měřeno v sekundách od okamžiku $t = 0$*) udávající okamžiky, kdy kolem určitého místa projíždělo auto - viz tabulka (čtená po řádcích):*

1,5	3,9	7,3	13,7	17,4	22,2	24,7	30,2	30,5	31,2
41,9	42,3	44,5	61,9	62,4	64,1	73,4	81,4	86,1	92
92,7	106,3	111,5	112,1	113	118,9	122,2	122,4	122,6	

Řekněme, že nás z jistého důvodu zajímá doba mezi dvěma po sobě jdoucími průjezdy auta – příslušné hodnoty této veličiny (označme ji třeba X*) získáme odečtením vždy dvou po sobě jdoucích okamžiků průjezdu:*

1,5	2,4	3,4	6,4	3,7	4,8	2,5	5,5	0,3	0,7
10,7	0,4	2,2	17,4	0,5	1,7	9,3	8,0	4,7	5,9
0,7	13,6	5,2	0,6	0,9	5,9	3,3	0,2	0,2	

[4]Někdy se tato situace, že téměř každá naměřená hodnota je jiná než ty ostatní, objeví i u rozdělení diskrétního – pak postupujeme obdobně a provádíme též intervalové rozdělení četností, i když naměřené hodnoty jsou diskrétní, např. ikdyž to jsou pouze přirozená čísla.

Nyní rozdělíme reálnou osu na třídy četností + vybereme reprezentanty tříd (většinou středy tříd, až na krajní intervaly, které mají (buď jeden nebo oba) nekonečnou délku):

interval (=třída)	$\langle 0;3)$	$< 3;6)$	$< 6;9)$	$< 9;12)$	$< 12;15)$	$< 15;\infty)$
reprezentant třídy	*1,5*	*4,5*	*7,5*	*10,5*	*13,5*	*16,5*

a) *Proveďte intervalové rozdělení četností.*

b) *Spočtěte průměr a rozptyl naměřených hodnot na základě přesných hodnot měření.*

c) *Spočtěte průměr a rozptyl přibližně – pomocí četností tříd a reprezentantů tříd (místo různých x_i ve stejné třídě vezměte daného reprezentanta).*

Úloha 2.5 *Četnosti měření hodnot x_i jsou dány v tabulce:*

x_i	n_i
1	2
3	5
5	7
6	10
8	6
10	3

a) *Určete kumulativní relativní četnosti, dolní kvartil a* 0,57*−kvantil těchto hodnot.*

b) *Vypočtěte průměr a rozptyl zadaných hodnot.*

Úloha 2.6 *Intervalové rozdělení četností cen bytů za 1 metr čtvereční v ČR je dáno v tabulce:*

$\langle x_i; x_{i+1}\rangle$	n_i
$\langle 23100; 27600\rangle$	10
$\langle 27600; 32100\rangle$	7
$\langle 32100; 36600\rangle$	4
$\langle 36600; 41100\rangle$	3
$\langle 41100; 45600\rangle$	3
$\langle 45600; 50100\rangle$	2

a) *Určete kumulativní relativní četnosti, dolní kvartil a* 0,67*−kvantil těchto hodnot.*

b) *Odhadněte průměr a rozptyl zadaných hodnot.*

Úloha 2.7 *Byla získána data reprezentující cenu za metr čtvereční nového bytu v ČR:*

45061	41258	39076	35062	33 653	31235	29031	25436
25078	24567	22768	22425	22215	22083	21794	21456
20894	20319	20162	19221	18200	17332	17327	17217
16369	16343	14897	14546	14316	13829	12975	12761

a) *Určete intervalové rozdělení četností těchto hodnot.*

b) *Určete kumulativní relativní četnosti, dolní kvartil a* 0,67*−kvantil těchto hodnot.*

Úloha 2.8 **a)** *Většina dětí ve třídě A má velké problémy s matematikou, kdežto ve třídě B téměř nikdo. Přesto je průměrný výsledek počtu bodů na testech v obou třídách stejný. Jak je to možné?*

b) *Průměrný počet bodů na prověrkách u studenta* S_1*je stejný jako u studenta* S_2*. Přesto paní učitelka říká, že student* S_1 *je objektivně lepší než student* S_2*. Jak je to možné?*

Úloha 2.9 *Výsledky bodů na prověrce od dvaceti studentů jsou*

$$3, 5, 8, 2, 4, 10, 11, 4, 5, 7, 2, 4, 8, 8, 10, 1, 5, 7, 8, 2.$$

a) *Určete medián a kvartilové rozpětí těchto hodnot.*

b) *Vypočtěte průměr a odchylku počtu bodů.*

Odpovědi na otázky a některá cvičení viz 14.2.

3 týden 03

3.1 Čtyři různé modely popisu pravděpodobnosti

Následující čtyři modely pravděpodobnosti se liší svou použitelností při popisu náhodnosti. Vždy záleží na vlastnostech množiny Ω všech možných elementárních výsledků měření, které mohou nastat.

3.1.1 Klasická pravděpodobnost

Klasickou pst můžeme užít v následujících podmínkách, a užíváme ji takto:

- Ω má konečně mnoho možných elementárních výsledků,
- všechny elementární výsledky mají stejnou možnost nastat.
- Pak lze počítat pst náhodného jevu $A \in \mathcal{A}$ podle vzorce $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ (podíl počtu prvků obou množin)

Příklad 3.1 *Dvakrát hodíme hrací kostkou – jaká je pst, že součet hodnot obou hodů je roven* 5*?*

Řešení: Množina všech elementárních výsledků na dvou hodech (záleží na pořadí, ve kterém hodu co padlo) je

$$\Omega = \{[1;1],[1;2],[1;3],\ldots,[6;5],[6;6]\},$$

náhodný jev A, na který se zaměřujeme, je množina

$$A = \{[1;4],[4;1],[2;3],[3;2]\}, \quad \text{a tedy} \quad P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \doteq 0{,}1111.$$

Příklad 3.2 *Z karet na mariáš (32 karet) vybereme náhodně po zamíchání čtyři karty. Jaká je pst, že aspoň jedna z nich bude eso?*

Řešení: V množině Ω budou elementárními výsledky všechny možné čtveřice karet (ve kterých nezáleží na pořadí, ale jen na tom, jaké karty jsou v té skupině čtyř vytažených). Náhodný jev A, na který se chceme zaměřit, obsahuje všechny čtveřice, ve kterých je právě jedno eso, právě dvě esa, právě tři esa, nebo čtyři esa. Najít celkový počet prvků množiny A znamená najít počty prvků ve všech čtyřech právě popsaných navzájem se vylučujících případech a sečíst je. Vnímavý student, který absolvoval předmět Diskrétní matematika, už nyní ví a píše výsledek, protože klasická pst převede otázku psti na otázku počtu prvků:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{28}{3} + \binom{4}{2}\cdot\binom{28}{2} + \binom{4}{3}\cdot\binom{28}{1} + 1}{\binom{32}{4}} = 0{,}4305895 \doteq 0{,}4306.$$

Při výpočtu psti jevu se někdy ukazuje výhodné zapřemýšlet nad tím, zda existuje rychlejší cesta k cíli – zdá se, že nyní by existovala cesta vyčíslení opačného jevu a odečtení jeho psti od hodnoty 1, viz věta 2.2. Opačný jev $\overline{A}$ znamená, že ze čtyř náhodně vytažených karet nebude žádné eso. Pak

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}} \doteq 0{,}4306.$$

3.1.2 Geometrická pravděpodobnost

Geometrickou pst můžeme užít v následujících situacích, a užíváme ji takto:

- Ω má nekonečně mnoho možných elementárních výsledků, dokonce tak velkou, že je oblastí kladné míry (úsečkou kladné délky, plochou kladného obsahu, tělesem kladného objemu).
- všechny elementární výsledky mají stejnou možnost nastat.
- Pak lze počítat pst náhodného jevu $A \in \mathcal{A}$ podle vzorce $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ (podíl měr obou množin, tj. podle charakteru množin podíl délek, obsahů nebo objemů).

Příklad 3.3 *Tramvaj jezdí v pracovní době každých* 7 *minut. Student, který se nedívá na hodinky a přichází na zastávku tramvaje náhodně, bude určitou dobu čekat na příjezd další tramvaje. Jaká je pst, že bude čekat* 4 *a více minut?*

Řešení: Nelze počítat podle klasického modelu, protože množiny Ω, A jsou obě nekonečné; ale všimněme si, že při náhodném příchodu studenta na zastávku jsou všechny doby čekání stejně pravděpodobné, tj. splňují předpoklady geometrického modelu psti.

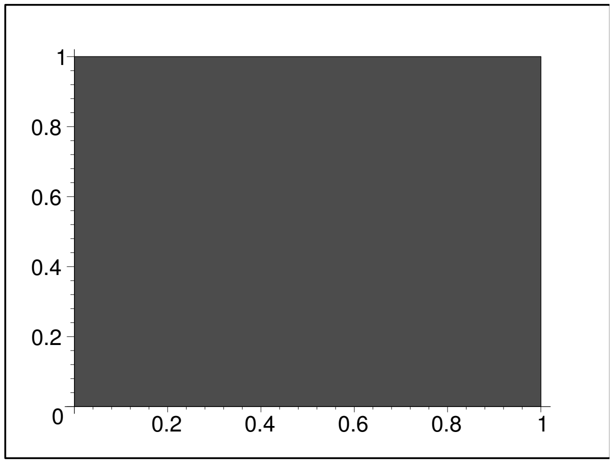
Množina všech možných výsledků je totiž $\Omega = \langle 0; 7\rangle$, náhodný jev A na který se chceme zaměřit, je $A = \langle 4; 7\rangle$ ... doba čekání na nejbližší tramvaj, která je dlouhá 4 a více minut. Díky splněným oběma předpokladům geometrického modelu psti můžeme využít délky obou množin:

$$P(A) = \frac{d(A)}{d(\Omega)} = \frac{3}{7} = 0{,}4285714 \doteq 0{,}4286.$$

Příklad 3.4 *Honza a Marek se domluvili, že se setkají na jistém místě mezi osmou a devátou hodinou, kam každý z nich v tu dobu náhodně přijde. Ale řekli si, že ten, kdo přijde první, bude na toho druhého čekat jen 15 minut, a pak odejde. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají?*

Řešení: Označme
$8 + x \ldots$ čas příchodu Honzy (v hodinách);
$8 + y \ldots$ čas příchodu Marka.

Víme, že oba přijdou určitě do devíti hodin, tedy $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Každý výsledek jejich příchodu lze vyjádřit jako uspořádanou dvojici (x, y), což lze znázornit – a uvidíme, že to bude pomocí – jako bod v rovině, jehož obě souřadnice leží v intervalu $< 0, 1 >$. Všechny tyto body modelující možný výsledek příchodů vytvářejí tedy čtverec v rovině.



Obrázek 3.4: K př. 3.4: Množina všech možných výsledků.

Tento čtverec $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ je množinou všech možných výsledků dané situace (viz obrázek 14.19).

Počet všech možných případů je sice nekonečný, ale jsme schopni spočítat obsah čtverce: $S(\Omega) = 1 \cdot 1 = 1$.

Označme dále

$A \ldots$ Honza a Marek se setkají

Příznivým případům jevu A odpovídají ty příchody (x, y) obou studentů, ve kterých se x od y liší nanejvýš o 15 minut, což je asi $\frac{1}{4}$ hodiny. Pro tyto „příznivé“ body čtverce Ω tedy musí platit nerovnost

$$|y - x| \leq \frac{1}{4}.$$

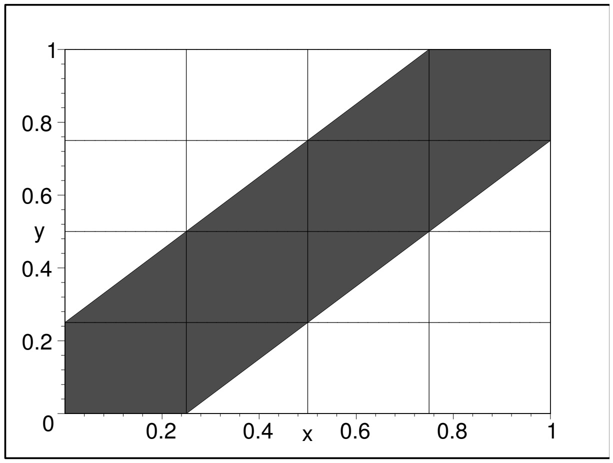
Vyřešme tuto nerovnost. Při odstraňování absolutní hodnoty musíme rozlišit dvě situace:

- *Pro $y - x \geq 0$ se znaménka nemění, tj $y - x \leq \frac{1}{4}$, odtud $y \leq x + \frac{1}{4}$.*
- *Pro $y - x < 0$ musíme při odstraňování absolutní hodnoty na levé straně nerovnosti změnit znaménka: $-y + x \leq \frac{1}{4}$, odtud $y \geq x - \frac{1}{4}$.*

Body splňující obě z uvedených nerovností získáme jako průnik polorovin každou z nerovností určených, tj. 14.20:

Jev A lze tedy vyjádřit jako množinu bodů v rovině:

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y \leq x + \frac{1}{4}, y \geq x - \frac{1}{4}\}.$$



Obrázek 3.5: K př. 3.4: Množina všech příznivých výsledků.

Příznivých případů je také nekonečně mnoho, ale jsme schopni vypočítat míru této nekonečnosti, konkrétně řečeno obsah množiny A: nejjednodušeji $S(A)$ vypočteme z grafického znázornění na obrázku 14.20, když budeme brát v úvahu rozdělení čtverce Ω na šestnáct menších čtverečků o straně délky $\frac{1}{4}$. Je vidět, že množina A zabírá plochu sedmi z těchto čtverečků, a protože $S(\Omega) = 1$, máme $S(A) = \frac{7}{16} \cdot S(\Omega) = \frac{7}{16}$.

Pravděpodobnost jevu A teď určíme jako podíl míry množiny příznivých případů a míry množiny všech možných případů:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{\frac{7}{16}}{1} = \frac{7}{16} = 0{,}4375.$$

3.1.3 Diskrétní pravděpodobnost

Diskrétní pst můžeme užít v následujících situacích, a užíváme ji takto:

- Ω má konečně mnoho možných elementárních výsledků, nebo je jich stejně najko přirozených čísel (říkáme, že Ω je množina nejvýše spočetně nekonečná).
- všechny elementární výsledky mají obecně RŮZNOU možnost nastat (elementární výsledek ω_i nastane s pstí $p(\omega_i)$).
- Pak lze počítat pst náhodného jevu $A \in \mathcal{A}$ podle vzorce

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$$

V případě diskrétní psti tři axiomy z předchozí kapitoly přecházejí v následující axiomy pro pstní funkci p:

1. $\sum_{w_i \in \Omega} p(\omega_i) = 1$ (axiom normovanosti),
2. $p(\omega_i) \geq 0$ pro každý elementární výsledek $\omega_i \in \Omega$ (axiom nezápornosti),
3. $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$ (axiom součtu pstí neslučitelných jevů, protože dílčí výsledky ω_i jsou navzájem neslučitelné).

Příklad 3.5 *Házeme hrací kostkou tak dlouho, až poprvé padne šestka; pak skončíme s házením. ω_i je jakákoli přípustná sekvence hodů za těchto podmínek. Určete pst, že na první šestku budeme potřebovat více než tři hody.*

Řešení: Nejnižší možný počet hodů je jeden, kdy právě tímto pokusem hned padne šestka:

$$P(6) = \frac{1}{6} = 0{,}1667.$$

Dále může nastat sekvence $N6$, tj. prvním hodem šestka nepadne a druhým ano – a to s pstí

$$P(N6) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \doteq 0{,}1389.$$

Pak se také může stát, že nastane sekvence $NN6$, a sice s pravděpodobností

$$P(NN6) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \doteq 0{,}1157.$$

Teoreticky je možné, že nastane pro přirozené číslo k nastane sekvence $NN \ldots N6$ s pstí

$$P(\underbrace{NN \ldots N}_{\text{k-krát}}6) = \underbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{5}{6}}_{\text{k-krát}} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot \frac{1}{6}.$$

Je jasně vidět, že jednotlivé dílčí sekvence nastávají s různými pstmi. Takových sekvencí je vlastně nekonečně mnoho a víme, že musí splňovat vztah

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\underbrace{NN \ldots N}_{\text{k-krát}}6) = 1$$

(axiom normovanosti). Funkce, jejíž hodnoty jsme právě určili, se nazývá **pravděpodobnostní funkce**. V kapitole 8 si o tomto příkladu řekneme ještě něco více. Nyní se vraťme k zadání příkladu a spočteme pst, že pro první hozenou šestku potřebujeme více než tři hody:

$$P(A) = p(NNN6) + p(NNNN6) + p(NNNNN6) + \cdots .$$

Zdá se, že součet nekonečné řady by mohl dát práci, ovšem využijeme opět věty 2.2 a odečteme hledanou pst od opačného jevu:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (p(6) + p(N6) + p(NN6)) = 1 - (\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216}) \doteq 0{,}5787.$$

3.1.4 Spojitá pravděpodobnost

Spojitou pst můžeme užít v následujících situacích, a užíváme ji takto:

- Ω má nespočetně nekonečně mnoho možných elementárních výsledků, a tedy se jedná o interval reálných čísel nebo o R^+, nebo R.
- Tyto elementární výsledky mají obecně RŮZNOU možnost nastat.
- Pak pro pst jevu $(a;b) \subseteq \Omega$ nebo $\langle a;b) \subseteq \Omega$ nebo $(a;b\rangle \subseteq \Omega$ nebo $\langle a;b\rangle \subseteq \Omega$ platí

$$P(a;b) = P(\langle a;b) = P((a;b\rangle) = P\langle a;b\rangle) = \int_a^b f(x)dx,$$

kde $f(x)$ je nezáporná po částech spojitá funkce.

V případě spojité psti tři axiomy z předchozí kapitoly přecházejí v následující axiomy pro hustotu psti $f(x)$:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (axiom normovanosti),
2. $\forall a, b \in R\ :\ \int_a^b f(x)dx \geq 0$ (axiom nezápornosti),
3. $P(a;b) = P(\langle a;b) = P((a;b\rangle) = P\langle a;b\rangle) = \int_a^b f(x)dx$ (axiom součtu neslučitelných jevů má formu integrálu).

Příklad 3.6 *mobily jisté značky a typu mají životnost patnáct let. Jaká je pst, že náhodně koupený mobil tohoto typu vydrží více než deset let?*

Řešení: Jak zdůvodníme později, lze odvodit, že za hustotu psti, která dobře modeluje životnost, lze vzít funkci, která je pro záporná x rovna nule, a pro kladná x je $f(x)$ klesající exponenciální funkcí, ve které vystupuje číslo 15 z důvodu průměrné životnosti. Tedy za funkci $f(x)$ lze vzít funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ldots \ \text{pro } x < 0; \\ \frac{1}{15} \cdot e^{\frac{-x}{15}} \ \ldots \ \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$$

A pokud máme počítat pravděpodobnost, že životnost je větší než deset let (časová jednotka je tedy jeden rok), integrujeme na intervalu od 10 do ∞:

$$P((10;\infty)) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{15} \cdot e^{\frac{-x}{15}} dx = e^{\frac{-10}{15}} \doteq 0{,}5134.$$

3.2 Shrnutí

Pokud výsledky jistého pokusu, hry nebo experimentu mohou nastat se stejnou pravděpodobností, používáme k jeho popisu klasickou (3.1.1) nebo geometrickou (3.1.2) pravděpodobnost. Ovšem pokud některé z elementárních výsledků nastávají častěji než jiné, situaci znázorníme pomocí diskrétní (3.1.3) nebo spojité (3.1.4) pravděpodobnosti. Z modelů je vidět, že (3.1.1) je speciálním případem modelu (3.1.3) a že model (3.1.2) je speciálním případem modelu (3.1.4). Tedy dvěma hlavními modely psti je distrétní model (3.1.3) a spojitý model (3.1.4).

Když studujeme jistou veličinu, jako první věc bychom si měli uvědomit, zda se jedná o veličinu diskrétní (ta nabývá hodnot z konečné (např. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) nebo spočetné (např. $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$) množiny Ω) nebo veličinu spojitou (ta nabývá hodnot z reálného intervalu $\Omega =< a, b >$ nebo z celé množiny reálných čísel). Popis těchto dvou typů veličin se totiž v některých věcech liší. A používané vzorce nebo způsob popisu se neustále odvíjí od jednoho z těchto dvou typů. V následujících kapitolách (a i v úlohách praxe) se potřebuje občas určit pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot z jistého intervalu $(a, b\rangle$. S ohledem na typ veličiny budeme užívat vzorec

$$P(X \in (a, b\rangle)) = P(a < X \leq b) = \begin{cases} \sum_{a<k\leq b} p(k) & \text{pro diskrétní veličinu } X, \\ \int_a^b f(x)dx & \text{pro spojitou veličinu } X. \end{cases}$$

V diskrétním případě se funkce $p(k)$ nazývá pravděpodobnostní funkce, ve spojitém případě funkci $f(x)$ říkáme hustota psti.

3.3 Otázky k opakování a cvičení 03

U následujících výroků rozhodněte, zda se jedná o výrok pravdivý či nepravdivý.

Otázka 3.1 *Všech možných výsledků experimentu, který lze popsat pravděpodobnostním modelem, může být nejvýše spočetně mnoho.*

Otázka 3.2 *Geometrická pravděpodobnost je speciálním případem spojité pravděpodobnosti.*

Otázka 3.3 *Diskrétní náhodná veličina nemůže nabývat všech hodnot se stejnou pravděpodobností.*

Otázka 3.4 *U spojité náhodné veličiny X je pravděpodobnost, že X nabude konkrétní hodnoty, vždy rovna nule.*

Otázka 3.5 *Hustota spojité náhodné veličiny nemůže nikdy mít bod nespojitosti.*

Otázka 3.6 *Každou nezápornou funkci $f(x)$, pro kterou $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, lze označit za hustotu jisté náhodné veličiny.*

Otázka 3.7 *Žádná hodnota pstní funkce $p(k)$ nemůže být větší než 1.*

Otázka 3.8 *Žádná funkční hodnota hustoty psti $f(x)$ nemůže být větší než 1.*

3.3.1 Klasická pst

Úlohy 3.1 až 3.10 budou pravděpodobně zvládnuty ve výuce, ostatní jsou k samostatnému procvičení.

Úloha 3.1 *Při 500 hodech krabičkou zápalek 385krát krabička dopadla naplocho, 82krat na bok a 33krát na výšku. Odhadněte pravděpobnosti jevu*

a) *krabička padne naplocho*

b) *krabička padne na bok*

c) *krabička padne na výšku*

Úloha 3.2 *Z osmnácti lístků označených čísly 1 - 18 vytáhneme náhodně jeden lístek. Jaká je pravděpodobnost, že na vytažením lístku bude:*

a) *sudé číslo*

b) *číslo dělitelné 3*

c) *prvočíslo*

d) *dělitelné 6*

Úloha 3.3 *Jaká je pravděpodobnost že při hodu dvěma kostkami (červené a modré) padne:*

a) *součet 8*

b) *součet, který je dělitelný pěti*

c) *součet, který bude sudý*

Úloha 3.4 *Hazardní hráč hází třemi kostkami, položil G. Galileimu otázku: "Mám vsadit na součet 11 nebo součet 12?"*
Co mu Galilei odpověděl?

Úloha 3.5 *Uvažujeme hod dvěma kostkami. Jev A spočívá v tom, že padla alespoň jedna šestka, jev B spočívá v tom, že součet čísel je roven 6, a jev C spočívá v tom, že součet čísel je menší než 7.*

A…padne aspoň jedna šestka
B…součet hodů je roven 6
C…součet čísel je menší než 7

a) *Zapište jev B pomocí elementárních jevů. Předpokládejte, že kostky umíme rozlišit.*

b) *Popište slovně jev C'.*

c) *Jaký je vztah mezi jevy A a* $\overline{C}$*?*

d) *Co můžeme říct o jevech A a B?*

e) *Jaký je vztah mezi jevy B a C?*

f) *Popište slovně jev* $C \setminus B$ *(množinové minus).*

Úloha 3.6 *V osudí jsou 2 bílé a 4 černé koule. Postupně losujeme koule z osudí, dokud není prázdné, vytažené koule nevracíme zpět.*

a) *Kolik je možných výsledků losování za předpokladu, že koule stejné barvy neumíme rozlišit?*

b) *Kolik výsledků je příznivých jevu A, který spočívá v tom, že v prvním tahu byla tažena bílá koule?*

c) *Kolik výsledků je příznivých jevu B, který spočívá v tom, že obě bílé koule byly taženy během prvních tří tahů?*

d) *Popište slovně jev* $\overline{B}$*?.*

e) *Kolik výsledků je příznivých jevu C, který spočívá v tom, že poslední tažená koule je černá?*

f) *Jaký je vztah mezi jevy B a C?*

g) *Popište slovně jev* $A \cap \overline{B} \cap C$*.*

Úloha 3.7 *Závod vyrábí určitou součástku, která je podrobena třem různým zkouškám. Jev A spočívá v tom, že náhodně vybraná součástka obstojí při první zkoušce, jev B v tom, že obstojí ve druhé zkoušce, a jev C v tom, že obstojí ve třetí zkoušce. Vyjádřete v množinové symbolice (tj.pomocí jevů A,B,C), že součástka obstojí:*

a) *jen v první zkoušce,*

b) *v první a ve druhé zkoušce, ale ne ve třetí zkoušce,*

c) *právě v jedné zkoušce,*

d) *alespoň v jedné zkoušce,*

e) *právě ve dvou zkouškách,*

f) *alespoň ve dvou zkouškách,*

g) *ve všech třech zkouškách,*

h) *nejvýše ve dvou zkouškách.*

Úloha 3.8 *Zapomněli jste čtyřmístný PIN ke své platební kartě. Pamatujete si, že obsahoval třináctku, tj. jedničku a trojku těsně za sebou (nejsme si však jisti, zda uspořádaná dvojice těchto čísel byla na začátku, uprostřed nebo na konci PINu).*
Pamatujeme si ještě to, že zbývající dvě číslice nebyly stejné a lišily se od 1 *i od* 3*. S jakou pravděpodobností můžeme PIN uhádnout napoprvé při zachování těchto pravidel?*

Úloha 3.9 *Hodíme čtyřikrát desetikorunou. S jakou pravděpodobností padne dvakrát líc a dvakrát rub?*

Úloha 3.10 *Hráč pokeru (varianta Texas Hold'em) dostane 2 karty z dokonale rozmíchaného balíčku 52 karet. S jakou pravděpodobností bude mít v ruce*

a) eso a krále

b) dvě esa

c) pár, tj. dvě karty stejné hodnoty?
(Pro porovnání vyjádřete výsledky v procentech a zaokrouhlete na dvě desetinná místa.)

Úloha 3.11 *Z 9 přístrojů jsou dva poruchové. Zákaznická firma zakoupí tři přístroje náhodně vybrané z daných devíti – určete pst, že nanejvýš jeden z nich je poruchový.*

Úloha 3.12 *Z 10 přístrojů jsou tři poruchové. Zákaznická firma zakoupí čtyři přístroje náhodně vybrané z daných desíti – určete pst, že minimálně dva z nich jsou poruchové.*

Úloha 3.13 *V osudí je pět kuliček bílých a pět černých. Náhodně vybereme (nevracíme zpět) šest z nich. Jaká je pst, že aspoň dvě kuličky z vybraných budou bílé?*

Úloha 3.14 *Ze skupiny 7 chlapců a 5 dívek náhodně vybereme pětici dětí. Jaká je pst, že mezi vybranými bude nanejvýš jedna dívka?*

Úloha 3.15 *Ze skupiny 8 chlapců a 7 dívek náhodně vybereme šest dětí. Jaká je pst, že mezi vybranými bude aspoň pět dívek?*

Úloha 3.16 *Na šachovnici 8x8 náhodně na dvě různá políčka umístíme dvě věže, bílou a černou. S jako pstí se navzájem ohrožují? (pravidla šachu: každá věž ohrožuje nejbližší figuru v daném sloupci i v dané řadě, ve kterých se věž nachází.)*

Úloha 3.17 *Revizor ze zkušenosti ví, že zhruba ve čtvrtině tramvají najde při kontrole černého pasažera. Kolik tramvají musí zkontrolovat, aby měl aspoň 95%-ní jistotu, že alespoň jednoho černého pasažera objeví? (nápověda: při n tramvajích nejlépe vypočteme pst, že aspoň v jedné z nich bude nalezen černý pasažer, jako 1 minus pst, že černý pasažer nebude nalezen v žádné tramvaji).*

Úloha 3.18 *Student se stihl naučit jen 15 otázek z 20 a u ústní části zkoušky si vybírá tři z nich. Jaká je pst, že aspoň dvě z těchto tří budou ty, které umí?*

Úloha 3.19 *Jaká je pst, že v náhodném výběru tří karet z balíčku 52 karet (třináct karet v každé barvě) bude aspoň jedno eso nebo aspoň jeden král?*

3.3.2 Geometrická pst

První čtyři úlohy v tomto oddílku budou zvládnuty na cvičení, ostatní jsou na samostatné procvičení.

Úloha 3.20 *Obrazovka radaru je kruhová o poloměru r. Při zapnutí se na ní náhodně objeví letící bod znázorňující letící objekt.*
Určete pravděpodobnost, že svítící objekt bude od středu obrazovky vzdálen méně než o $r/2$.

Úloha 3.21 *Tyč délky 7m je náhodně rozřezána na tři kusy.*
Jaká je pravděpodobnost, že z těchto tří částí lze sestavit trojúhelník?

Úloha 3.22 *Stroj vyrábí skleněné trubičky o délce 1 m. Rozlomí-li s trubička kvůli poruše materiálu na dva kusy, s jakou pstí bude jeden z nich delší než 80 cm, a bude jej tedy možno dále využít?*
(předpokládejte, že trubička se může zlomit na kterémkoli místě se stejnou pstí).

Úloha 3.23 *Vedoucí prodejny nábytku očekává během dne dodávku zboží od dvou různých dodavatelů. Od 1. dodavatele byl informován, že auto může přijet kdykoliv mezi 9 hod a 12 hod, auto druhého dodavatele může přijet kdykoliv mezi 9 hod a 14 hod.*
Přejímka zboží od kteréhokoli dodavatele trvá hodinu. S jakou pstí se stane, že auto, které přijede později, bude muset čekat na dokončení přejímky zboží z prvního auta?

Úloha 3.24 *Vedoucí prodejny nábytku očekává během dne dodávku zboží od dvou různých dodavatelů. Od prvního dodavatele byl informován, že auto může přijet kdykoli mezi 9. a 12. hodinou, druhý dodavatel přijede kdykoli mezi 9. a 14. hodinou. Přejímka zboží od kteréhokoliv dodavatele trvá půl hodiny. S jakou pstí bude muset auto, které přijede později, čekat na dokončení přejímky zboží u auta, které přijelo dřív?*

Úloha 3.25 *Dva lidé se dohodli, že se setkají na stanoveném místě mezi 18:00 h. a 18:45 h. Ten, kdo přijde první, počká na druhého 30 minut (déle čekat nebude a půjde pryč). Určete pravděpodobnost toho, že se setkají, je-li příchod obou kdykoliv ve stanoveném intervalu stejně možný.*

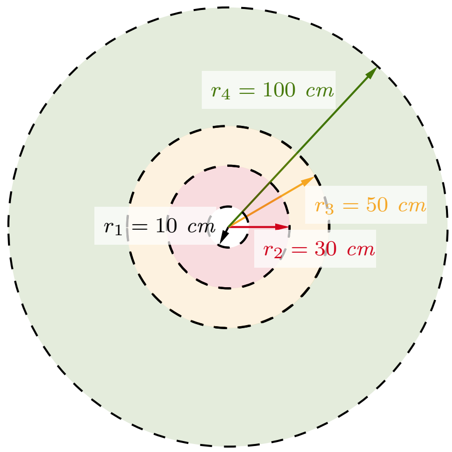
Úloha 3.26 *Ve čtverci* $\langle 0; 8\rangle \times \langle 0; 8\rangle$ *se náhodně rozsvítí bod o souřadnicích* $x; y$. *Určete pst, že platí* $y \leq x^3$.

Úloha 3.27 *Krychle má všechny stěny obarvené. Rozřežeme ji na 1000 stejných krychliček a ty pečlivě promícháme. Vybereme-li náhodně jednu krychličku, s jakou pstí bude mít právě dvě stěny obarvené?*

Úloha 3.28 *Student Adam přijde na konzultaci ke svému vedoucímu bakalářské práce někdy mezi osmou a desátou, student Jan někdy mezi osmou a jedenáctou. Oba mají stejného vedoucího a lze očekávat, že doba každé konzultace bude asi 30 minut.*

Předpokládejte, že každý okamžik příchodu je stejně možný jako ty ostatní, ve studenty vymezených intervalech. Vyčíslete pst, že některý ze studentů bude nějakou dobu čekat, protože vyučující bude mít zrovna schůzku s tím druhým studentem.

Úloha 3.29 *Všechny zásahy do terče o poloměru* 100 *cm jsou pro začínajícího střelce z luku stejně pravděpodobné. Jaká je pst, že svým prvním výstřelem do terče dosáhne pěti nebo deseti bodů? (poloměry jednotlivých hranic oblastí viz obrázek)*



Úloha 3.30 *Hráči s petangovými koulemi trénují, zda koulením po zemi trefí jistý určený bod ve vzdálenosti deset metrů. Umístíme-li do daného bodu souřadnou osu kolmo na směr házení, všechny vrhy na tento cíl procházejí pásem* -30 *cm až* 30 *cm. Na začátku jsou hráči nezkušení a všechny dopady na osu v rozmezí* -30 *cm až* 30 *jsou stejně pravděpodobné.*

Označme A *interval* -10 *cm až* 10 *cm na měřicí ose,* B *oblast* $(-20;-10) \cup (10;20)$ *cm na měřicí ose,* C *oblast* $(-30;-20) \cup (20;30)$ *cm na měřicí ose.*

Jaká je šance, že náhodný netrénovaný hráč se trefí do oblasti A*?*

Úloha 3.31 *Po určité době tréninku v situaci předchozího příkladu se hráči strefují do oblasti* A *s pstí* $0{,}7$*, do oblasti* B *s pstí* $0{,}20$ *a do oblasti* C *s pstí* $0{,}10$*. Když vytrénovaný hráč vrhne koulí pětkrát, jaká je šance, že aspoň čtyři z těchto pěti hodů projdou oblastí* A*? (nápověda: vlastně už se o příklad na geometrickou pst nejedná, pouze je zde návaznost na předchozí příklad; nyní potřebujete spočítat tzv. binomické neboli Bernoulliho psti, viz následující cvičení)*

Odpovědi na otázky a některé úlohy viz 14.3.

4 Týden 04

4.1 Přednáška 04: Věta o součtu pravděpodobností, věta o součinu pravděpodobností, podmíněná pst

Od axiomu (P3) nyní pokročíme ke slibované psti sjednocení obecných náhodných jevů, a pak se budeme zabývat samozřejmě i pstí průniku jevů, protože psti průniku se vlastně objevují právě i ve větě o psti sjednocení jevů.

Začneme pstí dvou obecných jevů:

Věta 4.1 *(věta o součtu pstí dvou náhodných jevů) Pro libovolné náhodné jevy $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ platí:*

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Důkaz by byl velmi jednoduchý: protože na základě axiomu (P3) pro disjunktní jevy $A_1 - A_2$ a $A_1 \cap A_2$ platí $P(A_1) = P(A_1 - A_2) + P(A_1 \cap A_2)$ a podobně platí $P(A_2) = P(A_2 - A_1) + P(A_1 \cap A_2)$, dosazením těchto vztahů do pravé strany rovnosti dostaneme $P(A_1 - A_2) + P(A_2 - A_1) + P(A_1 \cap A_2)$, což je součet pstí tří disjunktních množin, a tak podle axiomu (P3) přesně roven jejich sjednocení $A_1 \cup A_2$.

Příklad 4.1 *Uvažujme situaci*[5]*, kdy zásilkový prodejce vyřizuje objednávky zboží telefonicky, emailem, nebo formulářem při osobním odběru. Objednávky dělíme podle typu na malé, střední, velké a prioritní. Lze označit následující náhodné jevy, které mohou nastat:*

T *… náhodně vybraná-přišlá objednávka je telefonická;*

E *… náhodně vybraná-přišlá objednávka je emailem;*

F *… náhodně vybraná-přišlá objednávka je formulářem při osobním odběru;*

M *… náhodně vybraná-přišlá objednávka je malá;*

S *… náhodně vybraná-přišlá objednávka je střední;*

V *… náhodně vybraná-přišlá objednávka je velká;*

H *… náhodně vybraná-přišlá objednávka je prioritní (high priority).*

Jsou známa dosavadní data z letošního roku:

typ objedn.	*malá obj.*	*střední obj.*	*velká obj.*	*high priority obj.*	*celkem*
telefon	1021	216	109	14	1360
email	86	371	308	49	814
formulář	1497	230	86	13	1826
celkem	2604	817	503	76	4000

Určete pst toho, že náhodně přišlá-obdržená objednávka bude emailem nebo prioritní.

[5] Příklad je vzat z učebnice (Robová, Hála, Calda, 2013), ale v trochu jiných souvislostech, s jinou otázkou v zadání.

Řešení: jedná se vlastně o pst statistickou, odhadnutou pomocí naměřených dat – takto určit náhodnost v tomto případě je nejrozumnější[6].

Dále budeme při výpočtu $P(E \cup H)$, protože logická spojka NEBO je v množinové symbolice vyjádřená sjednocením, používat klasický model psti, protože každý klient svou volbou „hlasuje“ pro jeden typ i jeden způsob objednávky. Je vidět, že průnik obou jevů je neprázdný, tj. existují klienti, kteří si objednali emailem, a současně s nejvyšší prioritou, tj. použijeme větu 4.1:

$$P(E \cup H) = P(E) + P(H) - P(E \cap H) = \frac{814 + 76 - 49}{4000} = \frac{841}{4000} \doteq 0{,}21025.$$

Věta 4.2 *(věta o součtu pstí n náhodných jevů) Pro libovolné náhodné jevy A_1, A_2, atd. až A_n platí:*

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A+2) + \cdots + P(A_n) - \\
&-P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \ldots - P(A_{n-1} \cap A_n) + \\
&+P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \cdots + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) - \\
&\ldots \\
&+(-1)^{n-1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).
\end{aligned}$$

Důkaz bychom museli vést pro $n = 3$ pomocí Vennova diagramu pro tři množiny v obecné poloze (se všemi možnými neprázdnými průniky), pro $n \geq 4$ už Vennovy množiny selhávají, protože už nedokážou postihnout obecnou polohu čtyř a více překrývajících se množin (u čtyř množin bychom jejich vzájemný vztah museli znázornit pomocí čtyř koulí z nichž každá má střed v jiném vrcholu čtyřstěnu, a všechny mají poloměr o něco větší, než je polovina délky hrany čtyřstěnu; už to je náročné, tj. důkaz bychom vedli spíše pomocí charakteristického obecného prvku x).

Ale logika důkazu je celkem jasná: při sečtení pstí jednotlivých množin jsme průniky každých dvou započítali víckrát, takže jejich psti musíme na druhém řádku pravé strany odečíst – ovšem průniky každých tří množin jsme z psti odečetli tolikrát, že tam zase vůbec nejsou započítány, takže jejich psti musíme na třetím řádku pravé strany zase přičíst, atd. až u průniku všech n množin vlastně nevíme, zda jej máme přičíst nebo odečíst, ale to lze snadno zjistit pomocí $(-1)^{n-1}$, protože tento člen ctí střídání sčítání a odčítání pstí na každém dalším řádku pravé strany.

Příklad 4.2 *Elektrikář vystiskl štítky na zvonky bytového domu se čtyřmi byty a zapojuje je náhodně, protože jeho parťák onemocněl a nepřinesl seznam (a nebere telefon). Jaká je pst, že*

a) *Všechny zvonky zapojí ke správným bytům?*

[6] Nebudeme se nyní zabývat výpočtem limity hodnot v tabulce v situaci, kdy počet zákazníků nebude 4000, ale bude se blížit k nekonečnu. Taková data nemáme totiž k dispozici. Namísto toho se spokojíme s tím, že pst výsledku bude určená relativní četností, kterou bychom mohli pro rostoucí počet měření-zákazníků neustále zpřesňovat. Také je pravdou, že vzorek čtyř tisíc zákazníků už o klientele firmy něco vypovídá, tj. má smyl zhruba pst odhadnout pomocí relativní četnosti.

b) *Aspoň jeden zvonek zapojí správně?*

c) *Žádný zvonek nezapojí správně?*

Řešení: je asi nabíledni, že jedna z otázek a), b), c) bude řešena pomocí právě uvedené věty 4.2, a ty ostatní dvě otázky nějak jinak. Kdo se v tom má vyznat?

Začneme tím, že si označíme náhodné jevy, které by možná mohly vést k výsledku v každé otázce – v tom je matematika právě pomocná, že dobré označení či popis situace už je prvním krokem k řešení.

A_1 ... zvonek k bytu č. 1 bude zapojen správně;

A_2 ... zvonek k bytu č. 2 bude zapojen správně;

A_3 ... zvonek k bytu č. 3 bude zapojen správně;

A_4 ... zvonek k bytu č. 4 bude zapojen správně.

No a nyní vyjádříme slovní popis jevů a,b,c pomocí náhodných jevů A_1, A_2, A_3, A_4, snad to bude možné (aniž jsme si tedy vyjádřili množinu Ω všech možných výsledků – brzy se k ní dostaneme):

ad a) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ ... každý ze zvonků bude zapojen správně, tj. dílčí jevy nastanou současně.

ad b) „Aspoň jeden zvonek bude zpojen ke správnému bytu" lze ekvivalentně vyjádřit výrokem „k 1. bytu bude zvonek zapojen správně NEBO ke 2. bytu bude zvonek zapojen správně NEBO ke třetímu bytu bude zvonek zapojen správně NEBO ke 4. bytu bude zvonek zapojen správně", což je právě $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

ad c) Po krátkém přemýšlení (ať logickém,nebo množinovém) lze dospět k tomu, že jev c) je opačným jevem k jevu b), neboli jev c) lze vyjádřit jako

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}.$$

Je tedy jasné že $P(c) = 1 - P(b)$.

Začněme výpočtem psti jevu (a): Nyní se musíme zamyslet nad tvarem množiny Ω: chceme modelovat přiřazení čtyř zvonků k bytům, tj. množina všech možných výsledků by mohla obsahovat všechny možné čtveřice čísel 1, 2, 3, 4 (ale na to už jsme skoro odborníci – to se pozná, když tyto čtveřice budeme nazývat permutacemi), a přitom pokud např. 2 bude na druhém místě této čtveřice, bude to znamenat, že zvonek 2 je správně zapojen k bytu číslo 2. Nyní pst průniku vypočteme klasickým modelem, protože počet možných čtveřic je konečný a každá při náhodném zapojení má stejnou šanci nastat:

$$P(a) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{24} = 0{,}416666\ldots,$$

protože příznivý případ správného zapojení všech zvonků je jediný a všech možných zapojení neboli permutací čtyřprvkové množiny je 24.

Dostáváme se k výpočtu (b), kde využijeme větu 4.2 pro $n = 4$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) -$$
$$-P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) +$$
$$+P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) -$$
$$-P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Návratem k permutacím a jejich počtům dostaneme výsledek

$$\frac{1}{24}(3! + 3! + 3! + 3! - 2! - 2! - 2! - 2! - 2! - 2! + 1 + 1 + 1 + 1 - 1) = 0{,}625.$$

No a poslední výsledek c) dostaneme už přes pst opačného jevu: $p(c) = 1 - 0{,}625 = 0{,}375$.

Čili hlavním zájmem našich úvah bylo vypočítat část (b) použitím věty o součtu – doporučuji si pamatovat, že **ve větě o součtu se počítá pst sjednocení**[7], i když se v ní vyskytují průniky jevů! Ovšem sjednocení je v této větě jejím hlavním zájmem.

V další části tohoto oddílu se skutečně zaměříme více na pst průniku jevů – takové psti jsme schopni počítat např. pomocí klasického modelu psti, ale řekneme si výpočtům psti průniku ještě několik důležitých věcí, z nichž nejdůležitější je rozdíl při výpočtu psti průniku jevů podmíněných a jevů nezávislých. Tento rozdíl bude vysvětlen na následujících dvou příkladech.

Příklad 4.3 *Házeme třikrát hrací kostkou. Označme náhodné jevy*

A *… při prvním hodu padne jednička;*

B *… při druhém hodu padne dvojka;*

C *… při třetím hodu padne trojka;*

Jaká je pst náhodného jevu $A \cap B \cap C$?

Odpověď na tuto otázku získáme podobně, jako získáme počet konfigurací vynásobením dílčích konfigurací při kombinatorickém principu součinu – vynásobíme dílčí psti. Jinými slovy,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}004629.$$

Situace při výpočtu psti průniku nebude ovšem takto jednoduchá vždy: v příkladu 4.3 totiž dílčí jevy jsou na sobě navzájem náhodně nezávislé, neboli pst padnutí dvojky při druhém hodu není ovlivněna tím, jaký byl výsledek prvního hodu, a pst padnutí trojky

[7] Pokud bychom například přehodili všechny symboly sjednocení za symboly průniku a symboly průniku za symboly sjednocení, za prvé dostaneme nesmysl, a za druhé u zkoušky bychom za tento nesmysl nedostali žádné body.

při třetím hodu, pokud kostkou házeme nestranně, stále stejným stylem, nezávisí na tom, co na kostce padlo při hodu prvním a hodu druhém. Tato skutečnost, že pst průniku je rovna součinu dílčích pstí, nám poslouží jako definice nezávislých jevů[8]:

Definice 4.1 • *Dva náhodné jevy* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ *se nazývají stochasticky nezávislé (náhodně nezávislé), když* $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$.

- n *náhodných jevů* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *se nazývají stochasticky nezávislé (= náhodně nezávislé), když*

  (i) $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$ *pro* $1 \leq i < j \leq n$,

  (ii) $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k)$ *pro* $1 \leq i < j < k \leq n$,

  (iii) $\ldots$

  (iv) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \cdots \cdot P(A_n)$

(tedy ověřujeme $2^n - n - 1$ *vztahů).*

Třeba v příkladu 4.3 jsou jevy A, B nezávislé, protože platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. A také jsou jevy A, B, C (stochasticky) nezávislé, protože platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$, $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$, $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ (nezávislost více než dvou jevů je třeba ověřit platností rovností, kde zkoumáme průniky jakýchkoli množin, které lze z daných množin sestrojit). Čtenář by si mohl možná všimnout, že pst průniku $A \cap B \cap C$ v příkladu 4.3 je kladná (náhodný jev může nastat), a přesto je tato trojice jevů stochasticky nezávislá. Pojem nezávislosti jevů přímo tedy nesouvisí s tím, zda průniky utvářené z těchto jevů jsou neprázdné nebo prázdné[9], ale spíše jakým způsobem se pravděpodobnost těchto průniků vypočte. Tedy i při neprázdných průnicích jevů jsou tyto dílčí jevy někdy závislé, někdy nezávislé – závislost jevů při neprázdném průniku uvidíme v příkladu následujícím.

Příklad 4.4 *Ze sedmi telefonů daného typu na skladu prodejny jsou tři nekvalitní a čtyři kvalitní. Pro zákazníka prodejce náhodně z daných sedmi vybírá tři telefony, které on chce koupit pro svou rodinu. Označme náhodné jevy*

K_1 *… první náhodně vybraný telefon je kvalitní;*

K_2 *… druhý náhodně vybraný telefon je kvalitní;*

N_3 *… třetí náhodně vybraný telefon je NEkvalitní.*

Určete pst toho, že nastanou tyto tři náhodné jevy současně při náhodném výběru tří mobilních telefonů.

[8] Viz např. Budíková, Králová, Martoš, 2009, str. 59.

[9] Náhodné jevy, jejichž průnik je prázdný, se nazývají **neslučitelné**, nikoli **nezávislé** – prosím tyto dva pojmy nezaměňujte. Ovšem vztah logické implikace mezi těmito dvěma pojmy skutečně existuje: pokud například $A \cap B \cap C = \emptyset$, a přitom $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, $P(C) > 0$, tak jsou náhodné jevy A, B, C stochasticky závislé, protože $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0$, ale $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) > 0$. Tedy jestliže neslučitelné jevy s kladnými pstmi mají prázdný průnik, pak jsou stochasticky závislé.

Podobně budeme počítat pst průniku náhodných jevů, ale nyní podle trochu jiného vzorce:

$$P(K_1 \cap K_2 \cap N_3) = P(K_1) \cdot P(K_2|K_1) \cdot P(N_3|K_1 \cap K_2).$$

Nyní totiž pst výběru druhého kvalitního telefonu bude záviset na tom, jaký byl vybrán první telefon. Označení svislé čáry v zápise $P(K_2|K_1)$ vyjadřuje jakousi navazující pst – uvažujeme situaci K_1, na kterou bude navazovat situace $K2$ v tom smyslu, že i když K_1 je náhodný jev, který obecně nastat nemusí, v tomto NAVAZOVACÍM MÓDU budeme předpokládat, že nastal.

$P(K_1) = \frac{4}{7}$, a nyní se ptáme, jaká je pst, že i druhý vybraný mobil bude kvalitní, pokud ten první byl kvalitní: vypočteme $P(K_2|K_1) = \frac{3}{6}$ (při prvním výběru byl odebrán kvalitní, tj. zbývají 3 příznivé případy, všech možných je už jen 6).

Definice 4.2 *$P(K_2|K_1)$ označuje pst jevu K_2 vázanou podmínkou, že nastal rovněž jev K_1 ...* ***podmíněná pst jevu K_2 za podmínky, že nastal také jev K_1****.*

V našem příkladu $P(K_2)$ má jinou hodnotu než $P(K_2|K_1) = \frac{3}{6} = 0{,}5$, neboť K_2 je situace, kdy druhý vybraný mobil je kvalitní, aniž je řečeno něco o prvním vybraném. Při prvním výběru mohou nastat dvě situace, které obě musíme uvažovat, protože obě hrají roli pro výběr druhého kvalitního. Tedy

$$P(K_2) = P(K_1) \cdot P(K_2|K_1) + P(\overline{K_1}) \cdot P(K_2|\overline{K_1}) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \doteq 0{,}57143.$$

Tedy vidíme, že $P(K_2)$, bez ohledu na to, co se stalo-stane při prvním výběru, je větší než $P(K_2|K_1)$. Jedná se tedy o dva různé koncepty a tomu $P(K_2|K_1)$ se říká podmíněná pst.

Dokončeme výpočet našeho příkladu 4.4:

$$P(K_1) \cdot P(K_2|K_1) \cdot P(N_3|K_1 \cap K_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = 0{,}17143.$$

Vzorec i označení právě vysvětlené a použité ještě zapišme do věty:

Věta 4.3 *Pokud $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, tak pro průnik náhodných jevů A_1, A_2, až A_n platí:*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Pro $n = 2$ přechází věta do vzorce $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$, odkud lze získat logicky ekvivalentní představu o tom, co je to podmíněná pst jevu A_2 za podmínky A_1:

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}, \tag{4.1}$$

tj. podíl psti průniku $A_2 \cap A_1$ ku psti jevu A_1, který předpokládáme, že nastal. Podmíněné psti v příkladu 4.4 jsme vypočetli pomocí klasického modelu přímo, ale v některých jiných příkladech, kde si nebudeme tak jisti, se nám vzorec 4.1 může hodit, protože platí i v situacích, kdy se nejedná o model klasické psti.

Abychom nyní uzavřeli diskusi nad pstí průniku, vidíme, že existují dva různé vzorce: jednak vzorec z příkladu 4.3 pro nezávislé jevy (výpočet pomocí součinu dílčích pstí), z příkladu 4.4 pro jevy závislé (výpočet pomocí součinu, ve kterém „nabalujeme" u každého dalšího jevu podmínku, že nastaly-nastanou současně i všechny jevy dosud uvažované). Porovnáním těchto dvou vzorců je vidět, například na dvou jevech A_1, A_2, že pokud tyto dva náhodné jevy jsou nezávislé, platí $P(A_2|A_1) = P(A_2)$, tj. podmínka A_1 nezávislá na jevu A_2 neovlivní pst jevu A_2 – ta je pořád stejná, ať už A_1 nastane nebo ne.

Závěrem ještě dva příklady na procvičení řečeného v této kapitole.

Příklad 4.5 *Házíme čtyřstěnem, přičemž PADNE ta strana, na kterou celý čtyřstěn dopadne jako na základnu. Přitom*

stěna A: *obarvena červeně;*

stěna B: *obarvena zeleně;*

stěna C: *obarvena modře;*

stěna D: *rozdělena na tři části trojúhelníky, jeden z nich obarven červeně, druhý zeleně, třetí modře.*

Označme náhodné jevy

R *… padne alespoň část stěny červené ($R = \{A, D\}$);*

G *… padne alespoň část stěny zelené ($G = \{B, D\}$);*

B *… padne alespoň část stěny modré ($B = \{C, D\}$).*

Jsou náhodné jevy R, G, B stochasticky nezávislé? ($\Omega = \{A, B, C, D\}$)

Řešení: Musíme ověřit platnost čtyř rovností:

$$\begin{aligned}
P(R \cap G) = P(R) \cdot P(G): &\quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},\\
P(R \cap B) = P(R) \cdot P(B): &\quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},\\
P(G \cap B) = P(G) \cdot P(B): &\quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},\\
P(R \cap G \cap B) = P(R) \cdot P(G) \cdot P(B): &\quad \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Z rovností a nerovnosti plyne: každé dva z jevů R, G, B jsou stochasticky nezávislé, kdežto všechny tři současně jsou stochasticky závislé. Tj. závislost tří jevů je trochu tajemnější a může nastat, i když každá dvojice z daných tří je nezávislá.

Příklad 4.6 *Ze sady 100 výrobků je 10 zmetků. Při kontrole jakosti vybereme náhodně tři výrobky z této sady. Určete pst, že*

a) *první dva vybrané výrobky budou kvalitní a třetí vybraný bude zmetek* $(K_1 \cap K_2 \cap \overline{K_3})$*;*

b) *ze tří vybraných budou dva kvalitní a jeden zmetek (nezáleží na pořadí, ale vypočtěte tak, že všechna možná příznivá pořadí projdete);*

c) *totéž jako (b), ale počítejte jiným způsobem – tak nějak najednou, když nezáleží na pořadí;*

d) *druhý výrobek ze tří vybíraných bude kvalitní.*

Řešení: Použijeme v tomto příkladu vše, co bylo v tomto oddílu řečeno:

Ad a) $P(K_1 \cap K_2 \cap \overline{K_3}) = \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98} \doteq 0{,}0826.$

Ad b) Pokud nezáleží na pořadí zmetku ze tří kontrolovaných, mohou nastat tři situace, které jedna druhou vylučuje, tj. jejich psti se podle axiomu (P3) sečtou:

$$\begin{aligned}&P(K_1 \cap K_2 \cap \overline{K_3}) + P(K_1 \cap \overline{K_2} \cap K_3) + P(\overline{K_1} \cap K_2 \cap K_3) = \\ &= \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98} + \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{99} \cdot \frac{89}{98} + \frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} \cdot \frac{89}{98} \doteq 0{,}2478.\end{aligned}$$

Ad c) užijeme klasické psti, tedy podílu příznivých případů úkolu b) ku počtu všech možných:

$$P = \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} \doteq 0{,}2478.$$

Ad d) Tuto pst jsme už počítali v příkladu 4.4, pouze s jinými hodnotami:

$$P(K_2) = P(K_1) \cdot P(K_2|K_1) + P(\overline{K_1}) \cdot P(K_2|\overline{K_1}) = \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} + \frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} = 0{,}9$$

(výsledek je paradoxní: bez ohledu na pořadí vybíraného výrobku, pst, že vytáhneme výrobek kvalitní, je pořád stejná a rovná $\frac{90}{100}$ ... pokud ji tedy nepodmíníme žádnou informací-požadavkem o tom, jaká je kvalita dříve vybraných výrobků).

4.2 Shrnutí

Kromě axiomu (P3), který stanovuje-popisuje pravidlo pro výpočet sjednocení disjunktních jevů, se teorie psti snaží rozšířit práci s náhodnými jevy i na jevy, které mají neprázdný průnik. Nejprve jsme se v této kapitole věnovali výpočtu psti sjednocení jevů, pro něž průniky kterýchkoli z nich mohou být neprázdné – tuto situaci popisuje **věta o součtu pstí** 4.1 nebo spíše její rozšíření pro tři a více jevů, 4.2. Tato věta je pro konečné množiny u klasické psti vlastně jen obdobou principu inkluze a exkluze, kterým počítáme počet prvků sjednocení množin (obdobou získanou z principu inkluze a exkluze vydělením celé rovnosti počtem prvků množiny Ω).

Už v těchto větách o součtu se vyskytuje výpočet psti průniku náhodných jevů. Tuto pst průniku lze počítat různými způsoby, například vyjádřit i pst průniku jevů podle vzorce pro klasickou pst, pokud je to možné, a kombinatoricky vyjádřit počet možných konfigurací příznivých a vydělit počtem konfigurací všech. Ovšem často výpočet průniku jevů nelze určit přímo, ale je možné vyjádřit ji jako součin pstí jistých dílčích jevů – buď přímo součin pstí jevů, jejichž průnik počítáme, jak je tomu v příkladu 4.3, nebo jako součin pstí jevů podmíněných určitými situacemi, jako je tomu v příkladě 4.4. Obecně tedy pro pst průniku lze užít vzorec věty 4.3, ten můžeme použít vždy. Vzorec z příkladu 4.3 lze užít jen pro průnik jevů stochasticky nezávislých. Jak je vidět v definici 4.1, stochastickou nezávislost definujeme právě pomocí vlastnosti, že pst průniku jakéhokoli počtu z těchto jevů je roven součinu pstí těchto dílčích jevů.

U jevů stochasticky (= náhodně) závislých lze definovat jistou podmíněnou pst pomocí vzorce 4.1, když $P(A_1) \neq 0$ pro jev A_1, o kterém mluvíme jako o podmínce a jehož nastoupení-výskyt je předpokládán při výpočtu $P(A_2|A_1)$. Respektive tuto podmíněnou pst lze definovat u jevů jakýchkoli, jen pro nezávislé jevy zjistíme, že nic nového nezískáme, protože pro ně $P(A_2|A_1) = P(A_2)$.

4.3 Otázky k opakování a cvičení 04: pst průniku a sjednocení, podmíněná pst

U následujících výroků rozhodněte, zda se jedná o výrok pravdivý či nepravdivý.

Otázka 4.1 *Podmíněná pst vyjadřuje pst náhodného jevu za předpokladu, že je splněna jistá podmínka.*

Otázka 4.2 *Podmíněná pst $P(B|A)$ nemůže být rovna nule.*

Otázka 4.3 *Pst, že žádný ze čtyř bytů nebude při náhodném zapojení zvonků připojen ke správnému jménu, lze vyjádřit jako $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4})$.*

Otázka 4.4 *Pro stochasticky nezávislé jevy A, B, pro které $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, platí $P(B) = P(B|A)$.*

Otázka 4.5 *Vzorec $P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$ platí jen někdy.*

Otázka 4.6 *Vzorec $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$ neplatí vždy.*

Otázka 4.7 *Vždy platí $P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}$, protože to plyne ze vzorce $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$.*

Otázka 4.8 *Jevy R, G, B mohou být stochasticky závislé, i když každé dva z nich jsou stochasticky nezávislé.*

4.3.1 Pst sjednocení či průniku či části množin

Úloha 4.1 *120 studentů skládalo tři zkoušky. Na základě informací níže určete pst toho, že náhodně vybraný stud z této skupiny složil pouze 3.zkoušku.*

120 studentů skládalo tři zkoušky. Přitom deset procent studentů nesložilo ani jednu z nich. Nebyl nikdo, kdo by složil zkoušku jen z druhého předmětu. Devět studentů z něj složilo úspěšně zkoušku, leč pro změnu neprospělo z prvního předmětu. 47 studentů složilo ze tří zkoušek dvě. 33 studentů nevyhovělo z třetího předmětu. 56 studentů složilo úspěšně zkoušku ze druhého i třetího předmětu, zato však 20 studentů neobstálo ani u jednoho z nich.
(úloha vyžaduje i logiku: které info vzít nejdřív a které potom?)

Úloha 4.2 *Tři lidé si v šatně divadla uschovali klobouk. Šatnářka po přestavení vydává klobouky náhodně.*
Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jedna osoba dostane klobouk správně?

Návod: označte S1 … první člověk dostane správně klobouk,
S2 … druhý člověk dostane správně klobouk,
S3 … třetí člověk dostane správně klobouk.

Úloha 4.3 *V dodávce zboží je* 50 *matic a* 150 *šroubů. Polovina matic a polovina šroubů je poškozena.*
Jestliže náhodně vybereme jednu součástku, jaká je pravděpodobnost, že to bude matice nebo poškozená součástka?

Úloha 4.4 *Při zkoušce si student náhodně vybere* 3 *ze* 30 *otázek. Aby zkoušku úspěšně absolvoval, musí správně odpovědět aspoň dvě z nich.*
Jaká je pst, že student, který umí jen 20 *otázek, absolvuje úspěšně zkoušku?*

Úloha 4.5 *V sáčku je 30 kuliček, z toho je 8 kuliček bílých, 10 modrých a 12 červených. Jaká je pst, že ze sáčku vytáhneme tři kuličky stejné barvy?*

Úloha 4.6 *V loterii bylo vydáno 1000 losů, z nich 100 vyhrává. S jakou pravděpodobností získáte aspoň jednu výhru, koupíte-li si a) Jeden los? b) Pět losů? c) Deset losů? d) Dvacet losů?*

Úloha 4.7 *Z 27 žáků osmé třídy jich 10 je doučováno z matematiky a 13 z fyziky. Přitom polovina z těch, co mají doučování z matematiky, je doučována i z fyziky. Jaká je pst, že náhodně vybraný žák z této třídy je doučován aspoň v jednom z daných dvou předmětů?*

Úloha 4.8 *Z 25 žáků deváté třídy jich 15 má doučování z matematiky a 8 doučování z angličtiny. Přitom pětina z těch, co mají doučování z matematiky, je doučována i z angličtiny. Jaká je pst, že náhodně vybraný student z dané třídy není doučován ze žádného z daných dvou předmětů?*

Úloha 4.9 *Prodejce obleků má zkušenost, že zákazníci požadují krejčovskou úpravu u 10 % prodaných kalhot a u 15 % prodaných sak. U 7 % prodaných obleků zákazníci požadují úpravu jak kalhot, tak saka. Prodá-li prodejce za odpoledne čtyři obleky čtyřem různým zákazníkům (předpokládejte, že zákazníci se navzájem neznají a přicházejí do obchodu nezávisle), určete pst, s jakou bude požadována aspoň jedna úprava obleku (kalhot nebo saka nebo obojího).*

Úloha 4.10 *Prodejce obleků má zkušenost, že zákazníci požadují krejčovskou úpravu u 12 % prodaných kalhot a u 15 % prodaných sak. U 8 % prodaných obleků zákazníci požadují úpravu jak kalhot, tak saka. S jakou pstí u náhodně vybraného prodaného obleku*

a) *nebude požadována žádná úprava?*

b) *bude zákazník požadovat jen jednu úpravu (kalhot nebo saka, ne však obojího)?*

Úloha 4.11 *U skupiny* 40 *studentů víme, že* 80% *z nich jde matematika,* 70% *jde Excel,* 60% *je dobrých v matematice i Excelu. Jaká je pst, že náhodně vybraný student z této skupiny bude mít problémy s matematikou i s Excelem?*

Úloha 4.12 *Ve třídě je 25 žáků, z nich 17 má rádo matematiku, 15 má rádo fyziku, a čtyři žáci nemají rádi ani matematiku, ani fyziku. Jaká je pst, že náhodně vybraný žák této třídy má rád matematiku i fyziku současně?*

Úloha 4.13 *Tři kamarádi se v baru domluvili, že ten, na kterého padne los, zaplatí za všechny útratu. Losují tak, že každý hodí mincí a ten, kterému jeho mince ukáže jinou stranu než mince zbývajících dvou, musí zaplatit. Pokud všechny mince ukážou stejnou stranu. Házení opakují až do rozhodnutí.*

a) S jakou pstí se rozhodne již prvním hodem?

b) S jakou pstí nebude ani po druhém hodu rozhodnuto?

c) S jakou pstí nebude ani po čtvrtém hodu rozhodnuto?

d) Lze předem stanovit, po kolikátém hodu již musí být rozhodnuto?

Úloha 4.14 *Přístroj se skládá ze tří částí, z nichž každá nezávisle na zbývajících může mít v průběhu určité doby poruchu. Porucha kterékoliv části má za následek poruchu celého přístroje. Spolehlivost (tj. pravděpodobnost, že nedojde k poruše) první části je 0,8, druhé 0,9 a třetí 0,7. Jaká je spolehlivost celého přístroje?*

Úloha 4.15 *V nádražní hale jsou umístěny tři automaty na kávu. U prvního nastane porucha s prstí 0,1, u druhého s pstí 0,15 a u třetího s pstí 0,05. Jaká je pst, že nastane porucha*

a) právě jednoho automatu

b) nejvýše jednoho automatu?

4.3.2 Podmíněná pst

Úloha 4.16 *Víme, že při dvou hodech kostkou padl celkem součet ok dělitelný pěti (to je podmínka, která nastala). Jaká je pst, že padly dvě pětky (tuto informaci už nevíme, a musíme tedy danou pst spočítat)?*

Úloha 4.17 *Víme, že při dvou hodech kostkou padla aspoň jedna pětka (to je podmínka, která nastala). Jaká je pst, že součet hodnot obou hodů je dělitelný třemi (tuto informaci už nevíme, a musíme tedy danou pst spočítat)?*

Úloha 4.18 *Víme, že součet dvou hodů kostkou je dělitelný čtyřmi (to je podmínka, která nastala). Jaká je pst, že při obou hodech padlo sudé číslo (tuto informaci už nevíme, a musíme tedy danou pst spočítat)?*

Úloha 4.19 *V osudí je 6 bílých, 8 červených a 10 modrých kuliček. Postupně bez vracení vylosujeme dvě kuličky. S jakou pstí bude*

a) první modrá

b) druhá modrá, víle-li, že první byla červená

c) druhá modrá (aniž víme, jakou barvu měla první)?

Odpovědi na otázky a některá cvičení viz 14.4.

5 Týden 05

5.1 Bernoulliovy pravděpodobnosti

Uvažujme experiment takové povahy, že mohou nastat jen dva různé výsledky, které se navzájem vylučují (nemůže k nim dojít současně): „úspěch“ a „neúspěch“ („úspěch“ nemusí znamenat nic světoborného; označuje se tímto termínem proto, že se jedná o ten ze dvou možných výsledků, na který se ve svých úvahách chceme zaměřit).

Pravděpodobnost úspěchu je p, pravděpodobnost neúspěchu $1 - p$. Náhodná veličina X, která udává počet výskytů úspěchu při N nezávislých opakováních experimentu, má tzv. binomické rozdělení pravděpodobnosti (s parametry N, p) a nabývá hodnot z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ s pravděpodobností

$$P(X = r) = \binom{N}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{N-r}.$$

Mluví se zde o nezávislých opakováních experimentu. Slovo „nezávislých“ znamená, že výskyt úspěchu při prvním opakování experimentu nemá vliv na to, zda při druhém a dalších opakováních nastane úspěch nebo ne. Skutečnost, že veličina X má binomické rozdělení s parametry N, p, budeme označovat

$$X \sim Bi(N, p).$$

Podívejme se nyní na konkrétní příklady.

Příklad 5.1 *Házeme čtyřikrát kostkou. Veličina X udává, kolikrát přitom padne šestka. Jaké je rozdělení pravděpodobnosti veličiny X?*

Řešení: Pravděpodobnost, že při jednom hodu padne šestka, je rovna $p = \frac{1}{6}$. Hody jsou navzájem nezávislé, tj. pokud v prvním hodu padla šestka, nemá to vliv na to, zda ve druhém hodu padne nebo ne. Tedy veličina X, která měří počet šestek při čtyřech hodech, má binomické rozdělení pravděpodobnosti s parametry $N = 4$, $p = \frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(ne\ 6)\cdot P(ne\ 6)\cdot P(ne\ 6)\cdot P(ne\ 6) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = 0{,}482;\\
P(X=1) &= P(\textit{jednou padne } 6\textit{, jinak něco jiného než } 6) =\\
&= P(6 \textit{ padne jako první, jinak ne}) + P(6 \textit{ padne druhá, jinak ne}) +\\
&\quad + P(6 \textit{ padne jako třetí, jinak ne}) + P(6 \textit{ padne čtvrtá, jinak ne}) =\\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} =\\
&= (\textit{všechna možná pořadí výskytu jednoho úspěchu})\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} =\\
&= \binom{4}{1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = 0{,}386;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= P(\textit{dvakrát padne šestka, jinak ne}) = \\
&= (\textit{všechny možnosti výběru } 2 \textit{ pořadí ze } 4) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \\
&= \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 0{,}116; \\
P(X=3) &= \binom{4}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 0{,}015; \\
P(X=4) &= \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = 0{,}001.
\end{aligned}
$$

Všimněte si, že součet těchto pěti pravděpodobností je roven jedné. Při výpočtu jsme zaokrouhlovali na tři desetinná místa.

Příklad 5.2 *Senátor Swenson před volbami tvrdí, že pro něj bude hlasovat 70 % voličů. Agentura STEN chce provést průzkum u 20 lidí. Náhodná veličina X udává počet Swensonových voličů z dvaceti dotázaných. Určete*

a) *teoretické rozdělení veličiny X (před provedením průzkumu);*

b) *pravděpodobnost, že Swensona bude volit přesně 14 lidí z 20 dotázaných, pokud se lidé budou chovat přesně podle předpovědi;*

c) *pravděpodobnost, že Swensona bude volit maximálně 14 lidí z 20 dotázaných, pokud se lidé budou chovat přesně podle předpovědi.*

Řešení:

ad a) *Dané teoretické rozdělení je binomické s parametry $N = 20$ a $p = 0{,}7$. Veličina X nabývá hodnot z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, 20\}$ s pravděpodobností*

$$P(X = r) = \binom{20}{r} \cdot 0{,}7^r \cdot 0{,}3^{20-r}.$$

ad b) *Dosazením do vzorce a) máme*

$$P(X = 14) = 0{,}192,$$

pokud zaokrouhlujeme na tři desetinná místa.

ad c) *Zde nejlépe: vypočteme pravděpodobnost opačného jevu a odečteme ji od jedničky:*

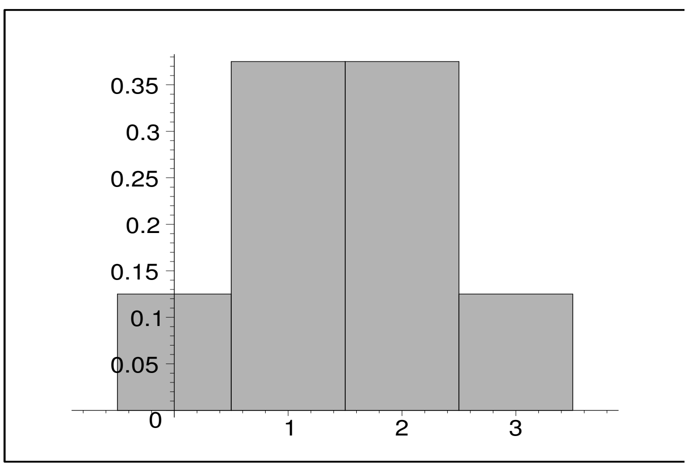
$$
\begin{aligned}
P(X \le 14) &= 1 - P(X > 14) = \\
&= 1 - (p(15) + p(16) + p(17) + p(18) + p(19) + p(20)) = \\
&= 1 - (0{,}179 + 0{,}13 + 0{,}072 + 0{,}028 + 0{,}007 + 0{,}001) = 0{,}583.
\end{aligned}
$$

Pokud by agentura STEN v předchozím příkladu zjistila, že „pro“ bylo jen 8 lidí z 20, pak některý z teoretických předpokladů nebyl v pořádku:

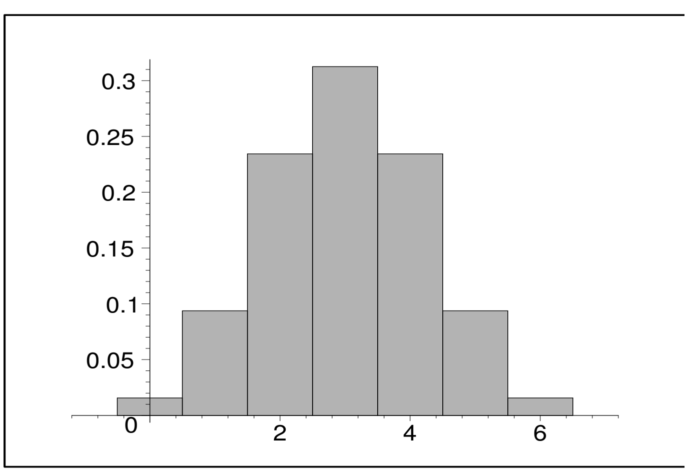
- vzorek dotázaných lidí nebyl náhodný (byl z antiswensonovské oblasti státu);
- odpovědi nebyly nezávislé (odpovídající mezi sebou navzájem diskutovali o Swensonovi);
- STEN pracovala dobře, ale Swenson byl příliš optimistický se svým odhadem (to je nejpravděpodobnější problém).

Ukažme si ještě graficky tvar binomického rozdělení, například pomocí pravděpodobnostního histogramu.

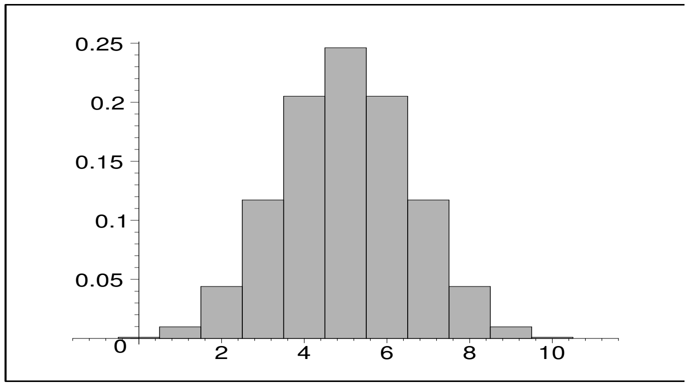
a) Pokud $p = 0{,}5$, rozdělení je vždy symetrické. Například histogram pravděpodobností binomického rozdělení pro $N = 3$, $p = 0{,}5$:



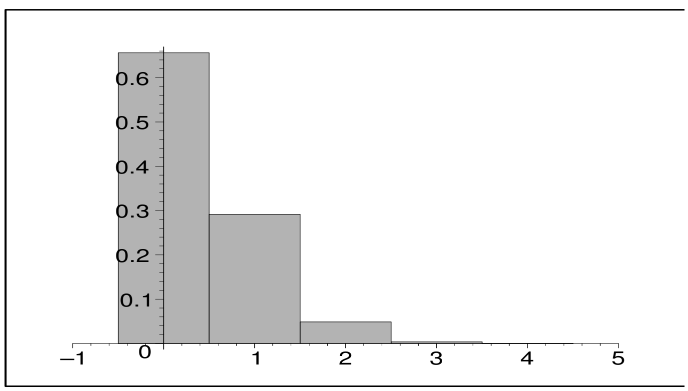
Nebo histogram pravděpodobností binomického rozdělení pro $N = 6$, $p = 0{,}5$:



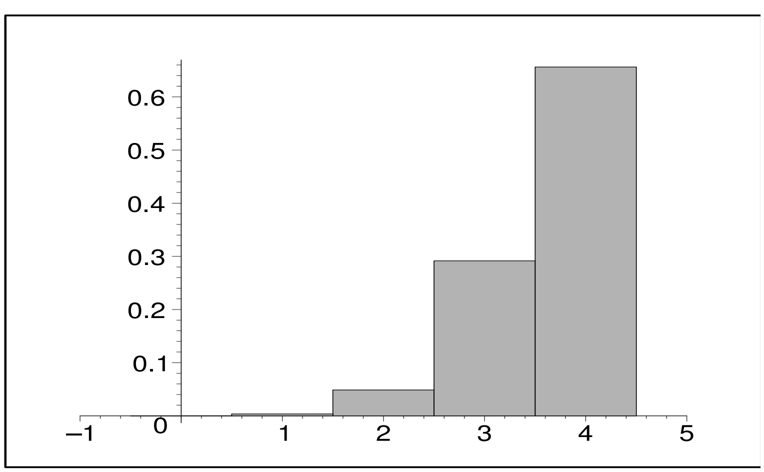
Nebo histogram pravděpodobností binomického rozdělení pro $N = 10$, $p = 0{,}5$:



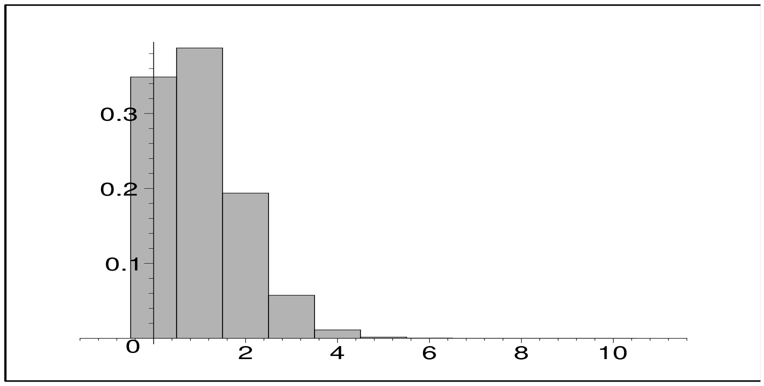
b) Pro $p \neq 0{,}5$ a malé N je rozdělení asymetrické, ale pro rostoucí N se stává více a více symetrickým. Histogram pravděpodobností binomického rozdělení pro $N = 4$, $p = 0{,}1$:



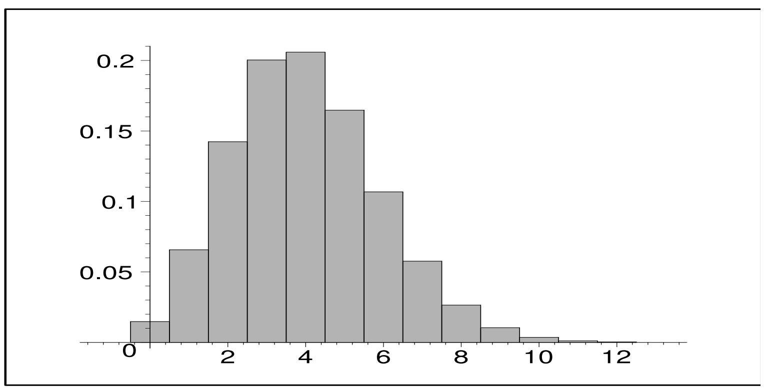
Histogram pravděpodobností binomického rozdělení pro $N = 4$, $p = 0{,}9$:



Histogram pravděpodobností binomického rozdělení pro $N = 10$, $p = 0{,}1$:

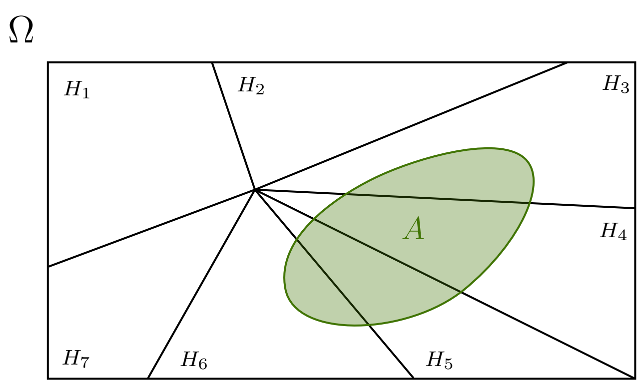


Histogram pravděpodobností binomického rozdělení pro $N = 40$, $p = 0{,}1$:



5.2 Úplná pravděpodobnost

Uvažujme nyní množinu Ω elementárních výsledků experimentu rozloženou (rozklad množiny) na disjunktní podmnožiny H_1, H_2, až H_k – viz obrázek (pro $k = 7$):



Lze vidět z obrázku, že množinu A lze rozložit na sjednocení navzájem disjunktních jevů $H_3 \cap A$, $H_4 \cap A$, $H_5 \cap A$, $H_6 \cap A$. A pak uplatníme axiom (P3) a dostaneme

$$P(A) = P(H_3 \cap A) + P(H_4 \cap A) + P(H_5 \cap A) + P(H_6 \cap A).$$

Užitím vzorce 4.1 pro každý člen na pravé straně dostaneme

$$P(A) = P(H_3) \cdot P(A|H_3) + P(H_4) \cdot P(A|H_4) + P(H_5) \cdot P(A|H_5) + P(H_6) \cdot P(A|H_6).$$

Tomuto právě odvozenému vztahu říkáme věta o úplné psti. Jak je vidět z obrázku, důkaz této rovnosti plyne ze vzájemné disjunktnosti množin $H_3 \cap A$, $H_4 \cap A$, $H_5 \cap A$, $H_6 \cap A$ a z axiomu (P3) o psti sjednocení disjunktních množin.

A ještě poslední věc: kdy tuto větu užijeme? Odpověď je nasnadě: když máme k dispozici (nebo můžeme snadno určit) všechny dílčí psti na pravé straně rovnosti – tehdy $P(A)$ lze určit na základě tohoto vztahu. Tedy pokud neznáme $P(A)$, ale celkem snadno určíme psti $P(A|H_i)$, vzorec se zdarem použijeme.

Věta 5.1 *(Věta o úplné psti) Množinu Ω lze rozložit[10] na sjednocení navzájem disjunktních neprázdných podmnožin H_1, H_2, až H_k. A je náhodný jev, tj. $A \subseteq \Omega$. Pak platí:*

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \cdots + P(H_k) \cdot P(A|H_k).$$

Příklad 5.3 *V čokoládovně se kompletují bonboniéry na třech výrobních linkách.*

Linka 1: *kompletuje 40 % produkce, pokazí (špatně zabalí) 5 % bonboniér, které touto linkou procházejí.*

Linka 2: *kompletuje 45 % produkce, pokazí (špatně zabalí) 4 % bonboniér, které touto linkou procházejí.*

Linka 3: *kompletuje 15 % produkce, pokazí (špatně zabalí) 2 % bonboniér, které touto linkou procházejí.*

Zkontrolujeme náhodně bonboniéru zabaleno ve skladu (nevíme, ze které linky) – jaká je pst, že nebude v normě (= není správně zabalena)?

Řešení: Když jsou data takhle krásně naservírována, užít věty 5.1 nebude problém – horší budou příklady, kdy tak krásně sestavit data musíme sami při řešení. V každém případě, pokud by se nám nepodařilo najít systém neprázdných podmnožin H_i, který vytváří disjunktní pokrytí množiny Ω, s příkladem bychom se nemohli vypořádat pomocí vzorce na úplnou pst.

Nyní jsou jevy H_1, H_2, H_3 jasné:

H_1 ... náhodně vybraná bonboniéra ze skladu byla vyrobena na lince 1. Odtud $P(H_1) = 0{,}4$.

H_2 ... náhodně vybraná bonboniéra ze skladu byla vyrobena na lince 2. Odtud $P(H_2) = 0{,}45$.

[10] Rozklad množiny na podmnožiny: Viz základy matematiky, přednáška 7, rozklad množiny příslušný pojmu relace ekvivalence.

H_3 ... náhodně vybraná bonboniéra ze skladu byla vyrobena na lince 3. Odtud $P(H_3) = 0{,}15$.

Jako A označíme náhodný jev, jehož pst hledáme: A ... Náhodně vybraná bonboniéra ze skladu je zmetkově zabalena.

Je asi docela srozumitelné, když už vyjádříme výsledek úlohy pomocí

$$P(A) = 0{,}40 \cdot 0{,}05 + 0{,}45 \cdot 0{,}04 + 0{,}15 \cdot 0{,}02 = 0{,}041.$$

Výsledek vlastně udává jakýsi obecný počet procent (4,1%) špatně zabalených bonboniér. A proto se nejedná o úlohu, která by byla příliš vzdálena základní škole – vlastně počítáme jakési procento špatné zabalenosti z celku všech bonboniér.

5.3 Bayesův vzorec

Kdybychom ještě zůstali u stejného obrázku jako v předchozím oddílku, a vlastně i u stejného vzorce 4.1, který jsme využili u úplné psti, lze tento vzorec užít ještě jednou a jinak. Uvažujme tentýž příklad tří linek balicích bonboniéry, i se stejnými údaji o objemech produkce a kvalitách balicích linek – z uvedených dat je možné spočítat ješte psti jiného typu, a sice psti $P(H_1|A)$, $P(H_2|A)$, $P(H_3|A)$.

Aby nedošlo k mýlce, zopakujeme si, co označuje podmíněná pst, ať už oba jevy napíšeme v jakémkoli pořadí:

$P(A|H_1)$ ... pst, že náhodně vybraná bonboniéra ve skladu bude zabalena zmetkovitě za podmínky (= už víme, že nastala situace), že tato bonboniéra byla zabalena na lince 1 ... tuto pst jsme dostali už v zadání příkladu 5.3 a je rovna 0,05.

$P(H_1|A)$ ... pst, že náhodně vybraná bonboniéra pochází z linky 1 za podmínky (= už víme, že nastala situace), že tato bonboniéra byla zabalena nekvalitně. Tato pst v zadání příkladu nebyla uvedena, ale je možné ji vyčíslit pomocí vzorce 4.1, čili

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)}.$$

Pst $P(A) = 0{,}041$ je úplná pst z příkladu 5.3, pst $P(H_1 \cap A)$ vypočteme podle vzorce pro pst průniku:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}40 \cdot 0{,}05}{0{,}041} = 0{,}4878.$$

Věta 5.2 *(Bayesův vzorec) Množinu Ω lze rozložit na sjednocení navzájem disjunktních neprázdných podmnožin H_1, H_2, až H_k. A je náhodný jev, tj. $A \subseteq \Omega$. Pak platí:*

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \cdots + P(H_k) \cdot P(A|H_k)}$$

pro každý index $i \in \{1, 2, 3\}$.

Poznámka k tomu, co jsme vlastně spočítali: Pst $P(H_1) = 0{,}40$ je tzv. **apriorní pst** (a priori = předem), neboli pst, jejíž hodnotu známe předem, už v zadání – pst toho, že náhodně zabalená bonboniéra pochází z linky 1.

Pst $P(H_1|A)$ je tzv. **aposteriorní pst** (a posteriori = poté, tj. po měření, po provedení kontroly vybrané bonboniéry), je pst, jejíž hodnotu známe až po provedení nějaké kontroly v balírně bonboniér či ve skladu balírny: náhodně jsme vybrali bonboniéru a zkontrolovali ji a zjistili, že je nekvalitně zabalená. Po této informaci-kontrole se pst změní na $P(H_1|A) = 0{,}4878$ ... pokud kontrolovaná bonboniéra je nekvalitně zabalená, roste šance, že se jedná o bonboniéru balenou na lince 1, protože linka 1 je známá největším procentem zmetkovitého balení, a současně je svým objemem produkce zastoupena celkem silně.

Podobně bychom mohli podle Bayesova vzorce vypočítat aposteriorní psti $P(H_2|A) = 0{,}439$, $P(H_3|A) = 0{,}0732$. Všimněte si v tom například, že apriorní patnáctiprocentní $P(H_3)$ u náhodně kontrolované bonboniéry klesne jen na aposteriorní 7,3%-ní $P(H_3|A)$, protože linka třetí má malou zmetkovitost balení, tj. při špatně zabalené čokoládě klesne šance, že byla balena na lince 3.

Dvě pomůcky, které snad pomohou čtenáři si zapamatovat Bayesův vzorec či zkontrolovat jeho správnost:

- Při výpočtu např. $P(H_1|A)$ se na pravé straně objevuje v čitateli podmíněná pst v opačném pořadí jevů, tj. $P(A|H_1)$ ... tu totiž známe a můžeme ji proto do pravé strany dobře dosadit.

- V čitateli pravé strany se vyskytuje $P(H_1) \cdot P(A|H_1)$, ve jmenovateli také – ve jmenovateli se totiž vyskytuje suma všech možných součinů $P(H_s) \cdot P(A|H_s)$ pro $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Jinými slovy, v čitateli pravé strany se vyskytuje jeden z členů jmenovatele.

- To už jsme měli zmínit dříve: ve jmenovateli pravé strany je vlastně počítána úplná pst jevu A podle věty o úplné psti.

5.4 Shrnutí

V této kapitole jsme se seznámili s prvním typem rozdělení pravděpodobnosti, které má široké využití v praxi. Veličina X s rozdělením $Bi(N, p)$ nabývá hodnot z množiny $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ s pravděpodobností

$$p(k) = P(X = k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k}. \tag{5.1}$$

Základní témata výpočtu psti rozvíjejí věty 5.1, 5.2. První z nich, větu o úplné pravděpodobnosti, použijeme při možnosti rozložit množinu Ω na několik neprázdných navzájem disjunktních částí H_i takových, že $P(H_i)$ máme k dispozici. Pravděpodobnosti $P(H_i)$ představují jakési váhy, pomocí nichž $P(A)$ pak vypočteme jako vážený průměr pstí $P(A|H_i)$ – a jako u každého dobrého váženého průměru, i pro váhy $P(H_i)$ platí, že jejich součet je roven jedné.

Poslední významnou větu, Bayesův vzorec 5.2, lze využít při výpočtu $P(H_i|A)$ ... tyto „opačné“ podmíněné psti často neznáme, zatímco $P(A|H_i)$ jsou často známy už ze zadání. Pokud dobře víme, že na pořadí podmínky a neznámého jevu při výpočtu podmíněné psti záleží, tak víme, že tyto dvě psti jsou téměř vždy navzájem různé, a jestliže je nezaměníme, tak tu obtížněji vyčíslitelnou právě můžeme vyjádřit pomocí Bayesova vzorce.

Je sice pravda, že pst $P(A \cap H_i)$ v čitateli Bayesova vzorce lze vyjádřit pomocí $P(A) \cdot P(H_i|A)$ i pomocí$P(H_i) \cdot P(A|H_i)$, protože průnik je operace komutativní, tj. větu o psti průniku z kapitoly 3 lze užít „oběma směry“. Ale jen naprostý amatér zde při vybavování vzorce nebo při výpočtu příkladu udělá chybu, neboť $P(H_i|A)$ nemá smysl dosazovat, protože právě to neznáme a chceme určit – v čitateli Bayesova vzorce se použije $P(H_i) \cdot P(A|H_i)$.

5.5 Otázky k opakování a cvičení 05: Bernoulliovy psti, věta o úplné psti, Bayesův vzorec

U následujících výroků rozhodněte, zda se jedná o výrok pravdivý či nepravdivý.

Otázka 5.1 *Binomické číslo $\binom{N}{k}$ udává, kolika způsoby lze vybrat k prvků z N-prvkové množiny.*

Otázka 5.2 *Pokud $X \sim Bi(N, p)$, tak veličina X může nabývat pouze hodnot z množiny $\{1, 2, \ldots, N\}$.*

Otázka 5.3 *Kromě veličiny X s binomickým rozdělením udávajícím počet výskytů i lze také měřit veličinu $Y = \frac{X}{N}$ relativních četností $\frac{i}{N}$. Přitom platí*

$$P(X = i) = P(Y = \frac{i}{N}).$$

Otázka 5.4 *Věta o úplné psti platí, i pokud existují takové indexy $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, že $H_I \cap H_j \neq \emptyset$.*

Otázka 5.5 *Psti $P(H_i)$ ve větě o úplné psti hrají roli tzv. vah, tedy*

$$\sum_{1}^{k} P(H_i) = 1.$$

Otázka 5.6 *Psti $P(A|H_i)$ ve větě o úplné psti hrají roli tzv. vah, tedy*

$$\sum_{1}^{k} P(A|H_i) = 1.$$

Otázka 5.7 *Pro libovolné náhodné jevy H_i a A platí*

$$P(A) \cdot P(H_i|A) = P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

Otázka 5.8 *Apriorní pstí u Bayesova vzorce je například $P(H_1)$, aposteriorní pstí je například $P(H_1|A)$.*

Otázka 5.9 *Bayesův vzorec bychom mohli teoreticky i upravit na tvar*

$$P(H_i|A) = \frac{P(A) \cdot P(H_i|A)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \cdots + P(H_k) \cdot P(A|H_k)}.$$

5.5.1 Binomické psti = Bernoulliho psti

Úloha 5.1 *Příklad s oříšky Bruno si koupil 10 kg oříšků, 30% byly kešu, 40% lískové a 30% vlašské. Je jich tolik, že šance, že při každém vytažení se pst, že vytáhnu kešu se nemění tj. první vytažený bude kešu s pstí* 0,30*, druhý vytažený bude kešu s pstí* 0,30*, atd.*

Označme veličiny
K=počet kešu oříšků z 5 náhodně vybraných oříšků,
L=počet lískových oříšků z 5 náhodně vybraných oříšků.

a) Jaká je pravděpodobnost, že z těch náhodně vybraných nebude žádný kešu oříšek
$P(K = 0) = 0,7^5 = 0,1681$
b) Jaká je pravděpodobnost, že z těch náhodně vybraných bude 1 kešu oříšek
$P(K = 1) = 5 \cdot 0,30 \cdot\ 0,70^4 = 0,36015$
c) Jaká je pravděpodobnost, že z těch náhodně vybraných bude 2 kešu oříšky
$P(K = 2) = \binom{5}{2} 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7^3 = 0,3087$
d) Jaká je pravděpodobnost, že z těch náhodně vybraných bude 3 kešu oříšky
$P(K = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^2 = 0,1323$
e) Jaká je pravděpodobnost, že z těch náhodně vybraných bude 4 kešu oříšky
$P(K = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0,3^4 \cdot 0,7 = 0,02835$
f) Jaká je pravděpodobnost, že z těch náhodně vybraných bude 5 kešu oříšků
$P(K = 5) = 0,3^5 = 0,00243$

g) Vypočítej, že z 5 oříšků je počet lískových oříšků je alespoň 2. $P(L \geq 2) = 1 - P(L \leq 1) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - 0,6^5 - \binom{5}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^4 = 0,663$

Poznámka: Součet pstí a) až f) je roven jedné, protože jsou to psti všech elementárních jevů v případě měření veličiny K.

Úloha 5.2 *Každý pracovní den jede výrobní linka a pokazí se za každý den s pst P=0,1 (pst poruchy každý den je stále stejná ... každý večer vymění na lince porouchané věci za nové).*

X = počet dní z daných 10, kdy k poruše došlo.

Určete pst, že z deseti pracovních dnů nastane porucha linky právě třikrát.

Úloha 5.3 *Hodíme a) deseti, b) dvaceti, c) třiceti mincemi. S jakou pstí na polovině z nich padne líc?*

Úloha 5.4 *Pravděpodobnost, že spotřeba plynu ve všední den určitého období přesáhne stanovenou normu, je 0,2. Jaká je pst, že během pěti náhodně volených pracovních dnů*

a) *nebude norma překročena*

b) *bude překročená dvakrát*

5.5.2 Úplná pst nebo Bayesův vzorec

Úloha 5.5 *Máme nějakou cihlovou stavbu. Cihly dováží v poměru* $1:2:2$ *, tj. průměrně na každých pět cihel 1 dovezou z cihelny C1 (20 %), 2 cihly dovezou z cihelny C2 (40 %) a 2 cihly dovezou z cihelny C3 (40 %).*

První cihelna vyrábí super cihly v 80 % případů,
Druhá cihelna vyrábí super cihly v 65 % případů,
Třetí cihelna vyrábí super cihly v 72 % případů.

a) Vypočítejte průměrné procento super cihly.

b) Náhodně vybraná cihla se prokázala superkvalitní (to už víme) – jaká je pst, že tatoi cihla pochází z cihelny C1 (to nevíme)?

Úloha 5.6 *V basketbalu hraje 9 lidí, jeden z nich (průměrný) trefí koš při trestném střílení s pst 0,4. Zbylých osm se trefí při trestném střílení s pst 0,8.*

Náhodnost je určena rádiem – hlásí a nebylo řečeno, jaký hráč z týmu hází.

a) Určete pst jevu A … Náhodně vybraný hráč hází a trefí se;
b) V rádiu řekli, že hráč hodil a trefil se (to víme) – s jakou pstí se jednalo o hráče začátečníka (to nevíme)?

Úloha 5.7 *Máme 15 televizorů a 3 z těch televizorů jsou nekvalitní a 12 jsou kvalitní. Někdo si kupuje televizor a chtěl by kvalitní televizor. Pomůže expert, ten kvalitní televizor pozná s pstí* $\frac{5}{6}$*, nekvalitní TV expert označí za kvalitní s pstí* $\frac{1}{11}$*. Zákazník si náhodně vybere TV, zkonzultuje s expertem, ten si pak koupí.*

a) Vypočtěte pst, že nastane jev A … zákazníkem vybraný TV bude expertem označen za kvalitní.

b) Nastal jev A (to víme) – jaká je pst, že vybraný televizor je skutečně kvalitní?

Úloha 5.8 *V zásilce je 400 výrobků, z nichž 150 dodal závod A a 250 závod B. Každý závod měl ve své dodávce 5 vadných výrobků. Jaká je pst, že vybereme vadný výrobek, pokud*

a) jej vybíráme náhodně z celé zásilky,

b) nejdříve náhodně vybereme dodávku (hodíme si korunou), a teprve poté z ní výrobek?

Úloha 5.9 *Je známo, že 90 % výrobků odpovídá standardu. Byla vypracována zjednodušená kontrolní zkouška, která u standardního výrobku dá kladný výsledek s pravděpodobností 0,95, zatímco u výrobku nestandardního s pravděpodobností 0,2. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek, u něhož zkouška dopadla kladně, je standardní?*

Úloha 5.10 *Tři střelci vystřelili každý jednou na vzdálený terč. Z jejich dosavadní výkonnosti odhadujeme, že první zasáhne terč v průměru v 87 případech ze sta, druhý v průměru v 72 případech ze sta a třetí v průměru v 65 případech ze sta. V terči byly zjištěny dva zásahy. S jakou pravděpodobností minul třetí střelec?*

Úloha 5.11 *Ve třídě je celkem dvanáct dětí, z toho jeden dyskalkulik (tj. nejde mu moc matematika). Dyskalkulik zvládne příklad na procenta v* 50 % *případů, ostatní děti v* 70 %.

a) *Jaká je pst, že náhodně vybrané dítě ve třídě uspěje v příkladu na procenta na prověrce?*

b) *Paní učitelka po prověrce opravuje příklady na procenta a nad jednou prověrkou vykřikne: „Ano, je to správně“ (vykřikuje často, takže z toho nelze usoudit, o jakého žáka se jedná). Vyčíslete pst, že se jednalo zrovna o písemku žáka, který má s procenty větší problémy.*

Úloha 5.12 *Šest lidí trénuje ve střelbě z luku na terč z příkladu 3.29. Petr a Pavel se po nějaké době tréninku trefí do pětky nebo desítky s pstí* 0,7*, Anežka, Alice a Anna s pstí* 0,5*, jenom Cyrilovi se ještě nedaří a do pětky nebo desítky se trefuje s pstí* 0,35*. Jaká je průměrná úspěšnost = pst, že náhodně vybraný hráč se trefí, nevíme který?*

Úloha 5.13 *Honza a Pavel hodí každý jednou kostkou. Vyhraje ten, komu padne větší číslo (kdyby padla stejná čísla, hod by opakovali). Po hodu se Honza raduje, že vyhrál (to víme) – s jakou pstí mu padla pětka (to nevíme)?*

Odpovědi na otázky a některá cvičení viz 14.5.

6 Procvičování příkladů, prověrka

V této kapitole se jen podíváme na řešení některých typů příkladů, ne nutně všech, které byly probrány v prvních čtyř týdnech na cvičení a mohly by se objevit na prověrce. Další příklady z minulých prověrek byly rozděleny do předchozích kapitol.

Příklad 6.1 *Výrobce počítačů používá při přejímce hard disků následující strategii: Z celé dodávky detailně zkontroluje soubor náhodně vybraných disků a najde-li mezi nimi* 5 % *nebo více disků s vadnými sektory, odmítne dodávku převzít. V opačném případě dodávku příjme.*

A) S jakou pravděpodobností výrobce ODMÍTNE dodávku 300 *disků, která ve skutečnosti obsahuje přesně* 4% *disků s vadnými sektory, pokud detailně kontroluje soubor*

a) 20 *náhodně vybraných disků,*

b) 40 *náhodně vybraných disků?*

B) S jakou pravděpodobností výrobce PŘIJME dodávku 300 *disků, která ve skutečnosti obsahuje přesně* 6% *disků s vadnými sektory, pokud detailně kontroluje soubor*

c) 20 *náhodně vybraných disků,*

d) 40 *náhodně vybraných disků?*

Řešení: Ad a): dodávka disků bude odmítnuta, bude-li ve dvaceti vybraných nalezen aspoň jeden vadný disk. Nejjednodušší výpočet je tedy od hodnoty 1 odečíst pst opačného jevu, že totiž všech dvacet disků bude dobrých: $1 - \frac{\binom{288}{20}}{\binom{300}{20}} = 0{,}57$.

ad b) Podobně jako a) s tím rozdílem, že firma kontroluje 40 disků v dodávce a odmítne ji při dvou a více nalezených vadných discích, tj. od hodnoty 1 odečteme pst, že ze 40 kontrolovaných bude vadný disk žádný nebo jeden: $1 - \frac{\binom{288}{40}}{\binom{300}{40}} - \frac{\binom{12}{1}\cdot\binom{288}{39}}{\binom{300}{40}} = 0{,}4923$.

ad c) dodávka disků bude PŘIJATA, bude-li ve dvaceti vybraných nalezeno méně než pět procent vadných, čili žádný vadný: $\frac{\binom{282}{20}}{\binom{300}{20}} = 0{,}2781$.

ad d) dodávka disků bude PŘIJATA, bude-li ve čtyřiceti vybraných nalezeno méně než pět procent vadných, čili žádný nebo jeden: $\frac{\binom{282}{40}}{\binom{300}{40}} + \frac{\binom{18}{1}\cdot\binom{282}{39}}{\binom{300}{40}} = 0{,}2778$.

Příklad 6.2 *Je známo, že* 4 % *panelů od určitého výrobce mají odchylku od požadované délky,* 3 % *panelů mají odchylku od požadované šířky. Přitom celá čtvrtina panelů mající odchylku délky má i odchylku šířky. S jakou pravděpodobností bude mít náhodně vybraný panel*

a) odchylku délky i šířky?

b) odchylku délky nebo šířky?

c) odchylku délky, ale ne šířky?

d) oba rozměry v pořádku?

e) odchylku délky, má-li odchylku šířky?

Řešení: Je výhodné si celou situaci se zadanými údaji kreslit – tomu říkáme grafická podpora řešení úlohy (na obrázku samotném už data ze zadání zpracováváme v jejich vzájemných vztazích). Jedná se o jednoduchou úlohu na pst náhodných jevů znázorněných množinami nebo jejich částmi. Grafickou podporu (obrázek) bychom mohli nazvat Vennovým diagramem, ovšem do jednotlivých částí množin nezakreslujeme prvky, ale procenty píšeme jejich procentuální počet vzhledem k celku:

ad a) 1%, ad b) 6%, ad c) 3%, ad d) 94%, ad e) $\frac{1}{3}$ tj. přibližně $33,33\%$.

Příklad 6.3 *V losovacím klobouku zakrytém šátkem* 5 *bílých a* 8 *černých koulí. Postupně losujeme* 2 *koule, přičemž vylosované koule nevracíme zpět.*

a) S jakou pravděpodobností jsou obě vylosované koule bílé?

b) S jakou pravděpodobností jsou vylosované koule různých barev? Zapište výsledky pomocí násobení pravděpodobností. (tj. bez kombinačních čísel)

c) Vypočtěte (a), (b) nyní pomocí kombinačních čísel, která se zaměřují jen na výsledky výběru kuliček tak nějak najednou, bez ohledu na pořadí.

Řešení: Rozmyslete si, že a proč jsou následující postupy správným vyčíslením: ad a) $\frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12}$.

ad b) $\frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} + \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12}$.

ad c) $P(a) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{13}{2}}$, $P(b) = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{13}{2}}$. Po vyčíslení jsou výsledkem stejná čísla jako (a), (b)!!!

Příklad 6.4 *Hodili jsme současně dvěma kostkami.*

a) S jakou pravděpodobností padla alespoň jedna šestka, víme-li, že padl součet 8*?*

b) S jakou pravděpodobností padl součet 8*, víme-li, že padla aspoň jedna šestka?*

c) S jakou pravděpodobností padl součet větší než 10*, víme-li, že padla alespoň jedna šestka?*

Řešení: Jedná se o příklady na podmíněnou pst, které řešíme podle vzorce 4.1. Je důležitý rozdíl mezi (a) a (b): pst jevu, který víme, že nastal, uvádíme vždy ve jmenovateli.

ad a) $\frac{2}{5}$, pokud bychom přemýšleli podle vzorce klasické psti, a všechny případy, které mohou nastat, chápali jako ty případy, ve kterých padl součet 8. Takových je 5, že ano? A z nich případy příznivé jevu, že padla aspoň jedna šestka, jsou dva. Odtud výsledek. Pokud byste stůj co stůj chtěli uplatnit vzorec 4.1, který jste se naučili, tak můžete a výsledek je

$$\frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}.$$

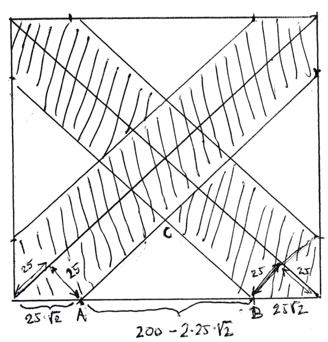
Podobným způsobem jako (a) vypočteme: ad b) $\frac{2}{11}$; ad c) $\frac{3}{11}$.

Příklad 6.5 *Velitel záchranné operace soudí, že člun s trosečníky se nachází někde ve čtverci o straně 200 km. Má k dispozici dvě letadla a posádka každého z nich objeví člun ve vzdálenosti 25 km od letadla ve všech směrech. Jedno letadlo přeletí přes jednu úhlopříčku daného čtverce, druhé přes druhou. Jaká je pst, že aspoň jedno letadlo objeví člun?*

Řešení: protože o trosečnících nevíme bližší informace, předpokládáme, že jejich výskyt v libovolném místě čtvercového území je stejně pravděpodobný. Tj. množinou Ω uvažovaných pozic bude daný čtverec, jeho mírou bude jeho obsah. Náhodným jevem A (letadlům se při přeletu nad oběma úhlopříčkami čtvercového území podaří spatřit člun) budeme rozumět všechny body čtverce, které jsou v dosahu 25 km od některé z úhlopříček. Míra množiny A bude její obsah. Pst našeho náhodného jevu A tedy vypočteme jako

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = 0{,}5821.$$

Zkontrolujte si výpočtem podílu obsahů (na základě svých znalostí geometrie), že tento výsledek je správný. Nejjednodušší je možná odečíst od obsahu $200 \cdot 200$ množiny Ω obsah čtyř bílých trojúhelníků, které vznikají mimo šrafovanou plochu.



Kdybychom si všimli, že čtyři trojúhelníky, které vzniknou odstřihnutím od šrafované plochy, tvoří dohromady čtverec o straně $200 - 2 \cdot 25 \cdot \sqrt{2}$, můžeme počítat

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{200^2 - (200 - 2 \cdot 25 \cdot \sqrt{2})^2}{200^2} = 0{,}5821.$$

Příklad 6.6 *Jistá VŠ přijímá do 1.ročníku studenty ze všech typů SŠ. Absolventů gymnázia je* 65 %, *přitom* 60% *z nich tvoří dívky. Zbylých* 35 % *přijatých studentů navštěvovalo jiný typ školy a je mezi nimi pouze* 30% *dívek.*

a) *Jaká je pst, že náhodně vybraný student 1. ročníku je dívka?*

b) *Systém vybral náhodně jednu dívku ze všech studentů prvního ročníku (už víme) – jaká je pst, že tato dívka je absolventkou gymnázia (ještě nevíme a chceme určit)?*

Řešení: ad a) Pst je vlastně rovna procentu dívek ze všech možných studentů. Dívky z gymnáziu tvoří z celku všech přijímaných studentů část $0{,}65 \cdot 0{,}60$, dívky z ostatních typů škol přijaté na VŠ tvoří z celku část $0{,}35 \cdot 0{,}30$. Tedy dohromady dívky ze všech typů škol tvoří z celku 1 všech přijatých na VŠ část

$$P(A) = 0{,}65 \cdot 0{,}60 + 0{,}35 \cdot 0{,}30 = 0{,}495,$$

kde A ... náhodně vybraný přijatý student je dívka. Tedy náhodně vybraný student prvního ročníku VŠ je dívka se šancí 49,5%. Argumentace řešení byla provedena pomocí procenta jako části celku, ale vlastně se jedná přesně o tentýž postup jako výpočet úplné psti!!!

Ad b) Nyní použijeme vzorec 4.1: Označme G ... náhodně vybraný student je absolventem-absolventkou gymnázia (víme, že $P(G) = 0{,}65$). Dosazením do vzorce 4.1 dostaneme

$$P(G|A) = \frac{P(G \cap A)}{P(A)} = \frac{P(G) \cdot P(A|G}{P(A)} = \frac{0{,}65 \cdot 0{,}60}{0{,}495} = 0{,}78787878.$$

Celá pravděpodobnostní úvaha byla proveditelná i elementárně jinak: čitatel zlomku ve výpočtu vyjadřuje procento dívek z gymnázia, jmenovatel vyjadřuje procento všech dívek.

Příklad 6.7 *Doba příchodu studenta do výuky (v minutách) byla zaznamenána do intervalového rozdělení četností:*

$\langle x_i; x_{i+1}\rangle$	n_i
$\langle -3; 0\rangle$	*15*
$(0; 3\rangle$	*10*
$(3; 6\rangle$	*3*
$(6; 9\rangle$	*2*
$(9; 12\rangle$	*1*
$(12; 15\rangle$	*1*

a) *Zpracujte tato data v podobě kumulací a relativních kumulací.*

b) *Jaký je maximální pozdní příchod u 85 procent studentů (tedy* 0,85*-kvantil)?*

c) *Odhadněte průměr doby pozdního příchodu (v minutách).*

Řešení: Interval $\langle -3; 0\rangle$ znamená, že studenti přišli včas před začátkem hodiny, což je tedy pozitivní údaj, třebaže je negativní ... s tímto údajem budeme normálně pracovat, stejně jako s jinými intervaly. Počátek 0 znamená začátek hodiny, tj. nyní popisujeme veličinu, která může nabývat kladných i záporných hodnot.

Ad a) nejprve vypočteme, četnosti a kumulace, relativní četnosti a relativní kumulace (počet měření $n = 32$ dostaneme součtem četností). Viz tabulka na násl. straně.

Ad b) Výpočet kvantilů je složitější. Hledáme-li 0,85-kvantil, najdeme ve sloupci relativních kumulací interval $(3; 6\rangle$, na kterém byla poprvé překročena hodnota 0,85. Tím je určen interval $(a; b\rangle$ v následujícím vzorci:

$$x_\alpha = a + \frac{(n+1) \cdot \alpha - c_a}{n(a; b\rangle} \cdot (b - a),$$

Tabulka 6.7: Tabulka četností a kumulací doby příchodu studenta do výuky.

doba příchodu	četnost	rel. četnost	kum. četnost	kum. rel. četnost
$\langle -3;0\rangle$	15	0,46875	15	0,46875
$(0;3\rangle$	10	0,31250	25	0,78125
$(3;6\rangle$	3	0,09375	28	0,875
$(6;9\rangle$	2	0,0625	30	0,9375
$(9;12\rangle$	1	0,03125	31	0,96875
$(12;15\rangle$	1	0,03125	32	1

kde c_a je kumulace v bodě a dolní meze intervalu. V našem případě tedy $(a;b\rangle = (3;6\rangle$. Dále $n(a,b) = n(3;6\rangle = 3$ je četnost na intervalu $(3;6\rangle$. Celkem

$$x_{0,85} = 3 + \frac{0{,}85 \cdot 33 - 25}{3} \cdot (6-3) = 6{,}05.$$

Tedy 85% studentů přijde dříve než 6,05 minut po začátku hodiny.

Pozor na možný jiný průběh dosazení, který se moc neliší, ale dává mírně odlišný výsledek: Pokud nejprve vypočteme část čitatele v uvedeném vzorci $0{,}85 \cdot 33$, dostaneme hodnotu 28,05 a řídíme se sloupcem kumulací, kde hledáme nejbližší vyšší hodnotu kumulace, která přesáhne 28 – tou je 30. Tím jsme ovšem určili $(a;b\rangle = (6;9\rangle$ a celé dosazení do vzorce děláme pro interval $(6;9\rangle$, dostaneme:

$$x_{0,85} = 6 + \frac{0{,}85 \cdot 33 - 28}{2} \cdot (9-6) = 6{,}075.$$

Hodnota je mírně odlišná, ale oba způsoby jsou legitimní a dávají nám nějaký odhad 0,85-kvantilu, který je přijatelný.

Ad c) průměr bychom lehce vypočetli, kdybychom měl ovšem všech 32 naměřených časů k dispozici. Protože máme jen intervalové četnosti, průměr pouze odhadneme. Jako naměřené hodnoty vezmeme středy těchto intervalů $-1{,}5$, $1{,}5$, $4{,}5$, $7{,}5$, $10{,}5$, $13{,}5$ (v minutách). Vážený aritmetický průměr doby příchodu pomocí četností je tedy odhadnut jako

$$\overline{x} \doteq \frac{1}{32} \cdot (15 \cdot (-1{,}5) + 10 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 4{,}5 + 2 \cdot 7{,}5 + 10{,}5 + 13{,}5) = 1{,}40625.$$

Tedy průměrná doba příchodu studenta do výuky je cca 1,40625 minut po začátku hodiny.

Příklad 6.8 *Házeme hrací kostkou desetkrát za sebou. jaká je pst, že v těchto deseti hodech padne osm a více šestek?*

Jedná se o klasický příklad na Bernoulliovy psti, pro $N = 10$ a $p = \frac{1}{6}$. Odpověď je: $p(8) + p(9) + p(10) =$

$$= \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0{,}00001945.$$

Příklad 6.9 *Student se na test o 10 otázkách vůbec neučil a zaškrtává právě jednu z odpovědí a),b),c) zcela náhodně (hodí si kostkou, pokud mu padne 1 nebo 2, zaškrtne variantu a), pokud 3 nebo 4, zaškrtne variantu b), pokud 5 nebo 6, zaškrtne c)). Jedná se přitom o test, kde právě jedna z variant a),b),c) je správná u každé otázky. Jaká je pst, že při tomto náhodném vyplnění testu bude student mít 3 a více odpovědí dobře?*

Opět se jedná o Bernoulliovy psti, přičemž pst jedné správné odpovědi je $p = \frac{1}{3}$, a $N = 10$. Bez počítače, jen s využitím kalkulačky, je nejvhodnější využít psti opačného jevu: $p(3) + p(4) + \cdots + p(10) = 1 - p(0) - p(1) - p(2) =$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} - \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 - \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 = 0{,}7008586.$$

7 Týden 07

7.1 Přednáška 07: Diskrétní a spojitá náhodná veličina, střední hodnota a rozptyl, distribuční funkce

V tomto oddílu-kapitole se podíváme na základní terminologii popisu náhodnosti z vysokoškolského hlediska, tedy popis pravděpodobnosti pro dospělé.

Budeme se tady společně zabývat oběma hlavními modely psti z kapitoly 3: diskrétní rozdělením psti a spojitým rozdělením psti. Všechny pojmy budou vysvětleny na dvou příkladech, které se budou prolínat touto celou kapitolou.

U diskrétního rozdělení psti bylo dosud řečeno (opakování z kapitoly 3), že ji lze užít k popisu, když:

- Ω má konečně mnoho možných elementárních výsledků, nebo je jich stejně najko přirozených čísel (říkáme, že Ω je množina nejvýše spočetně nekonečná).
- všechny elementární výsledky mají obecně RŮZNOU možnost nastat (elementární výsledek ω_i nastane s pstí $p(\omega_i)$).
- Pak lze počítat pst náhodného jevu $A \in \mathcal{A}$ podle vzorce

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$$

U spojitého rozdělení psti bylo dosud řečeno (viz kapitola 2), že ji lze užít k popisu, když:

- Ω má nespočetně nekonečně mnoho možných elementárních výsledků, a tedy se jedná o interval reálných čísel nebo o R^+, nebo R.
- Tyto elementární výsledky mají obecně RŮZNOU možnost nastat.
- Pak pro pst jevu $(a;b) \subseteq \Omega$ nebo $\langle a;b) \subseteq \Omega$ nebo $(a;b\rangle \subseteq \Omega$ nebo $\langle a;b\rangle \subseteq \Omega$ platí

$$P(a;b) = P(\langle a;b) = P((a;b\rangle) = P\langle a;b\rangle) = \int_a^b f(x)dx,$$

kde $f(x)$ je nezáporná po částech spojitá funkce.

Nyní na popis těchto modelů navážeme a řekneme s k nim několik dalších typických termínů z teorie psti. Klíčovým bude pojem **distribuční funkce** $F(x)$ (pozor, nepleťte si s pojmem „distributivní zákon z algebry 1 – u slova „distributivní“ je míněn pasivní význam (rozdělený): činitel násobící závorku je po odstranění závorky rozdělen ke každému členu v závorce; kdežto u slova „distribuční“ je míněn aktivní význam (rozdělující): samotná distribuční funkce určuje pravidla, podle kterých se budou hodnoty měřené veličiny rozdělovat, čili podle kterých budou nastávat.“)

Podobně jako fyzikové se snaží o jakýsi sjednocující pohled na svět, i matematika se snažila o sjednocující pohled na náhodnost – a do velké míry se jí to podařilo právě pojmem distribuční funkce $F(x)$. (pozor, písmeno F je důležité, protože f bude označovat něco jiného – viz matematická analýza 2, kde $\int f(x)dx = F(x) + c$ ... do velké míry se tohoto označení mezi funkcí $F(x)$ a její derivací $f(x)$ budeme držet, pokud bude derivace existovat, a tedy bude mít smysl o ní mluvit).

Ale ještě než se dostaneme k pojmu distribuční funkce, musíme projít pojem náhodné veličiny, dva příklady a tři další sjednocující pojmy (takže pojem distribuční funkce bude zlatým hřebem, uvedeným na závěr této kapitoly).

Náhodná veličina X není nic nového, ovšem jejímu přesnému vymezení se trochu v tomto textu vyhneme. To právě je veličina, jejíž hodnoty měříme a jejíž náhodnost chceme popsat – formálně se jedná o zobrazení jistých vlastností, které elementárním výsledkům $\omega \in \Omega$ (čti: malé omega z množiny velké omega) přiřazuje reálná čísla. V obou následujících příkladech upozorníme na to, kde se tato veličina objevuje a proč ji lze chápat jako zobrazení.

Příklad 7.1 *Hráč basketbalu háže trestné koše až do okamžiku, kdy se netrefí. Pak přestává házet. Nejvíce však má povoleno hodit pět úspěšných košů. a) popište tuto náhodnou veličinu matematicky; b) Určete rozdělení pravděpodobnosti počtu úspěšných košů, jestliže pravděpodobnost úspěchu při každém hodu je nezávislá na předchozím hodu a je rovna* 0,9. *c) vypočtěte střední hodnotu a rozptyl veličiny.*

Matematický popis každé náhodné veličiny bude zahrnovat šest bodů či charakteristik (i) až (vi). Podívejme se nejprve na první tři:

(i) Co daná veličina měří, $X = ...???$

   X = počet úspěšně trefených košů v právě popsaném procesu (minimáně nula, maximálně pět trefených košů).

(ii) Jakých hodnot veličina X může nabývat?

   $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

   Možná zde by bylo vhodné vysvětlit rozdíl či souvislost množiny elementárních výsledků $\omega \in \Omega$ a veličinou X:

   $\Omega = \{N, TN, TTN, TTTN, TTTTN, TTTTT\}$ – množina elementárních výsledků, jedna sekvence představuje sérii hodů daného hráče, N = netrefil se při konkrétním hodu, T = trefil se při konkrétním hodu.

   Veličina X je vlastně zobrazením množiny Ω do množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $X(TTTN) = 3$ (tj. 3x se hráč trefil), $X(TTTTN) = 4$ (hráč se v dané sekvenci trefil 4x), atd.

   Až na prvky množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ je nasazeno další zobrazení P zvané pravděpodobnost, které přiřazuje jednotlivým hodnotám množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ reálné číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

(iii) S jakými pstmi nabývá veličina X svých hodnot? Tedy u diskrétní veličiny: Jaké jsou psti $p(k) := P(X = k)$, pro $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$?

Hodnoty $p(k)$ nazýváme **hodnoty pstní funkce**. Pomocí znalostí získaných v první polovině semestru určíme dílčí psti pomocí psti průniku nezávislých jevů, tj. jako součin dílčích pstí v jednotlivých hodech:

$p(0) = P(X = 0) = P(N) = 0{,}1.$

$p(1) = P(X = 1) = P(TN) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0,09.$

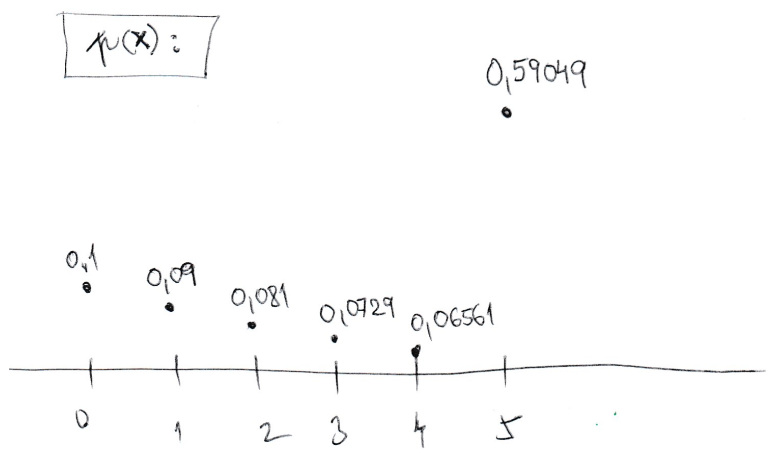
$p(2) = P(X = 2) = P(TTN) = 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}081.$

$p(3) = P(X = 3) = P(TTTN) = 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 = 0{,}0729.$

$p(4) = P(X = 4) = P(TTTTN) = 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 = 0{,}06561.$

$p(5) = P(X = 5) = P(TTTTT) = 0{,}9^5 = 0{,}59049.$

Tyto hodnoty pstní funkce $p(k)$ můžeme znázornit i graficky:



Než vysvětlíme tři další charakteristiky, projdeme si tytéž už uvedené tři na druhém slibovaném příkladu. Nyní jen ještě zdůrazněme, že X je **diskrétní náhodná veličina**, protože nabývá hodnot oddělených, diskrétních (množina hodnot je většinou podmnožinou množiny N nebo Z, může se ovšem jednat i o konečnou nebo spočetnou množinu zlomků).

Aby pravděpodobnostní funkce $p(k)$ splňovala vlastnosti psti, musí platit

1. $\sum_0^6 p(k) = 1$ (axiom normovanosti),
2. $p(k) \geq 0$ pro každé $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (axiom nezápornosti),
3. $P(X \in (a; b\rangle = \sum_{k \in (a;b\rangle} p(k)$ (když chceme určit pst, že veličina X nabude hodnot z intervalu $(a; b\rangle$, sečteme psti $p(k)$ pro $k \in (a; b\rangle)$. Z určitého důvodu, který bude patrný ze sjednocujícího pojmu distribuční funkce, bereme nterval $(a; b\rangle$ bez levého krajního bodu.

Příklad 7.2 *Popište matematicky veličinu X vyjadřující dobu příchodu studenta na konkrétní výuku v rozvrhu (v minutách). Zohledňujeme, že 75% studentů přijde v čas v intervalu $\langle -5, 0\rangle$. Předpokládáme, že každý okamžik z intervalu je stejně pravděpodobný. Ostatní přijdou pozdě v intervalu $(0, 10\rangle$. Šance jejich pozdního příchodu rovnoměrně klesá až k nule. Student více než minut předem ani později než 10 minut po začátku nepřijde.*

(i) Co daná veličina měří, $X = ...???$

$X =$ doba příchodu studenta vzhledem k času $t(0) = 0$ (minut).

(ii) Jakých hodnot veličina X může nabývat?

X nabývá hodnot v intervalu $\langle -5; 10\rangle$.

(Ω je nyní už přímo interval $\langle -5; 10\rangle$, tj. veličinu X lze chápat jako identitu $\langle -5; 10\rangle \to \langle -5; 10\rangle$, zde už její užití (jako identického zobrazení) nic zajímavého nepřináší, ale formálně ji použijeme také, abychom právě též mohli mluvit o veličině X, která nabývá hodnot z intervalu – terminologie s množinou Ω už se zde nepoužívá)

(iii) S jakými pstmi nabývá veličina X svých hodnot? Tedy u spojité veličiny: Jaké jsou psti $P(X \in (a; b\rangle)$?

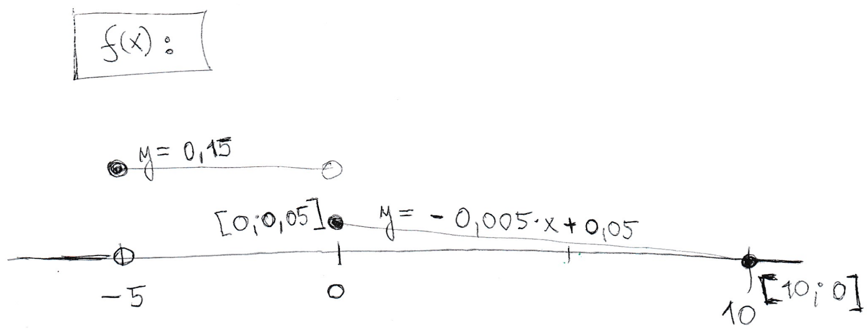
Měli bychom zkonstruovat tzv. hustotu psti, která bude vyjadřovat psti pomocí obsahu svého podgrafu na intervalu $\langle a; b\rangle$. Výsledkem této konstrukce je následující obrázek a dostaneme se k němu těmito úvahami: a) jakýkoli okamžik příchodu v intervalu -5 minut až 0 minut je stejně pravděpodobný ... to lze vyjádřit konstantní funkcí (její hodnotu určíme z požadavku obsahu 0,75 daného obdélníka.

b) ubývající šanci příchodu od okamžiku 0 minut do okamžiku 10 minut vyjádříme klesající lineární funkcí, takže obsah vzniklého trojúhelníku v podgrafu bude roven 0,25, aby celkem obsah celého podgrafu byl roven číslu $0{,}75 + 0{,}25$.

Délka základny trojúhelníka je pevně dána (od 0 do 10), tj. zbývá určit její výšku ... ta musí být 0,05, aby obsah trojúhelníka byl roven 0,25. Zbývá určit rovnici lineární funkce, jejíž částí grafu je přepona trojúhelníka (tu určíme z faktu, že daná lineární funce prochází body $[0; 0{,}05]$ a $[10; 0]$).

Tedy

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \ldots x < -5 \\ 0,15 & \ldots x \in \langle -5, 0) \\ -0,005x + 0,05 & \ldots x \in \langle 0; 10) \\ 0 & \ldots x \geq 10 \end{cases}$$



a aby hustota psti $f(x)$ splňovala vlastnosti psti, musí platit

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (axiom normovanosti),
2. $f(x) \geq 0$ pro každé $x \in R$ (axiom nezápornosti),
3. $P(X \in (a;b\rangle = \int_a^b f(x)dx$ (když chceme určit pst, že veličina X nabude hodnot z intervalu $(a;b\rangle$, vypočteme určitý integrál funkce $f(x)$ pro $k \in (a;b\rangle$). Z určitého důvodu, který bude patrný ze sjednocujícího pojmu distribuční funkce, bereme interval $(a;b\rangle$ bez levého krajního bodu.

A nyní se konečně dostáváme ke sjednocujícím pojmům matematického popisu náhodnosti. Tyto pojmy budou vyloženy definičně i aplikačně (na příklady 7.1, 7.2):

iii) Pravděpodobnost, že veličinu X naměříme v intervalu $(a;b\rangle$:

$$P(X\in(a;b\rangle) = \begin{cases} \text{diskrét.} & \sum\limits_{k\in(a;b\rangle} p(k) \\ \text{spoj.} & \int_a^b f(t)\,dt \end{cases}$$

Tento bod byl, stejně jako body (i), (ii), v příkladech 7.1, 7.2 už vypracován – na tomto místě jen konstatujeme, že pojem pravděpodobnosti popisuje jak veličinu spojitou, tak veličinu diskrétní – jen u diskrétní veličiny počítáme pst pomocí sumy hodnot pstí funkce $p(k)$, kdežto u spojité veličiny pomocí určitého integrálu z hustoty psti $f(x)$ na intervalu $(a;b\rangle$.

iv) Pojem distribuční funkce $F(x)$ náhodně veličiny X je klíčový sjednocující pojem, definovaný pro spojitou i diskrétní veličinu stejně:

Definice 7.1 $F(x) = P(X \leq x) := P(X \in (-\infty; x\rangle)$ *(hodnota distribuční funkce F v bodě x je rovna psti, že veličinu X naměříme v intervalu $(-\infty; x\rangle$).*

O co se jedná? Distribuční funkce není nic jiného než **teoretická relativní kumulativní četnost**, která pro rostoucí hodnotu x neustále přičítá dílčí teoretické relativní četnosti neboli dílčí psti.

Jen si musíme pamatovat, že toto přičítání se u diskrétní veličiny (stejně jako v bodě (iii)) děje pomocí sumy a u spojité veličiny pomocí integrálu:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} \text{diskr.} & \sum_{k \leq x} p(k) \\ \text{spoj.} & \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \end{cases}}$$

Prosím pamatujte si, že $F(x)$ jako teoretická kumulativní relativní četnost

- nikdy nemůže klesat, vdy pouze roste nebo stagnuje (= má konstantní hodnotu), stejně jako rostla nebo stagnovala kumulativní relativní četnost v popisné statistice;
- je rovna pravděpodobnosti určitého náhodného jevu, tj. nabývá hodnot pouze z intervalu $\langle 0; 1\rangle$;

Tedy $F(x)$ je neklesající funkcí, která je zdola ohraničená konstatní funkcí $y(x) = 0$, shora konstantní funkcí $y(x) = 1$.

Poznámka 1: Pokud se čtenář znalý matematické analýzy zamyslí nad vztahem funkcí f, F u spojité veličiny, vidí, že zde existuje vztah podobný tomu jako mezi funkcí f a k ní primitivní funkcí F, tedy $F'(x) = f(x)$, pokud derivace v daném bodě existuje[11].

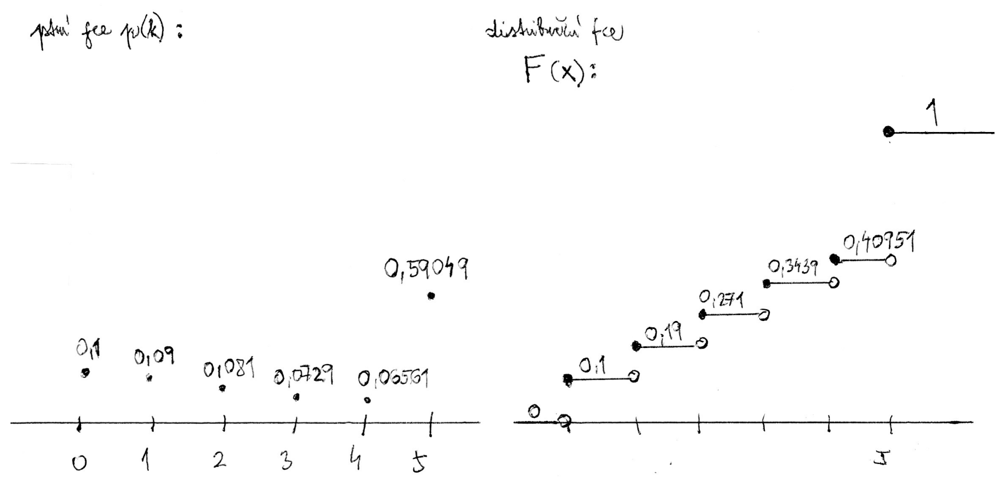
Poznámka 2: A jaký je vztah (**u diskrétní i spojité veličiny**) mezi pojmy (iii) a (iv)?

$$P(X \in (a; b\rangle) = F(b) - F(a). \tag{7.1}$$

[11] Tedy: Pokud u spojité veličiny známe distribuční funkci $F(x)$, lze z ní snadno derivací najít hustotu psti $f(x)$.

Skutečně, u spojité veličiny se jedná vlastně o Newton-Leibnizovu formuli výpočtu určitého integrálu pomocí primitivní funkce; a u diskrétní veličiny vztah také očividně platí: Když odečteme kumulativní pst v bodě b od kumulativní psti v bodě a, dostaneme právě součet pstí $p(k)$ pro $k \in (a; b\rangle$ ... právě zde u diskrétní veličiny potřebujeme, aby interval $(a; b\rangle$ byl zleva otevřený, protože odečtení psti $p(a)$ vylučuje, aby pst $p(a)$ byla současně započítána do výsledku $P(X \in (a; b\rangle)$, který tímto rozdílem vznikne.

Ad příklad 7.1: Určeme distribuční funkci $F(x)$ veličiny udávající počet vstřelených košů před prvním neúspěšným košem, a současně úspěšných košů nemůže být více než pět v řadě:



Všimněte si několika věcí: a) hodnoty pstní funkce se kumulují = přičítají, výška schodu v celočíselných hodnotách se rovná právě dílčí psti $p(k)$ v daném bodě k; b) Funkce $F(x)$ je definovaná pro každé reálné x, neboli v každém bodě x má smysl se ptát, jaká je pst, že naměříme hodnotu z intervalu $(-\infty, x\rangle$; c) Na intervalu $(k; k+1)$ funkce $F(x)$ nic nepřičte, tj. zůstává konstantní; d) And last but not least, vlastnost (c) je pro distribuční funkci diskrétní veličiny vlastně charakteristická: $F(x)$ je po částech konstantní funkce, jejíž graf připomíná schody – mohly bychom ji nazvat schodovitou funkcí, kdybychom takový pojem měli definovaný[12].

Ad příklad 7.2: Určeme distribuční funkci $F(x)$ i zde, u spojité veličiny s hustotou psti $f(x)$: Na rozdíl od diskrétní veličiny, kde funkční hodnoty distribuční funkce tvoří posloupnost výšek schodů z intervalu $\langle 0; 1\rangle$, u spojité veličiny se přičítá obsah podgrafu, tj. se nejedná o funkci schodovou, ale o funkci spojitou (k žádným

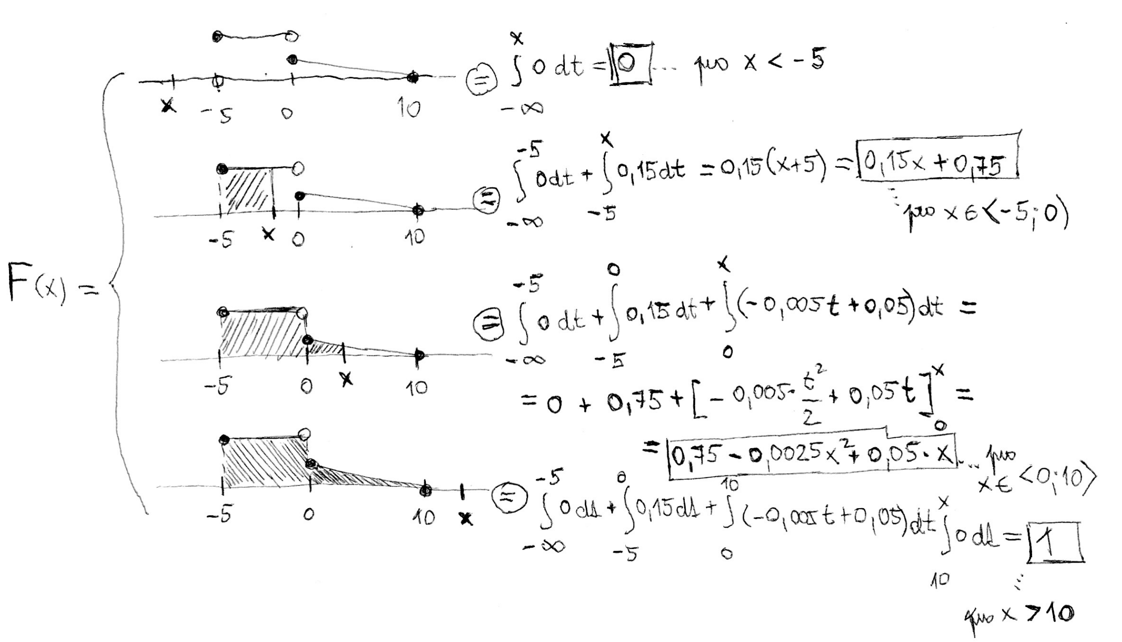
[12]A word of caution here: schody u distribuční funkce vždy směřují nahoru při nárůstu proměnné x, nikdy ne dolů – tedy ne všechny schodové funkce jsou funkcemi distribučními, ale jen některé.

schodům-skokům nedochází, kumulativní pst se mění spojitě[13]).

Ale vraťme se k našemu příkladu 7.2. Hustota psti je zadána několika různými vzorci:

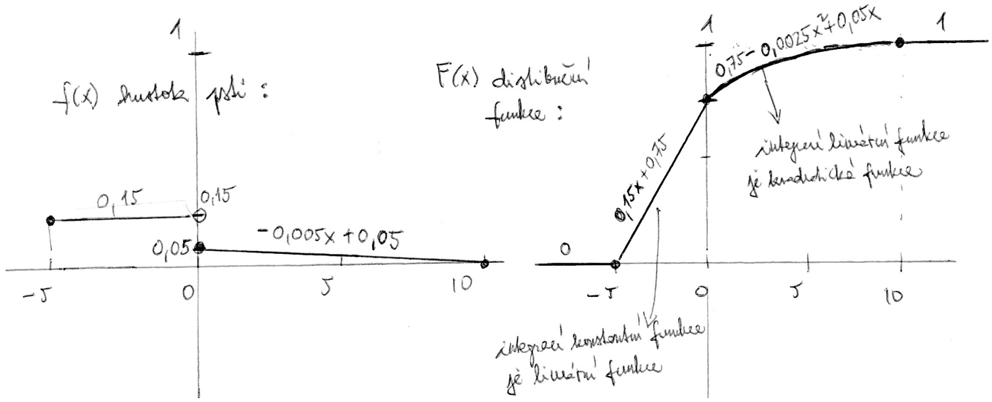
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \dots x < -5 \\ 0,15 & \dots x \in \langle -5, 0) \\ -0,005x + 0,05 & \dots x \in \langle 0; 10) \\ 0 & \dots x \geq 10 \end{cases}$$

Tedy při výpočtu kumulativních pstí $F(x)$ dostaneme také několik vzorců v závislosti na hodnotě x. Máme přitom jednu podporu, která je ovšem dobrá – grafický názor určitého integrálu jako obsahu subgrafu. Proto pro každou část vzorce hustoty $f(x)$ můžeme nakreslit obsah plochy určený kumulací psti od minus nekonečna do x:



Lze souhrnně říci že funkční hodnota $F(x)$ vyjadřuje obsah plochy z hustoty $f(x)$ od minus nekonečna do hodnoty x. Grafy $f(x)$, $F(x)$:

[13] Studenti si mohou též představit, že schody jsou tak malé, že se vlastně o žádné schody nejedná – kdybychom obrázek grafu $F(x)$ spojité veličiny milionkrát zvětšili, stále bychom žádné schody neviděli, zkrátka $F(x)$ je spojitou funkcí proměnné x.



Z grafu $F(x)$ vidíme, že distribuční funkce je spojitá – to není náhoda, ale u spojité náhodné veličiny to platí vždy, protože u spojité veličiny nikdy nekumulujeme skokem, ale pomocí nárůstu obsahu, čili spojitě.

v) **Střední hodnota (= očekávaná hodnota) veličiny** X, značíme EX: Zjednodušeně řečeno, EX je „teoretický průměr“ = průměr, který bychom zhruba naměřili-vypočetli, kdyby se měřená veličina X chovala přesně podle svého teoretického popisu (iii), tj. podle pravděpodobnostní funkce $p(k)$ v diskrétním případě, respektive podle hustoty psti $f(x)$ ve spojitém případě.

Pokud střední hodnota má fungovat jako „teoretický průměr“, hledejme cestu k jejímu spočtení ve vzorci pro průměr měření v popisné statistice:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x_i} n_i \cdot x_i = \sum_{x_i} \frac{n_i}{n} \cdot x_i. \tag{7.2}$$

Relativní četnosti $\frac{n_i}{n}$ v posledním tvaru sumy v rovnosti lze chápat jako jakési „naměřené“ psti. Kdybychom místo nich dosadili teoretické psti $p(x_i)$, dostaneme vzorec pro teoretický průměr neboli střední hodnotu veličiny X:

$$\boxed{EX = \begin{cases} \text{diskr.} & \sum\limits_{x_i} p(x_i) \cdot x_i \\ \text{spoj.} & \int\limits_{\Omega} f(x) \cdot x \, dx \end{cases}}$$

Diskrétní tvar vzorce ... právě popsaná záměna $\frac{n_i}{n}$ za $p(x_i)$. Spojitý tvar vzorce ... vlastně totéž, ale převedeno na spojitý případ podle pravidel a možností infinitezimálního počtu: sečítáme nekonečně mnoho nekonečně malých hodnot, takže

- namísto sumy přes všechny možné hodnoty ... píšeme určitý integrál přes nespočetnou množinu Ω;

- namísto pstní funkce $p(k)$ ... píšeme hustotu psti $f(x)$;
- namísto x_i ... index i vynecháváme, hodnoty se vyskytují „nahusto“ ve spojitě nekonečné (či hustě nekonečné) množině Ω.

Ad příklad 7.1: Průměrný = očekávaný počet vstřelených košů je

$$EX = \sum_{0}^{5} k\cdot p(k) = 0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}09+2\cdot 0{,}081+3\cdot 0{,}0729+4\cdot 0{,}06561+5\cdot 0,59049 = 3{,}6856.$$

Ad příklad 7.2: Průměrný okamžik příchodu studenta vzhledem k času $t = 0$ začátku hodiny:

$$\begin{aligned} EX = \int_{-5}^{10} x \cdot f(x)dx &= \int_{-5}^{0} x \cdot 0{,}15\ dx + \int_{0}^{10} x \cdot (-0{,}005x + 0{,}05)\ dx = \\ &= \left[0{,}15 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_{-5}^{0} + \left[-0{,}005 \cdot \frac{x^3}{3} + 0{,}05 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{10} = \\ &= -0{,}15 \cdot 12{,}5 - \frac{5}{3} + \frac{5}{2} \doteq -1{,}0417. \end{aligned}$$

To tedy znamená. že každý student, pokud bude se chovat podle tohoto teoretického popisu, přijde průměrně asi minutu před začátkem výuky.

vi) Rozptyl DX náhodné veličiny X: udává „teoretickou“ míru rozptýlení náhodné veličiny X kolem její střední hodnoty EX ... vlastně se jedná o rozptyl měření, který bychom zhruba naměřili-vypočetli, kdyby se měřená veličina X chovala přesně podle svého teoretického popisu (iii), tj. podle pravděpodobnostní funkce $p(k)$ v diskrétním případě, respektive podle hustoty psti $f(x)$ ve spojitém případě.

Přesná definice rozptylu náhodné veličiny využívá definici střední hodnoty, ale jedná se o střední hodnotu jiné veličiny než jen X:

$$DX := E(X - EX)^2$$

Rozptyl DX definujeme jako střední hodnotu veličiny $(X-EX)^2$, což je kvadratická odchylka rozdílu veličiny X od její střední hodnoty EX.

Cesta od definice k výpočtu bude vysvětlena na analogii statistického rozptylu souboru měření :

$$S^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x_i} n_i \cdot (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{x_i} \frac{n_i}{n} \cdot (x_i - \overline{x})^2. \tag{7.3}$$

Relativní četnosti $\frac{n_i}{n}$ v posledním tvaru sumy v rovnosti lze chápat jako jakési „naměřené“ psti. Kdybychom místo nich dosadili teoretické psti $p(x_i)$ a průměr $\overline{x}$ nahradili střední hodnotou EX, dostaneme vzorec pro teoretický rozptyl neboli **rozptyl náhodné veličiny** X:

$$DX = E(X-EX)^2 = \begin{cases} \text{diskr.} & \sum_{x_i} p(x_i)\cdot(x_i-EX)^2 \\ \text{spoj.} & \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot(x-EX)^2\,dx \end{cases}$$

Úpravou vzorce ještě získáme (ať už se jedná o veličinu diskrétní nebo spojitou):

$$\begin{aligned} DX &= E(X-EX)^2 = E(X^2 - 2X\cdot EX + (EX)^2) = \\ &= EX^2 - 2EX\cdot EX + (EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2. \end{aligned}$$

Dosazením do posledního vyjádřeného tvaru vzorce pro střední hodnotu E dostaneme asi nejjednoduší vzorce výpočtu

$$\boxed{DX = \begin{cases} \text{diskr.} & \left(\sum_{x_i} p(x_i)\cdot x_i^2\right) - (EX)^2 \\ \text{spoj.} & \int_{\Omega} f(x)\cdot x^2\,dx - (EX)^2 \end{cases}}$$

(tyto vzorce jsou nejjednodušší, protože v diskrétním případě nemusíme vůbec počítat odchylky $(x_i - EX)$); ve spojitém případě je integrace také jednodušší, protože integrujeme funkci, ve které nedochází k odčítání konstanty EX. POZOR, nejen studenti zapomínají při užití těchto posledních vzorců po úspěšném vypočtení sumy-integrálu odečíst konstantu $(EX)^2$ ... to je také potřeba.

Ad příklad 7.1: Rozptyl počtu vstřelených košů je

$$\begin{aligned} DX &= \sum_{0}^{5} k^2\cdot p(k) - (EX)^2 = 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}09 + 2^2\cdot 0{,}081 + 3^2\cdot 0{,}0729 + 4^2\cdot 0{,}06561 + \\ &+ 5^2\cdot 0,59049 - 3{,}6856^2 = 3{,}2985. \end{aligned}$$

Nás zajímá spíše tzv. směrodatná odchylka $\sqrt{DX} = \sqrt{3{,}2985} \doteq 1{,}816$, protože tuto hodnotu lze vynést na vodorovnou osu měření veličiny X. Pokud bychom chtěli uplatnit pravidlo šesti směrodatných odchylek, tak říkáme: většina hodnot veličiny X, a sice cca 99% měření, leží v intervalu $EX \pm 3\cdot\sqrt{DX}$, tedy v našem příkladu počet tref v sekvenci hodů podle daného scénáře leží počet tref v intervalu

$$3{,}6856 \pm 3\cdot 1{,}816 = (-1{,}7624; 9{,}1336),$$

což tedy moc zajímavý interval není, protože je možná ještě horší než interval $\langle 0; 5\rangle$. U některých, zejména diskrétních veličin s konečně mnoha možnými hodnotami, interval délky šesti odchylek nesděluje nic nového, než co už známe ze zadání.

Ad příklad 7.2: Průměrný okamžik příchodu studenta vzhledem k času $t = 0$ začátku hodiny:

$$\begin{aligned} DX &= \int_{-5}^{10} x^2 \cdot f(x)dx - (-1{,}0417)^2 = \\ &= \int_{-5}^{0} x^2 \cdot 0{,}15\; dx + \int_{0}^{10} x^2 \cdot (-0{,}005x + 0{,}05)\; dx - 1{,}085 = \\ &= \left[0{,}15 \cdot \frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{0} + \left[-0{,}005 \cdot \frac{x^4}{4} + 0{,}05 \cdot \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{10} - 1{,}085 = \\ &= \frac{0{,}15 \cdot 125}{3} - \frac{50}{4} + \frac{50}{3} - 1{,}085 \doteq 9{,}332. \end{aligned}$$

Tedy směrodatná odchylka $\sqrt{DX} = \sqrt{9{,}332} = 3{,}0548$, tedy většina (cca 99%) příchodů studenta do hodiny vzhledem k okamžiku $t_0 = 0$ začátku hodiny je v intervalu

$$-1{,}0417 \pm 3 \cdot 3{,}0548 = \langle -10{,}206; 8{,}1227\rangle \;\; min.$$

7.2 Cvičení 07: Diskrétní a spojitá náhodná veličina, distribuční funkce, střední hodnota a rozptyl

Po pečlivém projití přednášky 7 si předem připravte na cvičení prezentaci následujících příkladů. Přitom kromě zadání daného příkladu odpovězte určitě na prvních šest otázek z následujících: (**otázky vypracujte všechny u každého z příkladů v této kapitole, i když daný úkol není řečen v zadání**):

$\boxed{1}$ Co vlastně veličina X měří? $X = \ldots$

$\boxed{2}$ Hodnoty z jaké množiny může veličina X nabývat?

$\boxed{3}$ Jaká je pstní funkce $p(k)$ (u diskrétní veličiny) nebo hustota psti $f(x)$ (u spojité veličiny)? Vypočtěte ji a nakreslete její graf.

$\boxed{4}$ Jaká je distribuční funkce $F(x)$? Nalezněte její vzorec a nakreslete její graf.

$\boxed{5}$ Určete střední hodnotu EX veličiny X.

$\boxed{6}$ Určete rozptyl DX a směrodatnou odchylku $\sqrt{DX}$ veličiny X. Podle pravidla o šesti směrodatných odchylkách nakreslete do obrázku v bodu 3 interval, ve kterém naměříme cca 99% hodnot náhodné veličiny X.

$\boxed{7}$ Až v tomto bodě spočtěte nějakou další konkrétní pst nebo odpovězte na otázku, kterou se v daném příkladu ptají.

Úloha 7.1 Tým 001: je zadána odpověď $\boxed{1}$, nalezněte odpovědi $\boxed{2}$ až $\boxed{6}$. *Jan Kovář jde z tělocvičny do hospody a přemýšlí, kolik vypije piv. Rozhodne se pro následující postup:*

1. *Pokud mu při hodu kostkou padne 1,2,3,4 nebo 5, dá si pivo; pokud 6, jde domů.*
2. *Pokud vypil první pivo, háže ještě jednou. Když mu padne 1,2,3 nebo 4, dá si druhé pivo, jinak jde domů.*
3. *Pokud vypil druhé pivo, háže potřetí. Když mu padne 1,2 nebo 3, dá si třetí pivo, jinak jde domů.*
4. *Po třetím pivu jde v každém případě domů (musí se učit matematiku).*

V této situaci máte tři úkoly:

a) *Určete pravděpodobnostní funkci počtu piv, které Honza vypije (= pravděpodobnost, s jakou vypije 0 piv ,1 pivo, 2 piva, 3 piva).*

b) *Nakreslete graf příslušné distribuční funkce.*

c) *Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X = počet piv vypitých podle daného postupu.*

Úloha 7.2 Tým 002: je zadána odpověď $\boxed{1}$, nalezněte odpovědi $\boxed{2}$ až $\boxed{6}$. *Při basebalu je hráč dvakrát na pálce. Pravděpodobnost, že při prvním pobytu na pálce zasáhne míček, je* 0,25. *Pravděpodobnost, že při druhém pobytu na pálce zasáhne míček, je*

$$\begin{cases} 0{,}35 & \dots \text{ pokud při prvním pobytu zasáhl;} \\ 0{,}25 & \dots \text{ pokud při prvním pobytu nezasáhl.} \end{cases}$$

Náhodná veličina X udává počet úspěšných pobytů na pálce u daného hráče. Jakých hodnot může nabývat? Určete její rozdělení pravděpodobnosti.

Úloha 7.3 Tým 003: je zadána odpověď $\boxed{3}$, odpověď $\boxed{1}$ neurčujte, nalezněte odpovědi $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$. Máte ještě navíc úkol číslo $\boxed{7}$, což jsou otázky a,b,c,d,e ... odpovězte na tyto otázky dvěma způsoby: jednak pomocí $\boxed{3}$ včetně obrázku, jednak pomocí $\boxed{4}$ bez obrázku, pouze dosazením hodnot distribuční funkce.

Hustota rozdělení pravděpodobnosti je dána vztahem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \dots \text{ pro } x < 0; \\ x & \dots \text{ pro } x \in < 0; 1); \\ 0{,}5 & \dots \text{ pro } x \in < 1; 2) \\ 0 & \text{pro } x \geq 2. \end{cases}$$

U každého z úkolů a), b), c), d), e) nakreslete jiný obrázek ... obrázků u těchto úkolů dohromady bude celkem pět.

a) $P(0{,}1 \le X \le 0{,}25) = ?$; *vyšrafujte do grafu v otázce 3, obsah jaké plochy počítáte (pst u spojité veličiny je vždy vyjádřena obsahem plochy)*

b) $P(X < 0{,}25) = ?$; *vyšrafujte do grafu v otázce 3, obsah jaké plochy počítáte (pst u spojité veličiny je vždy vyjádřena obsahem plochy)*

c) $P(X > 0{,}25) = ?$; *vyšrafujte do grafu v otázce 3, obsah jaké plochy počítáte (pst u spojité veličiny je vždy vyjádřena obsahem plochy)*

d) $P(0 \le X \le 1{,}25) = ?$; *vyšrafujte do grafu v otázce 3, obsah jaké plochy počítáte (pst u spojité veličiny je vždy vyjádřena obsahem plochy)*

e) $P(X > 0) = ?$; *vyšrafujte do grafu v otázce 3, obsah jaké plochy počítáte (pst u spojité veličiny je vždy vyjádřena obsahem plochy)*

Úloha 7.4 Tým 004: je zadána odpověď $\boxed{3}$, ale upřesněte v ní konstantu c; odpověď $\boxed{1}$ neurčujte, nalezněte odpovědi $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$.

Určete hodnotu parametru c tak, aby funkce $f(x) = c \cdot e^{-|x|}$ byla hustota náhodné veličiny X, a pak nalezněte příslušnou distribuční funkci $F(x)$.

Potom určete střední hodnotu a rozptyl veličiny X. Poznámka: Nemusíte odpovídat na otázku číslo 1 (co vlastně veličina X měří).

Úloha 7.5 Tým 005: je zadána odpověď $\boxed{4}$, odpověď $\boxed{1}$ neurčujte, nalezněte odpovědi $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$. Máte ještě navíc úkol číslo $\boxed{7}$, což jsou otázky a,b,c ... odpovězte na tyto otázky dvěma způsoby: jednak pomocí $\boxed{3}$ včetně obrázku, jednak pomocí $\boxed{4}$ bez obrázku, pouze dosazením hodnot distribuční funkce.

Náhodná veličina X udává životnost žárovky a má distribuční funkci (1 jednotka = 1 hodina)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots \text{ pro } x < 0; \\ 1 - e^{-\frac{x}{100}} & \dots \text{ pro } x \ge 0. \end{cases}$$

Vypočtěte pravděpodobnost, že náhodně zakoupená žárovka vydrží v provozu (u každého z úkolů a,b,c nakreslete další obrázek – vyšrafujte do grafu v otázce 3, obsah jaké plochy počítáte (pst u spojité veličiny je vždy vyjádřena obsahem plochy))

a) *méně než* 90 *hodin;*

b) 80 *až* 120 *hodin;*

c) *více než* 150 *hodin.*

Úloha 7.6 Vyřeší všichni do sešitu. je zadána odpověď $\boxed{1}$, nalezněte odpovědi $\boxed{2}$ až $\boxed{6}$. Navíc je zde úkol $\boxed{7}$: určete teoretické četnosti výsledku zkoušky pro 1296 **studentů.**

Jednomu středoškolskému profesoru se nechtělo opravovat písemky z matematiky, a tak se rozhodl udělit známky podle následujícího klíče:

a) *Hodí kostkou. Pokud padne* 6*, ohodnotí písemku jedničkou; jinak*

b) *hodí znovu kostkou; pokud padne* 5 *nebo* 6*, ohodnotí písemku dvojkou; jinak*

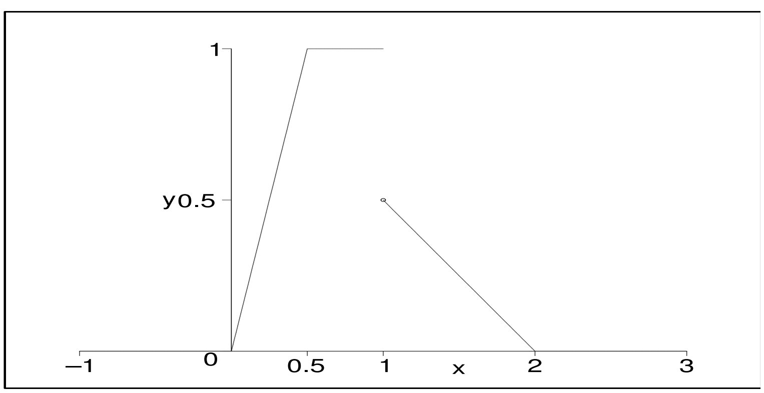
c) *hodí znovu kostkou; pokud padne* 4*,* 5 *nebo* 6*, ohodnotí písemku trojkou; jinak*

d) *hodí znovu kostkou; pokud padne* 3*,* 4*,* 5 *nebo* 6*, ohodnotí čtyřkou; jinak*

e) *hodnotí písemku pětkou.*

Vypočtěte rozdělení pravděpodobnosti, pak příslušné teoretické rozdělení četnosti výsledku zkoušky pro 1296 *studentů. Určete střední hodnotu a rozptyl výsledku písemky.*

Úloha 7.7 *Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny X, jejíž hustota psti $f(x)$ je dána na obrázku:*



Úloha 7.8 *Stanovte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X, jejíž distribuční funkce je dána vztahem*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \dots 1 < x \leq \sqrt{2} \\ 1 & \dots x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Řešení některých příkladů najdete na konci textu v oddílu 14.7.

8 Týden 08

8.1 Některá význačná rozdělení pravděpodobnosti – diskrétní i spojitá

Viz slajdy 08prednaska, kde najdete přehled základních rozdělení pravděpodobnosti. Podrobnější povídání doporučuji též v textu (Fajmon, Hlavičková, Novák, 2014) – s tím rozdílem, že geometrické rozdělení pravděpodobnosti v tom textu nenajdete, kdežto tam možná najdete navíc představené hypergeometrické rozdělení.

Celá přednáška je zpracovaná na slajdu 08prednaska a zatím není přepsaná, to, co je nyní uvedeno dále, jsou poznámky a příklady, které ukazují na možnosti prostředí Excel.

Příklad 8.1 *Vypočítejte a)10!, b) kombinační číslo* $\binom{10}{3}$
a) faktoriál vypočítáme jednoduše, stačí jen zadat =FAKTORIÁL(10), to nám dá výsledek 3628800
b) kombinační číslo získáme podobně jednoduše, v případě kombinačního čísla $\binom{10}{3}$ *zadáme funkci KOMBINACE a to následujícím způsobem: =KOMBINACE(10;3), to nám dá výsledek 120*

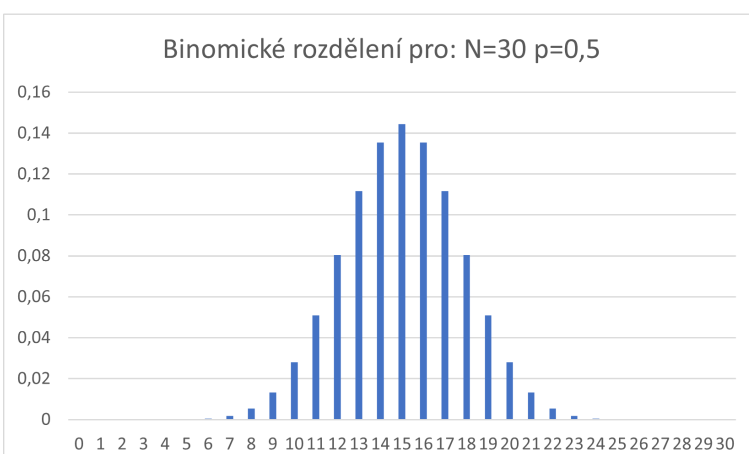
Nyní se již podíváme na binomické rozdělení psti v excelu.

Příklad 8.2 *Vypočítejte binomické rozdělení psti a nakreslete jejich histogramy psti pro a)* $N = 30$, $p = \frac{1}{2}$, *b)* $N = 30$, $p = \frac{1}{3}$, *c)* $N = 30$, $p = \frac{5}{6}$
Řešení:

a) $N = 30$, $p = \frac{1}{2}$,
Použijeme funkci BINOM.DIST a to následujícím způsobem: Nejdříve si do sloupečku napíšeme hodnoty 0-30, ty představují počet úspěchů. (Dále v textu je příklad řešen pro případ, kdy v buňce A13 je 0 A14 je 1 atd. až po A43, kde je 30). Následně sestrojíme funkci. =BINOM.DIST(A13;30;0,5;NEPRAVDA). Tím získáme první hodnotu pro 0 úspěchů. Tuto funkci si v excelu "natáhneme" dolů až budeme mít všechny výsledky. Funkce tedy zůstává stejná, jen se nám mění A13 postupně na A14 A15,... až po A43. [=BINOM.DIST(A13;30;0,5;NEPRAVDA), =BINOM.DIST(A14;30;0,5;NEPRAVDA), =BINOM.DIST(A15;30;0,5;NEPRAVDA),....=BINOM.DIST(A43;30;0,5;NEPRAVDA)] Výsledky početně i graficky na následující straně – vidíme, že pro hodnoty 5 *a menší a pro hodnoty* 25 *a větší jsou hodnoty těchto pstí téměř zanedbatelné:*

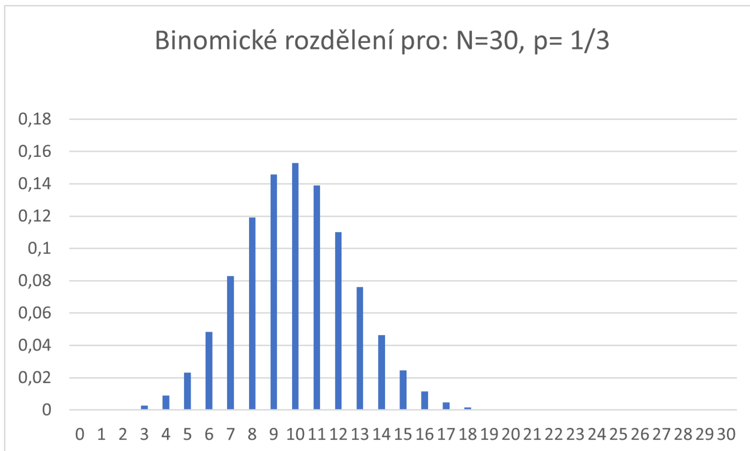
Tabulka 8.8: Tabulka pstní funkce binomického rozdělení pro $N = 30$, $p = \frac{1}{2}$

Počet úspěchů	Pravděpodobnost
0	9,31323E-10
1	2,79397E-08
2	4,05125E-07
3	3,78117E-06
4	2,55229E-05
5	0,000132719
6	0,000552996
7	0,001895986
8	0,005450961
9	0,013324572
10	0,027981601
11	0,050875638
12	0,080553093
13	0,111535052
14	0,13543542
15	0,144464448
16	0,13543542
17	0,111535052
18	0,080553093
19	0,050875638
20	0,027981601
21	0,013324572
22	0,005450961
23	0,001895986
24	0,000552996
25	0,000132719
26	2,55229E-05
27	3,78117E-06
28	4,05125E-07
29	2,79397E-08
30	9,31323E-10



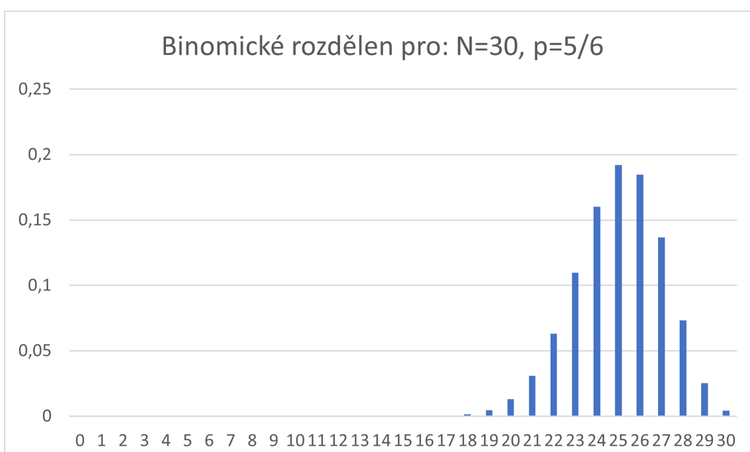
b) $N = 30,\ p = \frac{1}{3}$

Zde použijeme úplně stejný postup jako v prvním případě. Pouze upravíme funkci do podoby =BINOM.DIST(A13;30;1/3;NEPRAVDA) upravili jsme tedy pouze $\frac{1}{2}$ *na* $\frac{1}{3}$.
Celý postup opakujeme.
Výsledný histogram:



c) $N = 30,\ p = \frac{5}{6}$

Postup stejný. Pouze místo =BINOM.DIST(A13;30;1/3;NEPRAVDA) použijeme =BINOM.DIST(A13;30;5/6;NEPRAVDA) a opět opakujeme.
Výsledný histogram:



Z příkladů (b),(c) je vidět, že vhledem k hodnotě psti p je oblast významně nenulových pstí posunuta a nejedná se o symetrickou funkci vzhledem k ose $x = 15$ jako v případě (a).

Příklad 8.3 *Příklad na oříšky, ze starého přednáškového textu BMA3 příklad 9.5, pouze výpočet pomocí binomického rozdělení, ale přesný, co dá Excel – hodila by se i tabulka příslušných dílčích pstí v Excelu, které se do toho výsledku sečtou.*

Příklad 8.4 *Vegenerujte pomocí Excelu 40 hodnot rozdělení D1 = rovnoměrného* $Ro(60, 61, \ldots, 79, 80)$.

Příklad 8.5 a) *Vegenerujte pomocí Excelu 40 hodnot počtu hodů správně vyváženou hrací kostkou, které jsou potřeba na padnutí první šestky.*

b) *Nakreslete histogram prvních deseti pravděpodobností veličiny, která měří počet hodů hrací kostkou potřebný na padnutí první šestky.*

Příklad 8.6 a) *Vegenerujte pomocí Excelu 40 hodnot Poissonova rozdělení pro* $\lambda = 10$.

b) *Nakreslete pomocí Excelu histogram prvních dvaceti pravděpodobností Poissonovsky rozdělené veličiny pro 1)* $\lambda = 0{,}5$, *2)* $\lambda = 3$, *3)* $\lambda = 10$.

Příklad 8.7 a) *Nakreslete pomocí Excelu graf funkce hustoty psti a graf distribuční funkce exponenciálního rozdělení* $Exp(\lambda = 0{,}5)$, $Exp(\lambda = 3)$ *a* $Exp(\lambda = 10)$ *(jedná se tedy o tři příklady v jednom, v každém příkladu dva grafy, tedy dohromady šest grafů – nakreslete ovšem každý graf do jiného obrázku, bude to tedy celkem šest obrázků).*

b) *Vygenerujte pomocí Excelu čtyřicet hodnot exponenciálně rozdělených veličin z části (a) pro 1)* $\lambda = 0{,}5$, *2)* $\lambda = 3$, *3)* $\lambda = 10$.

Příklad 8.8 *Vegenerujte pomocí Excelu 40 hodnot rozdělení S1 = rovnoměrného spojitého na intervalu* $\langle 70; 100\rangle$.

Příklad 8.9 a) *Nakreslete pomocí Excelu do jednoho obrázku (různými barvami) graf funkce hustoty psti normálního rozdělení* $No(\mu = 75, \sigma = 5)$, *a normálního rozdělení* $No(\mu = 75, \sigma = 10)$.

b) *Nakreslete pomocí Excelu do jednoho obrázku (různými barvami) graf distribuční funkce normálního rozdělení* $No(\mu = 75, \sigma = 5)$, *a normálního rozdělení* $No(\mu = 75, \sigma = 10)$.

c) *Vygenerujte pomocí Excelu čtyřicet hodnot normálně rozdělených veličin z části (a) pro 1)* $No(\mu = 75, \sigma = 5)$, *2) pro* $No(\mu = 75, \sigma = 10)$.

8.2 Cvičení 08

V tomto cvičení pokračuje studentská povinnost u každého příkladu uvést odpovědi $\boxed{1}$ až $\boxed{6}$. Ale nyní vše nebudete počítat sami – odpovědi lze nalézt v učebnicích jako **rozdělení pravděpodobnosti** pod určitým jménem. Tj. vaším úkolem je a) nalézt vzorce-odpovědi $\boxed{1}$ až $\boxed{6}$ pod tímto jménem, b) aplikovat tyto vzorce na svůj zadaný příklad.

Úloha 8.1 Tým 006: je zadána odpověď $\boxed{1}$, nalezněte odpovědi $\boxed{2}$ až $\boxed{6}$. Jedná se o diskrétní rovnoměrné rozdělení hodnot z množiny $\{1, 2, , \ldots, n\}$; nalezněte dané vzorce, vysvětlete jejich použití a dosaďte do nich.

X= náhodně vygenerované číslo z množiny přirozených čísel $\{1, 2, \ldots, 19, 20\}$.

Úloha 8.2 Tým 007: je zadána odpověď $\boxed{1}$, nalezněte odpovědi $\boxed{2}$ až $\boxed{6}$. Jedná se o alternativní rozdělení pravděpodobnosti; nalezněte dané vzorce, vysvětlete jejich použití a dosaďte do nich.

X= počet šestek z jednoho hodu kostkou (tj. 0 *bebo* 1*).*

Úloha 8.3 Tým 001: je zadána odpověď $\boxed{1}$, nalezněte odpovědi $\boxed{2}$ až $\boxed{6}$. Jedná se o binomické rozdělení pravděpodobnosti; nalezněte dané vzorce, vysvětlete jejich použití a dosaďte do nich.

X= počet šestek ze dvaceti hodů kostkou (při výpočtu lze v Excelu využít statistickou funkci BINOM.DIST ... pokud poslední parametr funkce nastavíte na 0 nebo nepravda, vypočtou se psti; pokud nastavíte na 1 nebo pravda, vypočtou se hodnoty distribuční funkce).

Úloha 8.4 Tým 002: je zadána odpověď $\boxed{1}$, nalezněte odpovědi $\boxed{2}$ až $\boxed{6}$. Jedná se o geometrické rozdělení pravděpodobnosti; nalezněte dané vzorce, vysvětlete jejich použití a dosaďte do nich.

Horáček se jde po úspěšné zkoušce z matematiky občerstvit do hospody. Pravděpodobnostní přemýšlení u něj vítězí nad žízní, rozhodne se pít podle následujícího klíče: Padne-li mu při hodu kostkou 1, 2, 3 *nebo* 4*, tak aniž by si cokoli objednal, jde zpět na koleje. Padne-li mu* 5 *nebo* 6*, poručí si jedno pivo a hází ještě jednou. Padne-li mu* 1, 2, 3 *nebo* 4*, tak zaplatí a jde na koleje učit se matematiku. Padne-li mu* 5 *nebo* 6*, poručí si další pivo a hází ještě jednou, atd. (eventuálně až do nekonečna).*

a) *Odvoďte pravděpodobnostní funkci počtu piv, která Horáček celkem vypije.*

b) *Vypočtěte očekávaný (střední) počet piv, která Horáček vypije.*

Úloha 8.5 Tým 003: je zadána odpověď $\boxed{1}$, nalezněte odpovědi $\boxed{2}$ až $\boxed{7}$. Jedná se o Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti; nalezněte dané vzorce, vysvětlete jejich použití a dosaďte do nich.

X = počet zákazníků restaurace, kteří přijdou za hodinu. Přitom je známo, že do restaurace přijde průměrně dvacet zákazníků za hodinu.

Úkol $\boxed{7}$: Určete pst, že v průběhu jedné hodiny přijde právě patnáct zákazníků.

Úloha 8.6 Tým 004: je zadána odpověď $\boxed{1}$, nalezněte odpovědi $\boxed{2}$ až $\boxed{7}$. Jedná se o Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti; nalezněte dané vzorce, vysvětlete jejich použití a dosaďte do nich.

Výrobní zařízení má poruchu PRŮMĚRNĚ jednou za 2000 hodin. Předpokládejte, že X = doba čekání na poruchu je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením.

Úkol $\boxed{7}$: Určete hodnotu t_0 tak, aby pst, že zařízení bude pracovat delší dobu než t_0, byla $0,9$.

Úloha 8.7 Tým 005: je zadána odpověď $\boxed{1}$ pro dvě veličiny, X a Y. Nalezněte pro obě veličiny odpovědi $\boxed{2}$ až $\boxed{6}$ a pro veličinu Y ještě odpověď $\boxed{7}$. U veličiny X se jedná o Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti, u veličiny Y o exponenciální rozdělení pravděpodobnosti; nalezněte dané vzorce, vysvětlete jejich použití a dosaďte do nich.

Na email vyučujícího přijdou během osmihodinové pracovní doby zhruba tři emaily od studentů, které jsou na sobě navzájem nezávislé. V této situaci měříme dvě veličiny:

X = počet emailů skutečně přišlých během osmi hodin.

Y = doba mezi dvěma následnými (na sobě nezávislými) emaily od studentů vyučujícímu.

Úkol $\boxed{7}$: Určete pst, že interval mezi dvěma následnými nezávislými emaily od studentů vyučujícímu bude 10 min až 1 h.

Řešení některých příkladů[14] najdete na konci textu v oddílu 14.8.

[14]Poznámka pro vyučujícího: Ještě možnost počítat ze BMA3-sbirka 6.18 binomické, 6.20 hypergeom., 6.21 spešl váhy a automatická linka, 7.14 Poissonovo.

9 Týden 09

9.1 Normální rozdělení psti

9.1.1 Normální rozdělení pravděpodobnosti

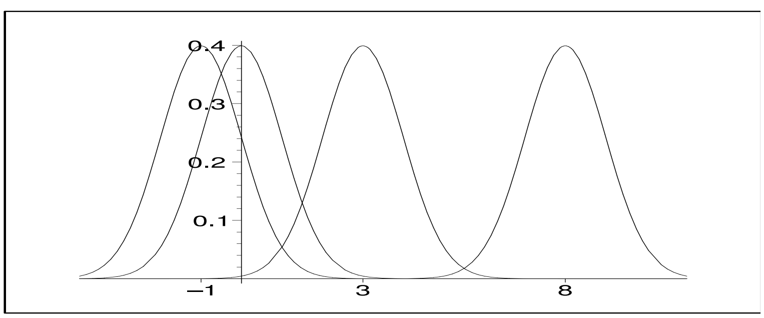
Normální rozdělení pravděpodobnosti je rozdělení pro veličiny spojitého typu a má hustotu

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Odvození vzorce viz video (vhodné pro pedagog. fakultu)

`https://www.youtube.com/watch?v=8Y0eKBsGp2M&ab_channel=CuriousAndLearning`

Dalo by se spočítat, že střední hodnota veličiny X s rozdělením zadaným touto hustotou je rovna parametru μ, rozptyl je roven parametru σ^2. Proto budeme značit $No(\mu, \sigma^2)$. Na obr. 9.6 jsou uvedeny grafy hustoty pro σ^2 stále rovno jedné a různé střední hodnoty μ, na obr. 9.7 je $\mu = 6$ a mění se hodnoty rozptylu σ^2 (Při malém rozptylu je rameno grafu hustoty vysoké a úzké, pro větší rozptyl hustota nabývá nižších funkčních hodnot, ale interval s hodnotami významně odlišnými od nuly je širší). U všech těchto grafů hustot platí $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$.

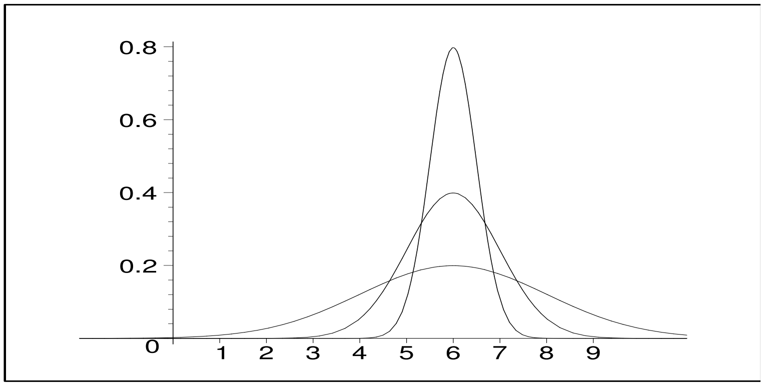


Obrázek 9.6: Hustota normálního rozdělení pro různé střední hodnoty μ.

Normální rozdělení se stalo slavným díky tomu, co říká tzv. **centrální limitní věta**:

Jestliže $X_1, X_2, \ldots, X_N$ jsou navzájem nezávislé veličiny, které mají všechny stejné rozdělení (nemusí být normální, ale libovolné, jeho střední hodnota je $EX_i = \mu$ a rozptyl $DX_i = \sigma^2$), pak součtem těchto veličin je náhodná veličina Y (platí $Y = \sum_1^N X_i$) se střední hodnotou $EY = N \cdot \mu$ a rozptylem $DY = N \cdot \sigma^2$, která má pro dostatečně velké N ($N > 30$) normální rozdělení, tj. platí

$$P(Y \in (a; b)) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{N}\sigma} \cdot e^{-\frac{(t-N\mu)^2}{2N\sigma^2}} dt.$$



Obrázek 9.7: Hustota normálního rozdělení pro různé rozptyly σ^2.

To, že hodně proměnných lze s velkou přesností popsat pomocí normálního rozdělení, je právě důsledkem centrální limitní věty. Následující dvě situace to dokreslují.

Příklad 9.1 *Y_1 udává výšku borovic v daném lese (v metrech). Průměrná výška (= μ) je 50 metrů. Vezměme nyní jeden konkrétní strom, jehož výška je 54 metrů. Co způsobilo, že vyrostl o 4 metry nad průměr? Hodně různých vlivů:*

a) *Stromek byl zasazen v obzvlášť příznivém období roku, což způsobilo, že vyrostl o 1m nad průměr.*

b) *Místo, kde strom roste, získává zdroje hnojiva navíc, což vede k růstu o 2,3m nad průměr.*

c) *Nešťastnou náhodou byl stromek při sazení nalomen, což znamená, že narostl o 1,4m nižší, než mohl.*

d) *Strom má dobré místo na slunci, což mu pomohlo vyrůst o 2m nad průměr.*

e) *Skupina příslušníků antagonistického hmyzu si vybrala strom za svůj domov, což mu vzalo šance vyrůst o 0,6m výš než ostatní stromy.*

atd.

Zkrátka a dobře, vychýlení 4m nad průměr je dáno součtem všech těchto možných kladných i záporných vlivů. Protože těchto vlivů je většinou poměrně dost, výslednou výšku stromu danou souštem všech těchto vlivů lze s velkou přesností popsat normálním rodělením.

Příklad 9.2 *Y_2 udává výsledek zkoušky z matematiky. Vezmeme nyní výsledek zkoušky jednoho konkrétního studenta. Co naň mělo vliv?*

a) *Honza měl den před zkouškou chřipku. To snížilo jeho výkon o 5 bodů.*

b) *Honza si něco tipl a náhodou to trefil - přidalo mu to 2 body.*

c) *Honza chyběl na klíčové přednášce a neměl u zkoušky její kopii - přišel o* 5 *bodů.*

d) *Profesor byl v dobré náladě a při opravování Honzovi* 3 *body přidal zadarmo.*

atd.

Opět vidíme, že výsledek Honzovy zkoušky je dán součtem většího počtu navzájem nezávislých náhodných vlivů, a tedy jej lze s velkou přesností popsat normálním rozdělením.

Následující příklad by klidně mohl být uveden jako matematická věta, protože se jedná o důležitý důsledek centrální limitní věty (a někdy je také uváděn jako věta - říká se jí Moivre - Laplaceova věta (čti: moávr laplasova)).

Příklad 9.3 Důsledek centrální limitní věty číslo 1. *Specielně i binomické rozdělení lze pro dostatečně velké N dobře popsat (aproximovat, nahradit) normálním rozdělením:*

Uvažujme například veličinu X, která udává počet líců při 100 *hodech korunou. Tato veličina má binomické rozdělení s parametry*

$$N = 100, \ \ p = \frac{1}{2}; \ \ EX = Np = 50; \ \ DX = Np(1-p) = 25.$$

Tuto veličinu lze vyjádřit jako součet veličin $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$, kde X_i má binomické rozdělení s parametry $N = 1$, $p = \frac{1}{2}$, tj. udává počet líců v jediném hodu mincí (pro $N = 1$ se binomické rozdělení někdy nazývá alternativní rozdělení, protože veličina může zde nabývat pouze dvou alternativ: 0 *(= číselné vyjádření alternativy „neúspěch“) nebo* 1 *(= číselné vyjádření alternativy „úspěch“)).*

Jako součet stejně rozdělených nezávislých veličin lze tedy X s velkou přesností popsat normálním rozdělením s parametry (pro $N = 100$)

$$\mu = EX = N \cdot EX_i = Np = 50, \quad \sigma^2 = DX = N \cdot DX_i = Np(1-p) = 25.$$

Čili pro dostatečně velké N lze binomické rozdělení s velkou přesností aproximovat normálním rozdělením se stejnou střední hodnotou a rozptylem.

Příklad 9.4 Důsledek centrální limitní věty číslo 2. *Tento důsledek budeme potřebovat v následující kapitole, když se budeme snažit popsat rozdělení průměru ze stejně rozdělených veličin: Jestliže X_1, X_2, $\ldots$, X_N jsou stejně rozdělené veličiny, ne nutně normálně rozdělené, a každá z nich má stejnou střední hodnotu μ a stejný rozptyl σ^2, Tak jejich průměr*

$$\overline{X} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

má normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem $\frac{\sigma^2}{N}$. Skutečně, lze dokázat výpočtem střední hodnoty a rozptylu této veličiny. Od tvrzení původní centrální limitní *věty se tato věta liší pouze tím, že celý součet veličin je ještě vydělený konstantou N, díky tomu tedy jiná střední hodnota a rozptyl:*

$$E\left(\frac{1}{N}\sum X_i\right) = \frac{1}{N}\cdot N\cdot\mu = \mu,$$

$$D\left(\frac{1}{N}\sum X_i\right) = \frac{1}{N^2}\cdot N\cdot\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$

(při výpočtu rozptylu využíváme toho, že se počítá jako druhá mocnina odchylky v argumentu – tedy při vytýkání konstanty $\frac{1}{N}$ násobené sumou náhodných veličin před operátor D tuto konstantu musíme umocnit na druhou).

9.1.2 U-rozdělení

Uvažujme náhodnou veličinu X udávající výsledky zkoušky z matematiky, kterou lze s velkou přesností popsat normálním rozdělením (viz příklad 9.2)s hustotou $f(t)$ a parametry

$$\mu_x = 75, \quad \sigma_x^2 = 25.$$

Její normované hodnoty (viz př. **??**, **??**, **??**) budeme chápat jako hodnoty veličiny U, kde

$$U = \frac{X-\mu_x}{\sigma_x} = \frac{X-75}{5}$$

a platí

$$\begin{aligned} EU &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{t-\mu_x}{\sigma_x}\cdot f(t)dt = \frac{1}{\sigma_x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}t\cdot f(t)dt - \mu_x\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt\right) = \\ &= \frac{1}{\sigma_x}(\mu_x - \mu_x\cdot 1) = 0; \\ DU &= E(U^2) - E^2U = EU^2 - 0 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{t-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\cdot f(t)dt = \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2}\int_{-\infty}^{\infty}(t-\mu_x)^2\cdot f(t)dt = \frac{1}{\sigma_x^2}\cdot\sigma_x^2 = 1. \end{aligned}$$

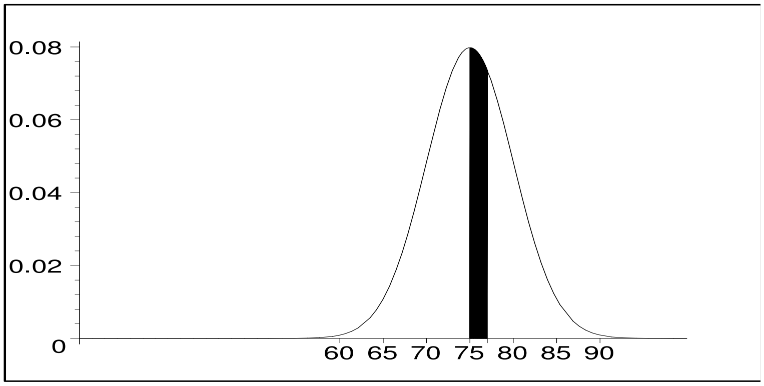
Zajímá-li nás pravděpodobnost, s jakou student dosáhne výsledku mezi 75 a 77 body, musíme spočítat

$$P(75 \le X \le 77) = \int_{75}^{77}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 5}\cdot e^{-\frac{(t-75)^2}{50}}dt,$$

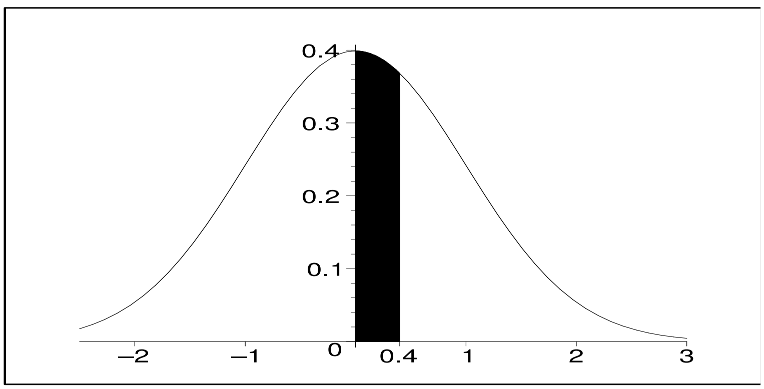
což je obsah vyšrafované plochy na obrázku 9.8.

Tato pravděpodobnost je stejná jako pravděpodobnost, že veličina U nabude hodnot z intervalu určeného příslušnými normovanými hodnotami:

$$\begin{aligned} P(75 \le X \le 77) &= P(\frac{75-75}{5} < \frac{X-75}{5} < \frac{77-75}{5}) = \\ &= P(0 \le U \le 0.4) = \int_0^{0.4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}du, \end{aligned}$$



Obrázek 9.8: Obsah šrafované plochy je roven pravděpodobnosti, že X nabude hodnot z intervalu $< 75; 77 >$.



Obrázek 9.9: Obsah šrafované plochy je roven pravděpodobnosti, že U nabude hodnot z intervalu $< 0; 0.4 >$. Tento obsah je stejný jako obsah šrafované plochy z obr. 9.8.

což je obsah šrafované plochy na obrázku 9.9.

Platí tedy

$$\int_{75}^{77} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 5} \cdot e^{-\frac{(t-75)^2}{2 \cdot 25}} dt = \int_{\frac{75-75}{5}}^{\frac{77-75}{5}} f(u) du,$$

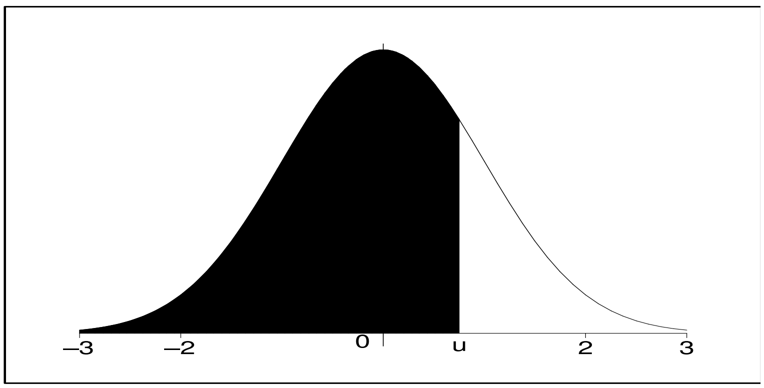
kde $f(u)$ je hustota U-rozdělení, tj. libovolný integrál z hustoty normálního rozdělení lze převést na integrál z hustoty rozdělení U.

Veličina U má tedy normální rozdělení $No(\mu = 0; \sigma^2 = 1)$, které nazýváme **standardizovaným normálním rozdělením** (v anglické literatuře Z-distribution; hodnoty veličiny s tímto rozdělením se nazývají Z-values nebo také Z-scores).

Výpočty uvedených integrálů jsou dosti pracné (buď musíme užít některou z numerických metod, nebo rozvinout exponenciální funkci v nekonečnou řadu a integrovat člen po členu), a proto se s výhodou používá následujícího postupu: pravděpodobnostní výpočty obecného normálního rozdělení se převedou právě popsaným postupem na výpočet integrálu U-rozdělení, pro které byla vypočtena a sestavena tabulka integrálů

$$\Phi(u) = P(U < u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

($\Phi(u)$ je označení distribuční funkce rozdělení U - jako pravděpodobnost má svůj geometrický význam, což znázorňuje obrázek 9.10).



Obrázek 9.10: Obsah šrafované plochy je roven funkční hodnotě distribuční funkce $\Phi(u)$ rozdělení U.

Protože graf funkce $f(u)$ je symetrický vzhledem ke svislé ose (přímce $u = 0$), v tabulce nemusí být uvedeny hodnoty $\Phi(u)$ pro záporná u. Platí totiž pro $u > 0$:

$$\boxed{\Phi(-u) = 1 - \phi(u)}$$

Pravdivost tohoto tvrzení je patrná z toho, že na obou stranách rovnosti v rámečku je obsah téže plochy. Např. $\Phi(-0{,}5) = 1 - \Phi(0{,}5)$, protože (viz obr. 9.11) funkce $f(u)$ je symetrická a celkový obsah plochy pod křivkou je roven jedné:

$$\Phi(-0{,}5) = S(A) = S(B) = 1 - \Phi(0{,}5)$$

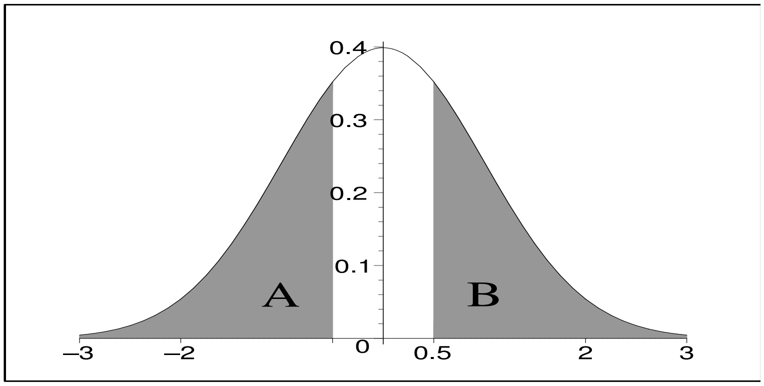
Hodnoty funkce $\Phi(u)$ jsou uvedeny v tabulce 9.9 a 9.10.

Příklad 9.5 *Veličinu* X *udávající výsledek zkoušky lze popsat rozdělením* $No(\mu = 75; \sigma^2 = 25)$, *S jakou pravděpodobností je výsledek zkoušky*

a) *v intervalu* $< 69; 72 >$*?*

b) *menší než* 65*?*

c) *větší než* 80*?*



Obrázek 9.11: Obsahy ploch A a B jsou stejné.

d) *v intervalu* $< \mu_x - 3\sigma_x; \mu_x + 3\sigma_x >$*?*

Řešení:

ad a)

$$\begin{aligned} P(69 \leq X \leq 72) &= P\left(\frac{69-\mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{X-\mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{72-\mu_x}{\sigma_x}\right) = \\ &= P\left(\frac{69-75}{5} \leq U \leq \frac{72-75}{5}\right) = \\ &= P(-1{,}2 \leq U \leq -0{,}6) = \Phi(-0{,}6) - \Phi(-1{,}2) = \\ &= 1 - \Phi(0{,}6) - (1 - \Phi(1{,}2)) = \\ &= \Phi(1{,}2) - \Phi(0{,}6) = 0{,}8849303 - 0{,}7257469 = 0{,}1591834, \end{aligned}$$

což je obsah plochy na obrázku 9.12.

Pokud si zvídavý čtenář položil otázku, proč místo některých neostrých nerovností nejsou v tomto odvozování ostré a naopak, pak bych mu rád připomněl, že u spojitých veličin platí

$$P(X = t_0) = 0$$

pro libovolné t_0. Díky tomu nezáleží na tom, zda u normálního rozdělení definujeme distribuční funkci předpisem $F(t) = P(X \leq t)$ nebo $F(t) = P(X < t)$ (tyto dva druhy definice se totiž objevují v matematické literatuře oba, ale žádný velký vliv to nemá – u spojitých veličin to nemá žádný vliv, u diskrétních veličin je schodová distribuční funkce v prvním případě zprava spojitá, ve druhém zleva spojitá, tj. v bodě skoku je v prvním případě funkční hodnota definována na horním schodu, ve druhém případě na dolním).

ad b)

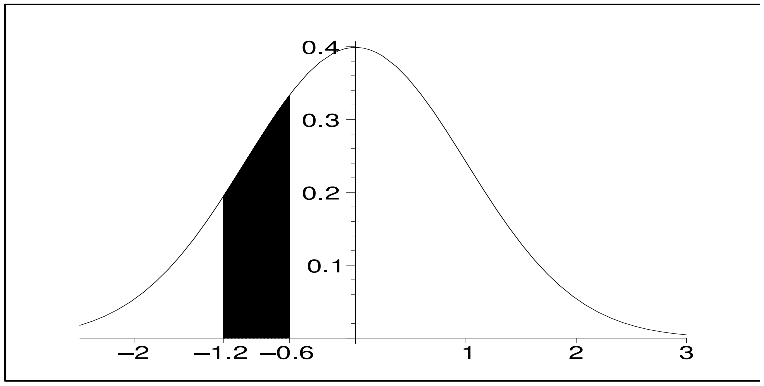
$$\begin{aligned} P(X \leq 65) &= P\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x} \leq \frac{65-\mu_x}{\sigma_x}\right) = P\left(U \leq \frac{65-75}{5}\right) = \\ &= P(U \leq -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = \\ &= 1 - 0{,}9772499 = 0{,}0227501. \end{aligned}$$

Tabulka 9.9: **Hodnoty distribuční funkce** $\Phi(u)$ **- 1.část.**

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0,00	0,5000000	0,30	0,6179114	0,60	0,7257469	0,90	0,8159399	1,20	0,8849303
0,01	0,5039894	0,31	0,6217195	0,61	0,7290691	0,91	0,8185887	1,21	0,8868606
0,02	0,5079783	0,32	0,6255158	0,62	0,7323711	0,92	0,8212136	1,22	0,8887676
0,03	0,5119665	0,33	0,6293000	0,63	0,7356527	0,93	0,8238145	1,23	0,8906514
0,04	0,5159534	0,34	0,6330717	0,64	0,7389137	0,94	0,8263912	1,24	0,8925123
0,05	0,5199388	0,35	0,6368307	0,65	0,7421539	0,95	0,8289439	1,25	0,8943502
0,06	0,5239222	0,36	0,6405764	0,66	0,7453731	0,96	0,8314724	1,26	0,8961653
0,07	0,5279032	0,37	0,6443088	0,67	0,7485711	0,97	0,8339768	1,27	0,8979577
0,08	0,5318814	0,38	0,6480273	0,68	0,7517478	0,98	0,8364569	1,28	0,8997274
0,09	0,5358564	0,39	0,6517317	0,69	0,7549029	0,99	0,8389129	1,29	0,9014747
0,10	0,5398278	0,40	0,6554217	0,70	0,7580363	1,00	0,8413447	1,30	0,9031995
0,11	0,5437953	0,41	0,6590970	0,71	0,7611479	1,01	0,8437524	1,31	0,9049021
0,12	0,5477584	0,42	0,6627573	0,72	0,7642375	1,02	0,8461358	1,32	0,9065825
0,13	0,5517168	0,43	0,6664022	0,73	0,7673049	1,03	0,8484950	1,33	0,9082409
0,14	0,5556700	0,44	0,6700314	0,74	0,7703500	1,04	0,8508300	1,34	0,9098773
0,15	0,5596177	0,45	0,6736448	0,75	0,7733726	1,05	0,8531409	1,35	0,9114920
0,16	0,5635595	0,46	0,6772419	0,76	0,7763727	1,06	0,8554277	1,36	0,9130850
0,17	0,5674949	0,47	0,6808225	0,77	0,7793501	1,07	0,8576903	1,37	0,9146565
0,18	0,5714237	0,48	0,6843863	0,78	0,7823046	1,08	0,8599289	1,38	0,9162067
0,19	0,5753454	0,49	0,6879331	0,79	0,7852361	1,09	0,8621434	1,39	0,9177356
0,20	0,5792597	0,50	0,6914625	0,80	0,7881446	1,10	0,8643339	1,40	0,9192433
0,21	0,5831662	0,51	0,6949743	0,81	0,7910299	1,11	0,8665005	1,41	0,9207302
0,22	0,5870604	0,52	0,6984682	0,82	0,7938919	1,12	0,8686431	1,42	0,9221962
0,23	0,5909541	0,53	0,7019440	0,83	0,7967306	1,13	0,8707619	1,43	0,9236415
0,24	0,5948349	0,54	0,7054015	0,84	0,7995458	1,14	0,8728568	1,44	0,9250663
0,25	0,5987063	0,55	0,7088403	0,85	0,8023375	1,15	0,8749281	1,45	0,9264707
0,26	0,6025681	0,56	0,7122603	0,86	0,8051055	1,16	0,8769756	1,46	0,9278550
0,27	0,6064199	0,57	0,7156612	0,87	0,8078498	1,17	0,8789995	1,47	0,9292191
0,28	0,6102612	0,58	0,7190427	0,88	0,8105703	1,18	0,8809999	1,48	0,9305634
0,29	0,6140919	0,59	0,7224047	0,89	0,8132671	1,19	0,8829768	1,49	0,9318879

Tabulka 9.10: Hodnoty distribuční funkce $\Phi(u)$ - 2.část.

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
1,50	0,9331928	1,80	0,9640697	2,10	0,9821356	2,40	0,9918025	4,50	0,9999966
1,51	0,9344783	1,81	0,9648521	2,11	0,9825708	2,41	0,9920237	5,00	0,9999997
1,52	0,9357445	1,82	0,9656205	2,12	0,9829970	2,42	0,9922397	5,50	0,9999999
1,53	0,9369916	1,83	0,9663750	2,13	0,9834142	2,43	0,9924506		
1,54	0,9382198	1,84	0,9671159	2,14	0,9838226	2,44	0,9926564		
1,55	0,9394392	1,85	0,9678432	2,15	0,9842224	2,45	0,9928572		
1,56	0,9406201	1,86	0,9685572	2,16	0,9846137	2,46	0,9930531		
1,57	0,9417924	1,87	0,9692581	2,17	0,9849966	2,47	0,9932443		
1,58	0,9429466	1,88	0,9699460	2,18	0,9853713	2,48	0,9934309		
1,59	0,9440826	1,89	0,9706210	2,19	0,9857379	2,49	0,9936128		
1,60	0,9452007	1,90	0,9712834	2,20	0,9860966	2,50	0,9937903		
1,61	0,9463011	1,91	0,9719334	2,21	0,9864474	2,51	0,9939634		
1,62	0,9473839	1,92	0,9725711	2,22	0,9867906	2,52	0,9941323		
1,63	0,9484493	1,93	0,9731966	2,23	0,9871263	2,53	0,9942969		
1,64	0,9494974	1,94	0,9738102	2,24	0,9874545	2,54	0,9944574		
1,65	0,9505285	1,95	0,9744119	2,25	0,9877755	2,55	0,9946139		
1,66	0,9515428	1,96	0,9750021	2,26	0,9880894	2,56	0,9947664		
1,67	0,9525403	1,97	0,9755808	2,27	0,9883962	2,57	0,9949151		
1,68	0,9535213	1,98	0,9761482	2,28	0,9886962	2,58	0,9950600		
1,69	0,9544860	1,99	0,9767045	2,29	0,9889893	2,59	0,9952012		
1,70	0,9554345	2,00	0,9772499	2,30	0,9892759	2,60	0,9953388		
1,71	0,9563671	2,01	0,9777844	2,31	0,9895559	2,70	0,9965330		
1,72	0,9572838	2,02	0,9783083	2,32	0,9898296	2,80	0,9974449		
1,73	0,9581849	2,03	0,9788217	2,33	0,9900969	2,90	0,9981342		
1,74	0,9590705	2,04	0,9793248	2,34	0,9903581	3,00	0,9986501		
1,75	0,9599408	2,05	0,9798178	2,35	0,9906133	3,20	0,9993129		
1,76	0,9607961	2,06	0,9803007	2,36	0,9908625	3,40	0,9996631		
1,77	0,9616364	2,07	0,9807738	2,37	0,9911060	3,60	0,9998409		
1,78	0,9624620	2,08	0,9812372	2,38	0,9913437	3,80	0,9999277		
1,79	0,9632730	2,09	0,9816911	2,39	0,9915758	4,00	0,9999683		



Obrázek 9.12: K př. 9.5a) - výpočet pravděpodobnosti u normálního rozdělení je roven obsahu šrafované plochy.

ad c)

$$\begin{aligned} P(X \geq 80) &= P\left(U \geq \frac{80-75}{5}\right) = P(U \geq 1) = 1 - P(U < 1) = \\ &= 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413447 = 0{,}1586553. \end{aligned}$$

ad d) $P(\mu_x - 3\sigma_x \leq X \leq \mu_x + 3\sigma_x) =$

$$\begin{aligned} &= P\left(\frac{\mu_x - 3\sigma_x - \mu_x}{\sigma_x} \leq U \leq \frac{\mu_x + 3\sigma_x - \mu_x}{\sigma_x}\right) \\ &= P(-3 \leq U \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) = \\ &= 2\Phi(3) - 1 = 0{,}9973002 \end{aligned}$$

Většina hodnot veličiny X leží tedy v intervalu $< \mu_x - 3\sigma_x, \mu_x + 3\sigma_x >$. Veličina X nabude hodnoty z tohoto intervalu s pravděpodobností 99,7% (= tzv. **pravidlo tří sigma**).

Příklad 9.6 *Firma vyrábí balíčky ořechů po 200ks, přičemž $\frac{3}{4}$ oříšků jsou burské a $\frac{1}{4}$ lískové, dokonale se promíchají, a pak se teprve sypou do balíčků. Jestliže koupíme jeden balíček ořechů, jaká je pravděpodobnost, že počet lískových ořechů je v intervalu $< 47; 56 >$?*

Řešení. Náhodná veličina X udávající počet lískových ořechů v jednom balíčku má rozdělení $Bi(N = 200, p = 0{,}25)$, čili $\mu_x = 50$, $\sigma_x^2 = 37{,}5$. Přímý výpočet

$$\begin{aligned} P &\quad (47 \leq X \leq 56) = P(X = 47) + P(X = 48) + \cdots + P(X = 56) = \\ = &\quad \binom{200}{47} 0{,}25^{47} 0{,}75^{153} + \binom{200}{48} 0{,}25^{48} 0{,}75^{152} + \cdots + \binom{200}{56} 0{,}25^{56} 0{,}75^{144} = \\ = &\quad 0{,}568 \end{aligned}$$

byl určen pomocí robustní kalkulačky, která má funkci pro obecnou sumu a také funkci pro vyčíslení kombinačních čísel. Při náhradě daného binomického rozdělení normálním rozdělením se stejnou střední hodnotou a rozptylem ($\sigma_x^2 = 37{,}5 \Longrightarrow \sigma_x \doteq 6{,}12$) dostaneme výsledek:

$$\begin{aligned} P(47 \leq X \leq 56) &= P\left(\frac{47-50}{6{,}12} \leq U \leq \frac{56-50}{6{,}12}\right) = \Phi(0{,}98) - \Phi(-0{,}49) = \\ &= \Phi(0{,}98) - (1 - \Phi(0{,}49)) \doteq 0{,}524. \end{aligned}$$

Je vidět, že chyba od přesného výsledku je v řádu procent (druhé desetinné místo). Pokud bychom použili korekce (viz následující příklad 9.7), dostali bychom výsledek $P(46,5 \leq X \leq 56,5) = 0,569$, jehož odchylka od přesného výsledku je většinou v desetinách procenta (třetí desetinné místo).

9.1.3 Aproximace binomického rozdělení normálním s korekcí

Příklad 9.7 *Náhodná veličina X udává počet líců při čtyřech hodech mincí. Vypočteme například pravděpodobnost, že počet líců ve čtyřech hodech bude jeden nebo dva,*

a) *pomocí $Bi(N = 4, p = 0{,}5)$;*

b) *pomocí normálního rozdělení;*

c) *pomocí normálního rozdělení s korekcí.*

Řešení:

ad a) $P(1 \leq X \leq 2) = p_1 + p_2 = 0{,}25 + 0{,}375 = 0{,}625$.

ad b) *Aproximujme binomické rozdělení normálním rozdělením $No(\mu_x = Np = 2, \sigma_x^2 = Np(1-p) = 1)$:*

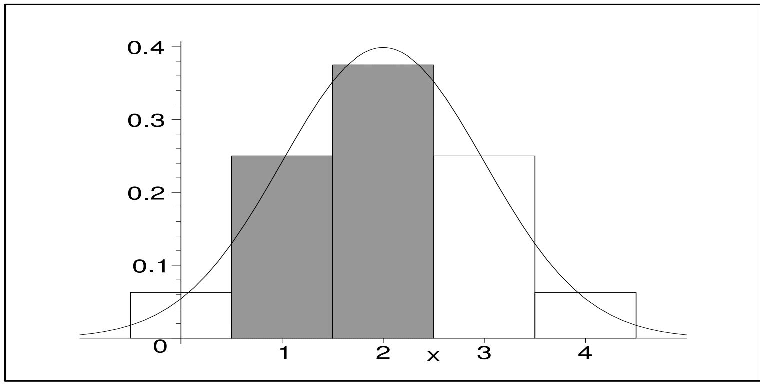
$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 2) &= P\left(\frac{1-\mu_x}{\sigma_x} \leq U \leq \frac{2-\mu_x}{\sigma_x}\right) = P\left(\frac{1-2}{1} \leq U \leq \frac{2-2}{1}\right) = \\ &= \Phi(0) - \Phi(-1) = 0{,}341. \end{aligned}$$

Hodnota z b) se od hodnoty z a) významně liší!! Kde se udála tak velká chyba? V tom, že obsah plochy dvou obdélníků histogramu na obr.9.13

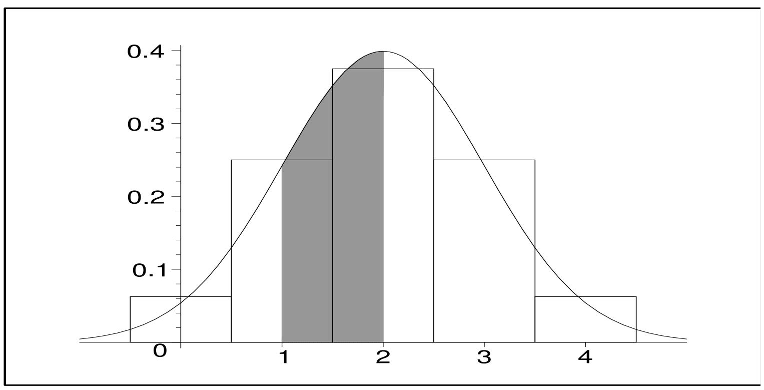
jsme aproximovali pomocí obsahu plochy na obr. 9.14,

nikoliv pomocí šrafované plochy na obr. 9.15.

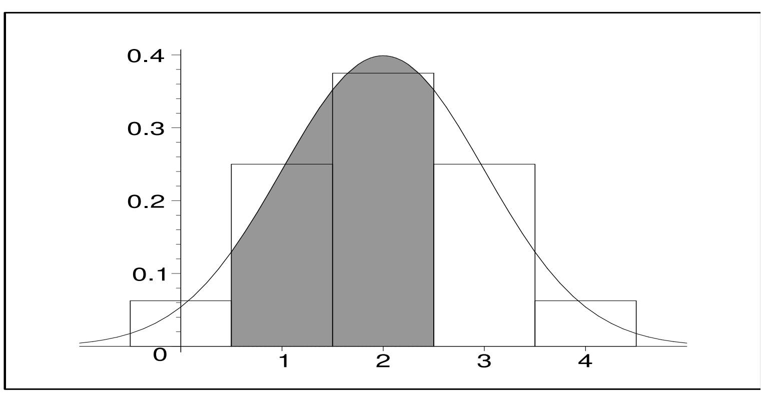
Aproximační chyba se zmenší, pokud výpočet pravděpodobnosti $P(t_1 \leq X \leq t_2)$ pomocí Bi nahradíme obsahem podgrafu hustoty No na intervalu stejné délky, tj. pravděpodobností $P(t_1 - 0{,}5 \leq X \leq t_2 + 0{,}5)$. Toto rozšíření intervalu o 0,5 na obou stranách nazýváme **korekcí**.



Obrázek 9.13: K př. 9.7 - aproximovaná plocha.



Obrázek 9.14: K př. 9.7 - nevhodná aproximace Bi pomocí No.



Obrázek 9.15: K př. 9.7 - vhodná aproximace Bi pomocí No užitím korekce.

ad c) *V našem příkladu dostaneme užitím korekce:*

$$\begin{aligned} P(1-0{,}5 \leq X \leq 2+0{,}5) &= P\left(\frac{1-0{,}5-2}{1} \leq U \leq \frac{2+0{,}5-2}{1}\right) = \\ &= \Phi(\frac{1}{2}) - \Phi(-\frac{3}{2}) = 0{,}624, \end{aligned}$$

což je docela dobrá aproximace přesné hodnoty 0,625.

Je vidět, že pomocí korekce lze popsat binomické rozdělení normálním i pro malá N.

9.2 Cvičení 09

Plán tohoto cvičení: Příklady 9.1 až 9.6 budou opět zadány na přípravu studentům týden předem – u prvních čtyř udělejte zase sedm kroků jako v příkladech cvičení sedmého a osmého, u příkladů 9.5, 9.6 se jedná o náhradu binomického rozdělení normálním – u nich udělejte pouze zadaný úkol.

Zbylé příklady 9.7 a6 9.11 mají studenti za domácí úkol a mohou se objevit u ústní části zkoušky.

Úloha 9.1 *Doba, kterou potřebuje buňka jistého typu, aby se rozdělila na dvě buňky je náhodná veličina s normálním rozdělením se střední hodnotou* 1 *hodina* (60 *minut) a směrodatnou odchylkou* 5 *minut.*

a) *Jaká je pravděpodobnost, že se buňka rozdělí dříve, než za* 45 *minut?*

b) *Jaká je pravděpodobnost, že buňce bude trvat dělení déle než* 65 *minut?*

c) *Do jaké doby se rozdělí* 99% *buněk?*

Úloha 9.2 *Prodejna očekává dodávku nového zboží v době od 8 do 10 hodin. Podle sdělení dodavatele je uskutečnění dodávky stejně možné kdykoliv během tohoto časového intervalu. Jaké je pst, že zboží bude dodáno v době od* $8:30$ *do* $8:45$*?*

Úloha 9.3 *V Kocourkově není stanovena žádná dolní hranice pro složení zkoušky. Jeden zly profesor se rozhodl, že vyhodí na daném termínu 25% všech studentů. Jak musí nastavit hranici pro složení zkoušky, pokud z dlouhodobých výsledků ví, že počet bodů na zkoušce lze popsat rozdělením* $N_0 = (\mu = 75, \sigma^2 = 100)$.

Úloha 9.4 *Na automatické lince se plní krabice mlékem. Každá krabice má obsahovat přesně jeden litr mléka, avšak působením náhodných vlivů kolísá množství mléka v intervalu* $(0{,}98\ l; 1{,}02\ l)$. *Každé množství mléka v tomto intervalu považujeme za stejně možné. Veličina* X *udává množství mléka v náhodně vybrané krabici. Najděte hustotu* $f(x)$, *distribuční funkci* $F(x)$, *nakreslete grafy těchto funkcí a vypočtěte pst, že* $X > 0{,}99\ l$.

Úloha 9.5 *Honza Kovář pravidelně jezdí hrát squash. V každém z* 900 *po sobě jdoucích dny zaparkuje své auto na placeném parkovacím místě s parkovacím taxametrem, ale nikdy do něj nevhodí kupón. Pravděpodobnost, že policista daný den zkontroluje taxametr, je rovna* $0,1$. *Vypočtěte.*

a) *kolikrát může Honza očekávat, že dostane pokutu,*

b) *jaká je směrodatná odchylka rozdělení očekávaného počtu pokut,*

c) *jaká je pravděpodobnost, že Honza dostane přesně 90 pokut … vypočtěte přesně pomocí binomického rozdělení,* *d) jaká je pravděpodobnost, že Honza dostane 87 a více pokut … vypočtěte přesně pomocí binomického rozdělení (asi pomocí nějakého programu nebo programovatelné kalkulačky s cyklem),*

e) Vypočtěte body c),d) přibližně pomocí aproximace binomického rozdělení normálním.

Úloha 9.6 *Podle údajů ze sčítání lidu v roce 2017 je zhruba* 75% *domácností vybaveno internetem. Náhodně bylo vybráno* 400 *domácností.*

a) Jaká je pravděpodobnost, že z vybraných 400 *domácností má internet zaveden* 290 *až* 305 *domácností?*

b) Určete, v jakých mezích (souměrných kolem střední hodnoty) bude počet domácností s internetem (ze 400 *vybraných) s pravděpodobností* 95%.

Úloha 9.7 *Aniž byste né pravděpoobnosi počítali, doplňte místo otazníků znaky* $<$, $>$, $=$ *a ke každé straně nerovnosti nakreslete obsah plochy, který danou pst představuje. Respektive naopak – nejprve si nakreslete šrafované obsahy počítaných ploch na každé straně nerovnosti (do dvou různých obrázků, ať se v nich vyznáte), a pak teprve napište znaménko nerovnosti:*

a) $P(U < 0,8)$?? $P(U < 0,9)$;

b) $P(U < 0,7)$?? $P(U > 0,7)$;

c) $P(U > -2)$?? $P(U < 2)$;

d) $P(U < -3)$?? $P(U < 3)$;

e) $P(0,9 < U < 1,1)$?? $P(1,9 < U < 2,1)$;

f) $P(1 < U < 2)$?? $P(U < 1) + P(U > 2)$.

Úloha 9.8 *Najděte hodnotu u, pro kterou platí (a ke každé psti nakreslete obsah plochy, kterou představuje):*

a) $P(U > u) = 0,25$;

b) $P(U < u) = 0,1$;

c) $P(U < u) = 0,99$;

d) $P(-u < U < u) = 0,99$;

e) $P(0 < U < u) = 0,35$;

f) $P(1 < U < u) = 0,2$.

Úloha 9.9 *Náhodná veličina* X *má normální rozdělení se střední hodnotou* $\mu = 5$ *a směrodatnou odchylku* $\sigma = 4$. *Vypočtěte následující pravděpodobnosti a doplňte je o obrázky.*

a) $P(X < 11)$

b) $P(X > 0)$

c) $P(X \in \langle 3; 7\rangle$

d) $P(\mu < X < \mu + \sigma)$

e) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

f) $P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma)$

g) $P(\mu + 2\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

Úloha 9.10 250 *soustruhů pracuje nezávisle na sobě. Každý z nich je v provozu 80% z celkové pracovní doby. Vypočtěte pomocí normálního rozdělení s korekcí, jaké je pravděpodobnost, že náhodně vybraném okamžiku pracovní doby je v provozu* 190 *až* 220 *soustruhů.*

Úloha 9.11 *Pravděpodobnost, že se zasazený strom ujme, je* $0,85$. *Vypočtěte pomocí normálního rozdělení s korekcí, jaká je pravděpodobnost, že z* 500 *zasazených stromů se jich ujme aspoň* 420.

Výsledky některých úloh viz 14.9.

10 Týden 10

10.1 Přednáška 10: Úvod do úsudkové statistiky – statistické testy

10.1.1 Statistické rozhodování – chyba 1. druhu a chyba 2. druhu

Příklad 10.1 Soudní proces jako příklad rozhodovacího procesu. *Uvažujme jednoduchý soudní proces, ve kterém existuje pouze jediný možný trest a soud rozhodne, zda se tomuto trestu obžalovaný podrobí nebo ne. A navíc proti rozhodnutí soudu neexistuje žádné odvolání. Jedná se o jakýsi rozhodovací proces, u kterého mohou nastat čtyři možné výsledky:*

1. *Obžalovaný je vinen a soud jej odsoudí.*
2. *Obžalovaný je nevinen a soud jej osvobodí.*
3. *Obžalovaný je nevinen a soud jej odsoudí. Jedná se o chybné rozhodnutí - tuto chybu budeme označovat jako chybu prvního druhu.*
4. *Obžalovaný je vinen a soud jej osvobodí. Toto rozhodnutí je rovněž chybné - budeme tuto chybu označovat chybou druhého druhu.*

V každém soudním procesu se musí hledat jistá rovnováha mezi tvrdostí a mírností. Jedním extrémem je liberální soudce, který k usvědčení obžalovaného vyžaduje velké množství důkazů. Takový soudce jen zřídka odsoudí nevinného (zřídka se dopustí chyby prvního druhu), ale dosti často osvobodí viníka (chyba druhého druhu). Druhým extrémem je konzervativní soudce, kterému k usvědčení stačí jen několik důkazů. Takový soudce posílá do vězení i jen při stínu podezření, čili častěji odsoudí nevinného (chyba prvního druhu), ale zřídka osvobodí darebáka (= zřídka se dopustí chyby druhého druhu). Slova „konzervativní“ a „liberální“ jsou termíny z politiky. V dnešní době už nikdo neví, co znamenají. Tato jejich „statistická“ definice navrhuje jejich význam, ale také upozorňuje na nebezpečí každého z těchto postojů.

Je otázkou, která z chyb je závažnější - zda chyba prvního druhu, nebo chyba druhého druhu. Všeobecně se má za to, že závažnější je uvěznit nevinného, než osvobodit darebáka. A proto se chybě odsouzení nevinného přisuzuje druh číslo 1 *a věnuje se jí větší pozornost. Ale někde musí být stanovena jistá hranice, po jejímž překročení už soud přistoupí k rozhodnutí „vinen“ a bez skrupulí člověka potrestá.*

Všimněme si jedné věci, která platí jako obecný princip. Pokud se soudce snaží být benevolentní a odsoudí člověka až po nahromadění velkého množství důkazů (snižuje tím možnost výskytu chyby prvního druhu), současně narůstá nebezpečí, že i když je obžalovaný vinen, potřebné množství důkazů se nenajde a soud jej osvobodí (roste možnost výskytu chyby druhého druhu). Není to nic světoborného, ale už jsme dlouho neměli žádný rámeček, a proto jej aspoň uvnitř příkladu můžeme použít:

Snižováním možnosti výskytu chyby prvního druhu roste možnost výskytu chyby druhého druhu - a naopak: pokud zvyšujeme možnost výskytu chyby prvního druhu, snižuje se možnost výskytu chyby druhého druhu.

Z uvedeného rámečku je vidět, že žádnou z chyb není možné naprosto vyrušit: pokud totiž snižujeme možnost výskytu chyby prvního druhu až téměř na nulu, roste tím možnost výskytu chyby druhého druhu do obludných rozměrů a rozhodnutí učiněná tímto stylem jsou nerozumná, až nemoudrá. Strategií v rozhodovacích procesech tohoto typu je tedy zvolit pravděpodobnost výskytu chyby prvního druhu malou, ale ne příliš malou.

Shrňme předchozí úvahy do pěti kroků, které popisují celý soudní proces:

1. *Stojí proti sobě dvě možná rozhodnutí soudu:*

   $$H_0 \dots \textit{obžalovaný je nevinen}$$
   $$H_1 \dots \textit{obžalovaný je vinen}$$

   Soud musí rozhodnout právě jednu z těchto variant a toto rozhodnutí je nezvratné, neexistuje proti němu odvolání.

2. *Vystoupí žalobce, který předloží nashromážděné důkazy pro platnost H_1.*

3. *Vystoupí obhájce a vysvětlí všechny souvislosti za předpokladu, že platí H_0. Snaží se vidět a vysvětlit všechny argumenty obžaloby ve světle toho, že obžalovaný je nevinen.*

4. *Porota soudu se odebere k rokování. Bere v úvahu jak množství důkazů a jejich závažnost, tak i argumenty obhajoby a možnost, že tyto důkazy neznamenají nutně vinu obžalovaného, ale v jeho neprospěch hrají jen náhodou.*

5. *Porota se vrací a vyslovuje svůj verdikt: pokud byla překročena míra závažnosti důkazů pro platnost H_1, obžalovaný je vinen. pokud ne, obžalovaný je osvobozen. Toto rozhodnutí soudu je nezvratné.*

Právě uvedených pět kroků v příkladu 10.1 se vyskytuje v mnoha rozhodovacích procesech, které nazýváme **statistické testy**. Tyto principy platí obecně, vyslovme je tedy obecně, už oproštěni od příkladu soudce a obžalovaného (ovšem analogie se soudním procesem zde existuje velice přímá):

(K1) Statistický test obyčejně rozhoduje o tom, zda platí hypotéza H_0 (tzv. **nulová hypotéza**) nebo H_1 (tzv. **alternativní hypotéza**). Tyto dvě hypotézy přitom stojí ve vzájemném rozporu. Ve většině testů H_0 tvrdí, že jistá veličina *nezávisí* na hodnotách určité další veličiny, kdežto H_1 tvrdí, že naopak *závisí* (pro ty, kdo by si chtěli udržet souvislost mezi statistickým testem a soudním procesem, což doporučuji, pomůcka k zapamatování: H_0 testu říká **ne**závisí, a H_0 soudního procesu **ne**vinen).

(K2) Stanovíme **kritérium** (zpravidla určitou funkci), které ukazuje na míru platnosti alternativní hypotézy H_1 (určuje „závažnost důkazů“ pro H_1). Pak provedeme experiment, ve kterém změříme data potřebná pro dosazení hodnot do našeho kritéria.

(K3) Kritériem bývá jistá funkce, která při různých měřeních nabývá různých hodnot, je to tedy náhodná veličina. Určíme **teoretické rozdělení kritéria** za předpokladu, že platí hypotéza H_0. Jinými slovy, popíšeme vlastnosti kriterijní veličiny ve světle toho, že platí H_0.

(K4) Na základě teoretického rozdělení kriterijní veličiny stanovíme určitý interval hodnot, kam když padne empirická hodnota kritéria, tak nezviklá naše přesvědčení o platnosti H_0, ale eventuelní dopad hodnoty kritéria mimo tento interval nás povede k názoru, že byla překročena jistá **kritická míra**, takže usoudíme, že H_0 neplatí. Kritickou míru zpravidla určujeme tak, aby pravděpodobnost výskytu chyby prvního druhu (tj. že rozhodneme, že H_0 neplatí, když ve skutečnosti H_0 platí) byla dostatečně malá, např rovna 0.05 (to se chyby prvního druhu dopustíme nejvýše v pěti procentech případů), ale ne příliš malá, aby nerostla možnost výskytu chyby druhého druhu (tj. že rozhodneme, že H_0 platí, když ve skutečnosti H_0 neplatí) do nerozumných rozměrů.

(K5) Porovnáme empirickou hodnotu kritéria s kritickou mírou. Pokud je kritická míra překročena (hodnota kritéria leží mimo interval nalezený v bodě 4), zamítáme hypotézu H_0 ve prospěch alternativní hypotézy H_1. Pokud není kritická míra překročena, hypotézu H_0 nezamítáme.

Nyní ještě jednou definice chyby prvního a druhého druhu – pozor, je to důležité, protože je potřeba si tyto pojmy pamatovat nejen v příkladu o soudci, ale také v termínech zamítnutí nebo nezamítnutí H_0:

Tabulka 10.11: Čtyři možné výsledky statistického testu.

	skutečnost: H_0 platí	skutečnost: H_1 platí
rozhodnutí: H_0 nezamítáme	O.K.	chyba 2.druhu
rozhodnutí: H_0 zamítáme	chyba 1.druhu	O.K.

Další standardní označení se používá pro pravděpodobnost výskytu chyby 1.druhu (značí se α) a pravděpodobnost výskytu chyby 2.druhu (značíme β).

10.1.2 Statistický test střední hodnoty binomického rozdělení

V tomto oddílku se pustíme do prvního typu statistického testu. Celý postup bude vysvětlen na příkladu:

Příklad 10.2 *Expert zaplacený prodejcem tvrdil, že o nový výrobek šamponu bude mít zájem 20% zákazníků. Při průzkumu u* 600 *zákazníků jich o nový šampon projevilo zájem* 135*. Na hladině významnosti* $\alpha = 0{,}05$ *testujte hypotézu* H_0*že zájem o výrobek je zhruba stejný, jak expert předpokládal.*

Řešení: Hladina významnosti $\alpha = 0{,}05$ je právě pst výskytu chyby 1. druhu – tuto pst volíme na začátku, před provedením úsudku. Jedná se o jakési nastavení přísnosti-benevolence našeho úsudku; α se obvykle volí $\leq 0{,}05$. Projdeme pět kroků našeho usuzování, jak byly naznačeny v předchozím oddílku: nejprve ovšem provedeme nejdůležitější krok našeho postupu – označíme X = počet zájemců o nový šampón z každých nezávisle dotázaných 600 lidí.

(K1) Budeme rozhodovat mezi hypotézami

- H_0 (= nulová hypotéza): odhad experta se shoduje zhruba s měřením, a tedy řečeno pomocí střední hodnoty: $EX = 120$.
- H_1 (= alternativní hypotéza): skutečný zájem o šampon se od odhadu experta liší, tj. $EX \neq 120$.

Je okamžitě vidět, že v anketě $X = 135$, tj. zájem je „trochu větší než" dvacet procent ze 600 lidí, otázkou ovšem je kritická mez: můžeme pořád tvrdit, že zájem je zhruba 20 procent? Je-není průměrný zájem významně větší než 20 procent? O tom rozhodne tento statistický test.

(K2) Kritériem našeho rozhodování je veličina X = počet zájemců o nový výrobek ze 600 lidí.

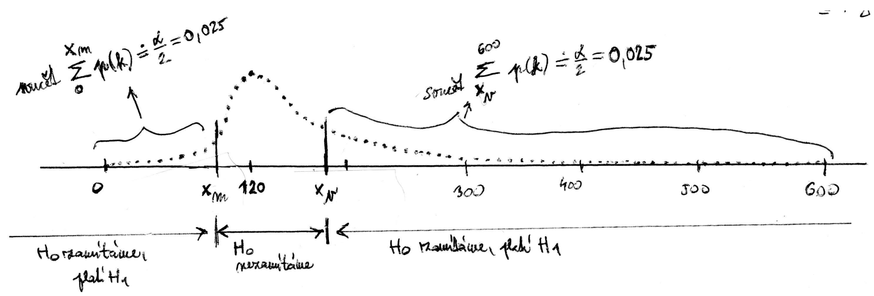
V našem jediném měření je $X = 135$, ale bude tomu tak vždy? Je průměrný zájem skutečně větší než 120 ze 600 lidí?

(K3) Popišme chování veličiny X za předpokladu, že platí H_0 – pokud platí H_0, veličina X má zhruba rozdělení $Bi(N = 600, p = 0{,}20)$.

To znamená, že X může nabývat hodnot $0, 1, 2, \ldots, 600$ s pstí

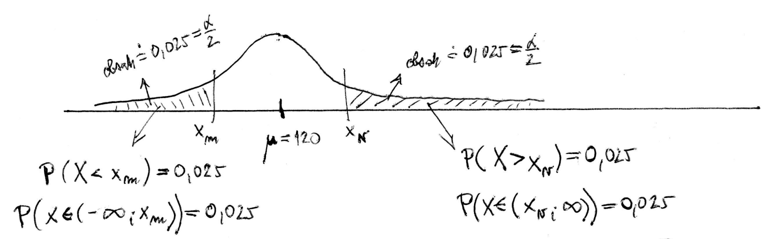
$$p(k) = \binom{600}{k} \cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{600-k}.$$

(K4) Pro předem zvolené $\alpha = 0{,}05$ najdeme kritické meze našeho rozhodování: Když počet zájemců bude podstatně větší nebo podstatně menší než 120, zamítneme H_0 a prohlásíme, že platí H_1. Vyjdeme z grafu pstní funkce $p(k)$: máme zde 601 pstí, jejichž součet je roven jedné. „Usekneme" na obou stranách tolik hodnot k, aby pst, že naměřená hodnota veličiny X ležela v intervalu $\langle x_m; x_v \rangle$, se rovnala hodnotě $(1 - \alpha)$, tedy 0,95:



Nyní máme dvě možnosti: a) pracovat s binomickým rozdělení – při hledání x_v musíme sečíst sumu asi čtyř set hodnot z obrázku, při hledání x_m asi sto hodnot. Počítači je to jedno, najde x_m jako $0,025$-kvantil dané binomicky rozdělené veličiny, x_v najde jako 0,975-kvantil.

b) Pokud bych neměli k dispozici počítač, ale jen tabulku distribuční funkce U-rozdělení, využijeme skutečnosti z minulé přednášky, že totiž rozdělení binomické lze dobře aproximovat pomocí rozdělení normálního. To provedeme nyní: namísto diskrétních 601 hodnot pstní funkce budeme pracovat se spojitou hustotou, kde najdeme x_m, x_v pomocí integrací, u kterých známe výsledky:



Pro výpočty budeme potřebovat dosadit střední hodnotu binomického rozdělení $Np = 120$ za μ, a rozptyl binomického rozdělení $Np(1-p)) = 96$ dosadit za σ^2. Způsobem popsaným u normálního rozdělení v minulé přednášce převedeme psti na psti vyjádřené rozdělením U a využijeme tabulky:

$$\Phi\left(\frac{x_m-120}{\sqrt{96}}\right) = 0{,}025 \implies \frac{x_m-120}{\sqrt{96}} = -1{,}96 \implies x_m = 120 - 1{,}96\cdot\sqrt{96} \doteq 100{,}8;$$

$$\Phi\left(\frac{x_v-120}{\sqrt{96}}\right) = 0{,}975 \implies \frac{x_v-120}{\sqrt{96}} = +1{,}96 \implies x_v = 120 + 1{,}96\cdot\sqrt{96} \doteq 139{,}2.$$

(K5) Rozhodnutí našeho statistického testu:

$$X = 135 \in (x_m, x_v) = (100{,}8; 139{,}2),$$

tedy H_0 nezamítáme. Zájem o nový výrobek je zatím zhruba u 20% zákazníků. Neprokázalo se, že by zájem o nový výrobek byl statisticky významně jiný než u 20% zákazníků.

(K6) Důležitá poznámka: interval spolehlivosti pro střední hodnotu binomického rozdělení: Vypracuj na přednášce, nebo doplň do skript!!! V roce 2024 snad bude minimálně nahráno na video.

10.1.3 Statistický test střední hodnoty průměru z normálního rozdělení

Příklad 10.3 *Je známo, že počet bodů získaných souhrnně na testech z matematiky v průběhu prvního pololetí maturitního ročníku má normální rozdělení pro $\mu = 500$ bodů a směrodatnou odchylku $\sigma = 100$ bodů.*

Firma KAPPA vyvinula program INTEL, jehož cílem je zlepšit znalosti matematiky u středoškolských studentů, zejména pak zlepšit výsledky testů v maturitním ročníku.

Chtějí svůj program INTEL otestovat, a proto náhodně vybrali 25 studentů z ČR a program zaslali každému z nich. Po provedení testu z matematiky se ukázalo, že průměr ohodnocení daných 25 studentů je $\overline{x} = 540$. Otázka zní: lze nyní říct, že program INTEL zlepšuje výkon v testu, nebo se jen náhodou vybralo 25 studentů s vyšším výkonnostním průměrem v matematice? Jedná se o „skutečný“ výsledek (= lze jej zobecnit pro celou populaci?), nebo bylo vyššího průměru dosaženo jen díky náhodným faktorům? Tyto otázky nás přivádějí ke statistickému testu, který rozhodne.

(K1) H_0**:** $\mu = 500$ (program intel nemá vliv na zlepšení matematických schopností, tj. střední hodnota bodového ohodnocení testu celé populace studentů i po rozšíření programu všem (celé populaci) zůstane stejná).

H_1**:** $\mu > 500$ (jednostranný test – můžeme předpokládat, že program znalosti matematiky nezhoršuje).

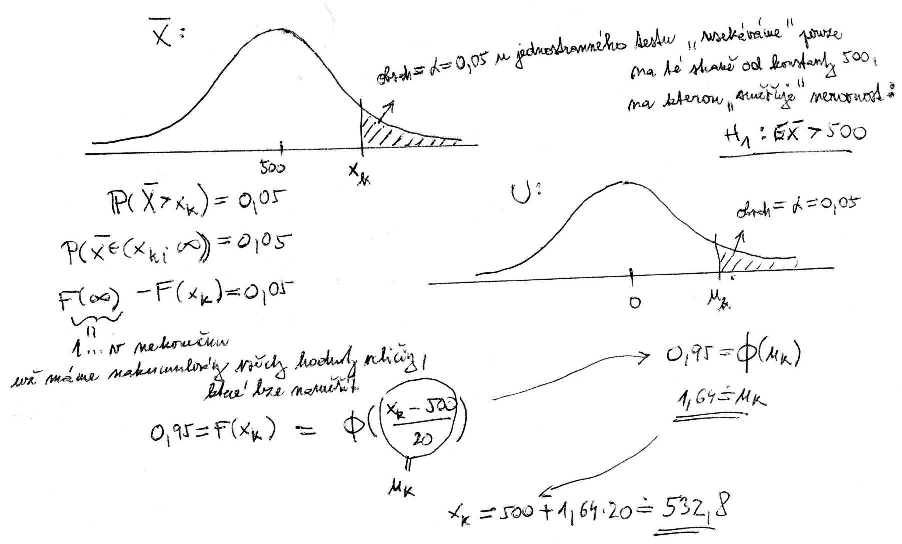
(K2) Kritériem volíme právě veličinu $\overline{X}$, která teoreticky popisuje průměr hodnot (= průměr náhodných naměřených hodnot).

(K3) Za předpokladu platnosti H_0 má veličina $\overline{X}$ parametry

$$\mu_{\overline{X}} = 500, \quad \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{N} = 400 \Longrightarrow \sigma_{\overline{X}} = 20.$$

(K4) Stanovená kritická U-hodnota je pro $\alpha = 0{,}05$ rovna $u_{0{,}95} = 1{,}64$. Odtud kritická hodnota v rozměru veličiny $\overline{X}$ je

$$\overline{X}_k = \mu_{\overline{X}} + \sigma_{\overline{X}} \cdot 1{,}64 = 532{,}8;$$



(K5) Rozhodnutí testu: pokud příslušná U-hodnota průměru je $\geq 1{,}64$, zamítáme H_0 na hladině významnosti α. V našem případě náhodná veličina $\overline{X}$ nabyla při měření hodnoty $\overline{x} = 540$, tedy příslušná U-hodnota je $u = \frac{540-500}{20} = 2 > 1{,}64$. Proto zamítáme H_0 a uzavíráme, že program „skutečně“ zlepšuje matematické schopnosti studentů.

Poznámka. Souvislost statistického testu s pojmem podmíněné pravděpodobnosti: V průběhu právě dokončeného statistického testu jsme vlastně počítali podmíněnou pravděpodobnost $P(\overline{X} \geq 540|H_0 \text{ platí})$ (čti: pravděpodobnost, že $\overline{X}$ nabude hodnoty větší nebo rovny 540, pokud H_0 platí; tomu, co v uvedeném zápisu následuje za svislou čarou, se říká **podmínka**; **podmíněná pravděpodobnost** je pak pravděpodobnost události zaznamenané před svislou čarou vypočtená za předpokladu, že platí podmínka. Protože $\alpha = 0{,}05 = P(\overline{X} \geq 532{,}8|H_0 \text{ platí})$, je očividné, že

$$P(\overline{X} \geq 540|H_0 \text{ platí}) < \alpha;$$

přesněji (viz obr. 10.16)

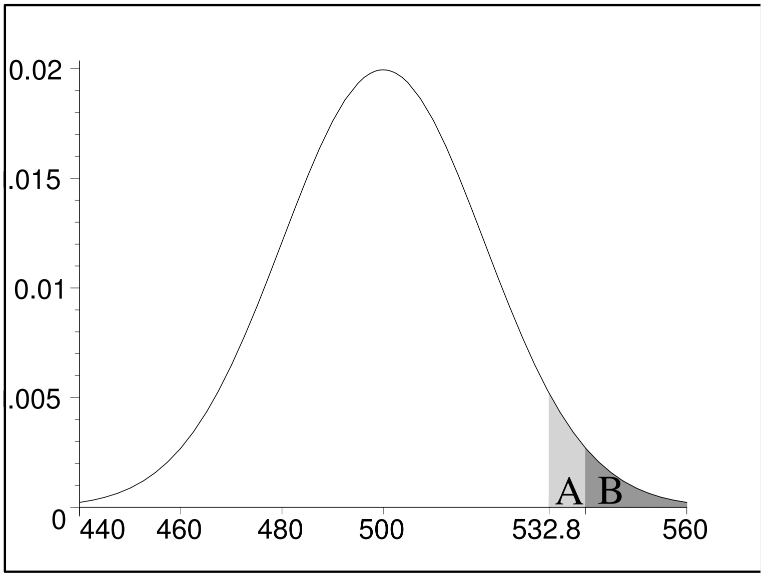
$$\alpha = 0{,}05 = P(532{,}8 \leq \overline{X} \leq 540|H_0 \text{ platí}) + P(\overline{X} \geq 540|H_0 \text{ platí}) = S(A) + S(B).$$

Protože podmíněná pravděpodobnost $P(\overline{X} \geq 540|H_0 \text{ platí}) = S(B)$ je menší než naše $\alpha = 0.05 = S(A) + S(B)$, uzavíráme, že něco z našich výchozích předpokladů nebylo správné - to „něco“ je hypotéza H_0. Samozřejmě, že kromě H_0 jsme měli i další výchozí předpoklady, např. naše data mohla být ovlivněna tím, že

a) Náš vzorek 25 studentů nebyl náhodný (byl z výběrových škol).

b) Kolega při opisování dat omylem zapsal některá ohodnocení vyšší než ve skutečnosti.

Ale vlivy typu a),b) mohou být vyloučeny správným naplánováním a provedením měření, takže se v podobných případech většinou uzavírá, že nízká pravděpodobnost $P(\overline{X} \geq 540|H_0 \text{ platí})$ je důsledkem toho, že nesprávný byl předpoklad platnosti H_0.



Obrázek 10.16: Ad př. 10.3 - hustota rozdělení veličiny $\overline{X}$ za předpokladu, že platí H_0.

Příklad 10.4 *Ředitel firmy KAPPA (data i situace viz předchozí příklad 10.3) zjistil, že konkurenční softwarová firma DELTA rovněž vyvinula program pro výuku matematiky (s názvem KILL). Zavolal si proto svého firemního psychologa a požádal ho, aby zjistil, který z obou konkurenčních programů INTEL a KILL je lepší, tj. který více zvyšuje úroveň matematických znalostí.*

Psycholog získal kopie obou programů. První z nich předal 25 *náhodně vybraným studentům, druhou jiným* 30 *náhodně vybraným studentům. Po provedení testu z matematiky získal od těchto studentů výsledky jejich ohodnocení a spočetl průměry příslušných hodnot. U programu INTEL* $\overline{x}_1 = 600$*, u programu KILL* $\overline{x}_2 = 575$*. Aby zjistil, do jaké míry je jeho měření reprezentativní a zda rozdíl průměrů není pouze náhodný (tj. způsobený např. tím, že program INTEL byl rozdán mezi studenty, kteří byli náhodou chytřejší, ale ne tím, že by INTEL byl lepší než KILL), sáhne ke statistickému testu.*

(K1) H_0**:** $\mu_1 = \mu_2$ (kdyby se oba programy distribuovaly celé populaci, výsledná střední hodnota ohodnocení by byla u obou stejná).

H_1**:** $\mu_1 \neq \mu_2$ (musíme použít oboustranný test, protože nevíme, který z programů je lepší).

(K2) Testovým kritériem bude rozdíl náhodných veličin $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ s konkrétní naměřenou hodnotou $x_1 - x_2 = 600 - 575 = 25$.

(K3) Za předpokladu platnosti H_0 je rozdělení kritéria $\overline{X_1} - \overline{X_2}$ normální, vypočteme jeho střední hodnotu a rozptyl:

$$E(\overline{X_1} - \overline{X_2}) = E\overline{X_1} - E\overline{X_2} = \mu_1 - \mu_2 = 0,$$

Dále

$$D(\overline{X_1} - \overline{X_2}) \quad = \quad D\overline{X_1} + D\overline{X_2} = D\left(\frac{1}{25} \cdot \sum_{1}^{25} X_i\right) + D\left(\frac{1}{30} \cdot \sum_{1}^{30} X_i'\right) = \frac{10000}{25} + \frac{10000}{30} = 733{,}333,$$

a nás bude zajímat směrodatná odchylka $\sqrt{733{,}333} \doteq 27{,}08$. Při výpočtu jsme využili důležitý fakt rozptylu rozdílu dvou nezávislých veličin: rozptyly dílčích veličin sečteme, nikdy je neodečítáme; plyne to z faktu, že rozptyl funguje jako kvadratická odchylka, tedy konstanta (-1) vyjadřující rozdíl se při vytýkání před operátor rozptylu umocní na druhou.

(K4) Pro $\alpha = 0{,}05$ jsou kritické U-hodnoty oboustranného testu stejné jako u oboustranného testu v kapitole **??**: $u_m = -1{,}96$, $u_v = 1{,}96$.

(K5) Rozhodnutí testu: příslušná U-hodnota

$$\frac{\overline{x_1} - \overline{x_2} - 0}{25} = \frac{600 - 575 - 0}{27} = 0{,}92 \in (-1{,}96; 1{,}96) \implies \text{NEzamítáme } H_0,$$

programy vyjdou svou kvalitou zhruba nastejno. Nenašlo se dost důkazů pro to, že by oba programy byly odlišné svou kvalitou.

Test v příkladu se liší od předchozího testu pouze krokem (K3), kde jsme museli určit rozdělení rozdílu dvou náhodných veličin.

10.2 Cvičení 10: úvod do statistických testů

Všechny příklady si připraví studenti – první trojice příklad 10.1, druhá trojice příkaldy 10.2+10.3, třetí trojice příklady 10.4+10.5.

Úloha 10.1 *Stokrát jsme hodili kostkou, přitom* 25*-krát padla šestka. Testujte hypotézu* H_0*, že kostka je poctivá, tj. že pst, že na ní padne šestka, je rovna* $\frac{1}{6}$*, proti alternativní hypotéze, že pst se nerovná* $\frac{1}{6}$*. To na hladině významnosti* $\alpha = 0,05$.

Úloha 10.2 *Při průzkumu veřejného mínění v souboru* 500 *dotazovaných respondentů jich* 180 *vyjádřilo nespokojenost se svou poslední volbou v parlamentních volbách (tj. dnes by volili jinou stranu). Lze na základě tohoto průzkumu tvrdit, že* 40% *voličů je nespokojených se svou poslední volbou? Testujte na hladině významnosti* $\alpha = 0,05$*, proveďte oboustranný test.*

Úloha 10.3 *(souvisí s příkladem 10.2) Kolik lidí z* 500 *dotazovaných respondentů by muselo vyjádřit nespokojenost se svou poslední volbou, abychom na hladině významnosti* $\alpha = 0,05$ *byli oprávnění tvrdit, že se počet voličů nespokojených ses svou poslední volbou významně liší od* 40% *(určitě obě meze, větší i menší)?*

Úloha 10.4 *Střední doba (=střední hodnota) bezporuchovosti činnosti určitého typu přístroje by měla být* 1000 *hodin. Přitom z dřívějších měření víme, že směrodatná odchylka doby bezporuchové činnosti jednoho přístroje je* $\sigma = 100$ *hodin.*

Z velké skupiny přístrojů jsme náhodně vybrali 25 *kusů. Průměrná doba jejich bezporuchové činnosti byla* 970 *hodin. Je tím prokázáno, že celá skupina přístrojů už nevyhovuje požadavku, aby přístroje pracovaly* 1000 *hodin bez poruchy? To by znamenalo, že přístroje jsou vyráběny v horší kvalitě. Proveďte oboustranný test, a to na hladině významnosti a)* $\alpha = 0,1$*, b)* $\alpha = 0,2$.

Úloha 10.5 *Určete nejmenší hladinu významnosti, pro kterou bychom v příkladě 10.4 zamítli hypotézu* $H_0 : \mu = 1000$*. (Vlastně: máme určit p-hodnotu statistického testu v předchozím příkladu).*

Výsledky některých úloh viz 14.10.

11 Týden 11

K přednášce 11 najdete v IS slajdy, ty vás provedou naprostým jádrem – text, který následuje, obsahuje trochu víc materiálu.

11.1 Nestranný a konzistentní odhad parametru rozdělení

Ve statistických testech v minulé kapitole jsme tiše předpokládali, že rozptyl σ^2 je známý. To ale ve skutečnosti většinou není pravda a my jej musíme odhadnout (= přibližně určit). Proto se nyní pustíme do trochy teorie a praxe v odhadování parametrů.

Příklad 11.1 *Pět sad součástek o dvaceti kusech bylo podrobeno zkouškám extrémních teplot. U každé sady je v tabulce uveden počet součástek z daných dvaceti, které v teplotní zkoušce obstály:*

z 20 *obstálo* x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
13	*0*	*0*
11	*-2*	*4*
12	*-1*	*1*
15	*2*	*4*
14	*1*	*1*

V tabulce už byla využita hodnota průměru $\frac{1}{5}\sum x_i = 13$. *Ve třetím sloupci tabulky jsou uvedeny čtverce odchylek od průměru, odkud spočteme empirický rozptyl (= průměr čtverců odchylek od průměru ... :-)):*

$$s^2 = \frac{1}{5}\sum(x_i - \overline{x})^2 = \frac{10}{5} = 2.$$

Jedná se o měření hodnot náhodné veličiny, kterou je možné popsat střední hodnotou μ *a rozptylem* σ^2. *Ovšem tyto hodnoty neznáme - pokusíme se je odhadnout. Otázka zní: Jak dobrým odhadem pro* μ *je průměr* $\overline{x}$*? Jak dobrým odhadem pro* σ^2 *je empirický rozptyl* s^2*?*

Hodnoty $\overline{x}$, s^2 jsou různé pro různé soubory měření, při jejich popisu užíváme náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots, X_N$ označované jako náhodný výběr. Zde v teorii odhadů je potřeba tento i následující pojmy uvést přesně.

Definice 11.1 *Říkáme, že veličiny* $X_1, X_2, \dots, X_N$ *tvoří* **náhodný výběr rozsahu** N *z rozdělení pravděpodobnosti o distribuční funkci* $F(x)$, *pokud*

a) *jsou navzájem nezávislé;*

b) *mají stejné rozdělení pravděpodobnosti zadané distribuční funkcí* $F(x)$.

Třeba v příkladu 11.1 je $x_1 = 13$, ale stejně dobře jsme mohli naměřit $x_1 = 10$ nebo $x_1 = 17$ – tuto náhodnost prvního měření reprezentuje náhodná veličina X_1, které nepřiřazujeme žádnou konkrétní hodnotu, pouze jsme si vědomi, že pod (velkým písmenem) X_1 se mohou skrývat různé hodnoty. Podobně se mohou skrývat různé hodnoty pod veličinami $X_2, \dots, X_N$.

Definice 11.2 *Libovolnou funkci* $T_N := T(X_1, X_2, \dots, X_N)$ *nad náhodným výběrem* X_1, X_2, …, X_N *nazveme* **statistikou**. *Specielně*

a) *Statistiku*

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{11.1}$$

nazveme **výběrovým průměrem***;*

b) *Statistiku*

$$\overline{S^2} = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2 \tag{11.2}$$

nazveme **výběrovým rozptylem**.

Pokud do statistiky T_N dosadíme konkrétní naměřené hodnoty x_1, x_2, …, x_N, dostaneme hodnotu $t_N = t(x_1, x_2, \dots, x_N)$, která se nazývá **realizací statistiky** T_N.

Například pokud dosadíme do vzorců 11.1, 11.2 konkrétní hodnoty měření x_i, dostaneme realizaci $\overline{x}$ výběrového průměru $\overline{X}$ a realizaci $\overline{s^2}$ výběrového rozptylu $\overline{S^2}$.

No a nyní nás bude zajímat, jak dobrým odhadem neznámé střední hodnoty μ veličiny X je realizace $\overline{x}$ výběrového průměru $\overline{X}$ (respektive jak dobrým odhadem neznámého rozptylu σ jsou realizace s^2, $\overline{s^2}$ veličin S^2, $\overline{S^2}$).

Definice 11.3 *Statistiku* T_N *nazveme* **nestranným odhadem** *parametru* γ*, pokud* $ET_N = \gamma$ *(střední hodnota veličiny* T_N *je rovna hodnotě parametru* γ*).*

Vysvětlení pojmu nestrannosti pomocí konkrétních hodnot měření: pokud budeme opakovaně měřit hodnoty $x_{1,i}$, $x_{2,i}$, …, $x_{N,i}$ a opakovaně počítat realizace $t_{N,i} = t(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{N,i})$ nestranného odhadu T_N parametru γ pro $i = 1, 2, \dots, n, \dots$, bude platit vztah

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_{N,i}\right) \in (\gamma - \varepsilon; \gamma + \varepsilon)\right) = 1 \tag{11.3}$$

platí pro každé malé pevně zvolené reálné kladné ε.

Laicky řečeno, pokud T_N je nestranným odhadem parametru γ rozdělení veličiny X, tak **pro rostoucí** n **(= rostoucí počet realizací** $t_{N,i}$**)** je průměr realizací $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_{N,i}$ **skoro jistě (= s pravděpodobností rovnou jedné)** stále blíže hodnotě γ.

Jinými slovy, nestrannost zaručuje takovou konstrukci vzorce pro T_N, která bere v úvahu všechny možné dostupné realizace $t_{N,i}$ a **nestraní** žádné z nich – pro rostoucí počet realizací se aritmetický průměr těchto realizací skoro jistě blíží neznámé hledané hodnotě γ.

Definice 11.4 *Statistiku T_N nazveme* **konzistentním odhadem** *parametru γ, pokud posloupnost náhodných veličin $(T_N)_{N=1}^{\infty}$ konverguje k hodnotě parametru γ podle pravděpodobnosti, tj.*

$$\lim_{N\to\infty} P\left(T_N \in (\gamma-\varepsilon;\gamma+\varepsilon)\right) = 1 \tag{11.4}$$

platí pro každé malé pevně zvolené reálné kladné ε.

Laicky řečeno, pokud T_N je konzistentním odhadem parametru γ rozdělení veličiny X, tak pro rostoucí N (= **rostoucí počet měření pro výpočet jedné realizace**) je hodnota t_N **skoro jistě (= s pravděpodobností rovnou jedné)** stále blíže hodnotě γ.

Jinými slovy, konzistence zaručuje takovou konstrukci vzorce pro T_N, která je **konzistentní (= česky: důsledná)** v tom ohledu, že pro rostoucí počet měření při výpočtu jedné realizace se tato realizace skoro jistě blíží neznámé hledané hodnotě γ.

Uvedené definice nyní osvětlíme konkrétně při hledání odhadu střední hodnoty μ a rozptylu σ^2 veličiny X s normálním rozdělením pravděpodobnosti.

Věta 11.1 *Pokud náhodná veličina X má konečnou střední hodnotu μ, tak výběrový průměr $\overline{X}$ je nestranným a konzistentním odhadem μ.*

Skutečně, v minulé kapitole bylo spočteno, že

a) $\mu_{\overline{X}} = E\overline{X} = E\frac{1}{N}\sum X_i = \mu$, tj. střední hodnota náhodné veličiny $\overline{X}$ je rovna parametru μ; tedy odhad $\overline{X}$ je nestranným odhadem střední hodnoty μ.

b) $\sigma^2_{\overline{X}} = D\overline{X} = D\frac{1}{N}\sum X_i = \frac{\sigma^2}{N}$ a platí

$$\lim_{N\to\infty} D\overline{X} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sigma^2}{N} = 0,$$

tj. limita rozptylu odhadu $\overline{X}$ pro rostoucí počet měření je rovna nule – jinými slovy, realizace odhadu $\overline{X}$ se pro rostoucí počet měření skoro jistě blíží hodnotě μ, čili $\overline{X}$ je konzistentním odhadem hodnoty μ.

Čili vzorec pro průměr hodnot $\overline{x}$ funguje přesně tak, jak potřebujeme – „nestraní“ konkrétnímu měření a „skoro jistě“ směřuje přímo k určení střední hodnoty μ, a dále je **konzistentní (= důsledný)** v tom smyslu, že průměr tisíce hodnot je „skoro jistě“ lepší odhadem μ než průměr stovky hodnot.

Otázkou nyní je najít nejvhodnější odhad pro neznámý rozptyl σ^2 veličiny X. Máme k dispozici hodnotu S^2 jako míru vychýlení od průměru – je ona tím nejvhodnějším odhadem hodnoty σ^2?

Věta 11.2 *Pokud náhodná veličina X má konečnou střední hodnotu μ a konečný rozptyl σ^2, tak nestranným a konzistentním odhadem rozptylu σ^2 veličiny X je výběrový rozptyl*

$$\overline{S^2} := \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{N-1}{N}\cdot S^2.$$

Při vysvětlení obsahu předchozí věty začněme nejprve u odhadu S^2 zopakováním vzorce – při vysvětlování významu rozptylu v popisné statistice bylo (snad) řečeno, že empirický rozptyl s^2 lze vyjádřit buď z definice jako

$$s^2 = \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2, \tag{11.5}$$

nebo po úpravách ve tvaru praktičtějším pro výpočet (= průměr čtverců minus čtverec průměru)

$$s^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \overline{x}^2. \tag{11.6}$$

Při matematickém popisu nyní musíme konkrétní měřené hodnoty ve vzorcích nahradit náhodnými veličinami s velkými písmeny a dostáváme

$$S^2 = \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2, \tag{11.7}$$

respektive

$$S^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2\right) - \overline{X}^2. \tag{11.8}$$

a) Užijeme nejprve úvah kapitoly předchozí, že totiž $\sigma^2 = EX_i^2 - \mu^2$, a dále platí $\sigma^2_{\overline{X}} = E\overline{X}^2 - \mu^2$. Vypočtěme střední hodnotu veličiny S^2:

$$\begin{aligned} ES^2 &= E\left(\frac{1}{N}\sum X_i^2 - \overline{X}^2\right) = \frac{1}{N}\left(\sum EX_i^2\right) - E\overline{X}^2 = \\ &= \frac{1}{N}\left(\sum(\sigma^2 + \mu^2)\right) - (\sigma^2_{\overline{X}} + \mu^2) = \\ &= \sigma^2 + \mu^2 - \sigma^2_{\overline{X}} - \mu^2 = \sigma^2 - \sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{N} = \frac{N-1}{N}\cdot\sigma^2. \end{aligned}$$

Čili střední hodnota statistiky S^2 není rovna odhadovanému parametru σ^2, to znamená, že S^2 není nestranným odhadem rozptylu σ^2. Zkrátka a dobře vzoreček 11.7 není dobře zkonstruován, protože jeho realizace s^2 jsou vždy trochu menší než neznámá hledaná hodnota σ^2

$$\left(s^2 \doteq \frac{N-1}{N}\cdot\sigma^2 < \sigma^2\right),$$

až na patologické případy $\sigma^2 = 0$ a $\sigma^2 = \infty$, které nás nezajímají (matematicky jsou takové náhodné veličiny zkonstruovatelné, ale v praxi měřené veličiny mají vždy konečný kladný rozptyl). Ale k nalezení nestranného odhadu už máme jen krok – můžeme se totiž poučit z výpočtu ES^2. Pokud vynásobíme S^2 konstantou $\frac{N}{N-1}$ (označme novou veličinu $\overline{S^2}$):

$$\overline{S^2} := \frac{N}{N-1} \cdot S^2, \tag{11.9}$$

tak dostaneme

$$E\overline{S^2} = \frac{N}{N-1} \cdot ES^2 = \frac{N}{N-1} \cdot \frac{N-1}{N} \cdot \sigma^2 = \sigma^2,$$

čili $\overline{S^2}$ už je nestranným odhadem hodnoty σ^2.

b) Dá se ukázat, že $\overline{S^2}$ je i konzistentním odhadem rozptylu σ^2, což plyne z faktu, že

$$\lim_{N\to\infty} \sigma^2_{\overline{S^2}} = 0,$$

ale to zde už podrobně provádět nebudeme.

Dále budeme jako nestranný a konzistentní odhad rozptylu σ^2 veličiny X užívat tedy statistiku $\overline{S^2}$. Má tedy ještě nějaký smysl „stará a překonaná" hodnota S^2? Vrátíme-li se k příkladu 11.1, kde $s^2 = 2$, lze vypočíst $\overline{s^2} = \frac{5}{4} \cdot 2 = 2{,}5$.

1. Hodnota $s^2 = 2$ má svou váhu – vyjadřuje rozptyl souboru uvedených pěti měření. Jedná se o empirický rozptyl – rozptyl naměřených hodnot.

2. Skutečný rozptyl σ^2 veličiny přeživších součástek je větší než rozptyl měření u pěti sad – proto je $\overline{s^2} = 2{,}5$ jeho vhodnějším odhadem.

V příkladu 11.1 můžeme uzavřít, že počet přeživších součástek ze sady dvaceti při extrémní teplotní zátěži lze popsat normálním rozdělením s parametry $\mu \doteq \overline{x} = 13$, $\sigma^2 \doteq \overline{s^2} = 2{,}5$.

Jednoduše řečeno, rozptyl s^2 vypočtený z několika naměřených hodnot je vždy o něco menší než skutečný rozptyl σ^2 měřené veličiny. Proto při odhadu σ^2 musíme vypočtené s^2 „trochu zvětšit" vynásobením členem $\frac{N}{N-1}$.

Další možný tvar vzorce pro $\overline{S^2}$ lze získat po úpravách s využitím 11.8 a vztahu $\overline{X} = \frac{1}{N} \cdot \sum X_i$:

$$\overline{S^2} = \frac{N}{N-1} \cdot S^2 = \frac{N}{N-1} \cdot \left(\frac{1}{N} \sum X_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum X_i \right)^2 \right),$$

a tedy po vykrácení konstantou N a roznásobení závorky dostaneme

$$\overline{S^2} = \left(\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \right) - \frac{1}{N(N-1)} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \right)^2. \tag{11.10}$$

Definice 11.5 *Výraz* $ss := \sum(x_i - \overline{x})^2$ *budeme nazývat* **součet čtverců** *měření veličiny* X.

Při tomto označení platí

$$S^2 = \frac{1}{N} \cdot SS \tag{11.11}$$

a zejména

$$\overline{S^2} = \frac{1}{N-1} \cdot SS. \tag{11.12}$$

S pojmem součtu čtverců nadále pracuje tzv. analýza rozptylu (ANOVA = ANalysis Of Variance), která se zabývá dalšími statistickými testy zkoumajícími rozptyl (pracuje většinou s tzv. F-rozdělením). Na tu ovšem v tomto kursu už nezbývá prostor.

Podle okolností budeme při výpočtu $\overline{S^2}$ užívat vzorec 11.2, 11.9, 11.10 nebo 11.12.

Zbývá ještě vyjádření k takzvanému počtu stupňů volnosti odhadu.

Příklad 11.2 *Kdybych vám řekl, abyste mi nadiktovali pět reálných čísel, a nedal žádnou další podmínku nebo omezení, mohli byste říct čísla, jaká chcete, například*

$$0, 70, 314, 32, 100.$$

Máte svobodu volby, která čísla vybrat. Jinými slovy, máte pět stupňů volnosti, protože si zcela svobodně a volně vybíráte pět čísel.

Kdyby ale úkol zněl: Nadiktujte mi pět čísel, jejichž průměr je 25*, trochu bych vaši volnost omezil – první čtyři čísla byste mohli volit libovolně, například*

$$0, 70, 314, 32,$$

ale páté číslo je mým požadavkem jednoznačně určeno. Aby průměr pěti čísel byl 25*, jejich součet musí být roven* $5 \cdot 25 = 125$*, tj. páté číslo musí být rovno* $125 - 416 = -291$*. Tuto druhou úlohu lze charakterizovat tím, že stupeň její volnosti je* 4*.*

Čili obecně pro N *hodnot, u kterých je předem dán jejich průměr, zbývá* $N - 1$ *stupňů volnosti.*

Podobná situace se objevuje i při odhadování rozptylu populace: Uvažujeme-li soubor měření N hodnot jisté veličiny X, z nich lze určit průměr $\overline{x}$. Chceme-li dále odhadnout rozptyl pro tuto konkrétní (už určenou) hodnotu $\overline{x}$, máme už jen $N - 1$ stupňů volnosti (ve vzorci pro $\overline{s^2}$ hodnotu $\overline{x}$ potřebujeme znát, protože při určení $\overline{s^2}$ počítáme totiž míru vychýlení měření právě od hodnoty $\overline{x}$).

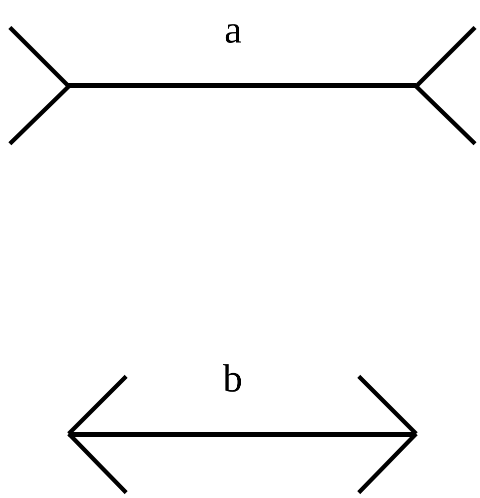
Tedy třeba v příkladu 11.1 má odhad rozptylu $\overline{s^2} = 2{,}5$ čtyři stupně volnosti.

Tento přístup určení počtu stupňů volnosti lze užít i na některé další situace v tomto textu. Obecně platí:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Počet stupňů volnosti odhadu = počet měření minus}\\ \text{počet parametrů odhadnutých již dříve.}\end{array}}$$

11.2 t-test typu „μ =konstanta“

Příklad 11.3 *Je známa následující grafická iluze (viz obr. 11.17), že totiž úsečka* **a** *se zdá delší než úsečka* **b** *(počítá se délka bez koncových šipek), i když ve skutečnosti jsou obě úsečky stejně dlouhé.*



Obrázek 11.17: K př. 11.3: Grafická iluze: délky úseček a, b jsou stejné.

Chceme nyní experimentem ověřit, že úsečka typu **a** *se zdá pozorovateli delší sama o sobě, bez porovnání s úsečkou* **b**. *Náhodně vybraným pěti lidem jsme na deset sekund ukázali úsečku* **a** *dlouhou 6 cm. Poté jsme je požádali, aby úsečku dané délky nakreslili, a změřili jsme její délku. Byla získána data* $x_1 = 8$, $x_2 = 11$, $x_3 = 9$, $x_4 = 5$, $x_5 = 7$.

Průměr těchto dat je $\overline{x} = 8$ cm. Chceme testovat hypotézu, že střední hodnota μ celé lidské populace při ohodnocení délky úsečky je významně větší než její skutečná délka 6 cm. V této situaci neznáme rozptyl σ^2 měřené veličiny a musíme jej odhadnout pomocí $\overline{s^2}$. Pak testovacím kritériem nebude

$$\frac{\overline{x} - 6}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}},$$

ale tzv. rozdělení t s hodnotou vypočtenou podle vztahu

$$t := \frac{\overline{x} - 6}{\frac{\overline{S}}{\sqrt{N}}}, \text{ kde } \overline{S} = \sqrt{\overline{S^2}}.$$

Toto t-rozdělení odvodil jistý pan William Sealy Gosset – ovšem příslušný článek uveřejnil nikoli pod svým vlastním jménem, ale pod jménem Student, a rozdělení je tedy známo pod názvem Studentovo t-rozdělení.

Hustota t-rozdělení závisí na počtu ν stupnů volnosti, se kterými se určí odhad rozptylu $\overline{S^2}$, a má tvar

$$f_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu} \cdot \beta(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{\frac{1+\nu}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{1+\nu}{2})}{\sqrt{\pi \cdot \nu} \cdot \Gamma(\frac{\nu}{2}) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{\frac{1+\nu}{2}}},$$

podle toho, zda se čtenáři více líbí funkce

$$\beta(p, q) = \int_0^1 u^{1-p} \cdot (1 - u)^{1-q} \,\mathrm{du}$$

(tzv. β-funkce), nebo funkce

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty u^{r-1} \cdot e^{-u} \,\mathrm{du}$$

(tzv. Γ-funkce). Přechod mezi jednotlivými verzemi vzorce hustoty plyne ze vztahu mezi β-funkcí a Γ-funkcí

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}$$

a z jedné další drobnosti, že totiž $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Funkce $f_\nu(x)$ je opět jedna z funkcí, kterou by člověk nerad potkalpozdě na ulici při návratu domů, ale ukazuje se, že i takové funkce jsou užitečné.

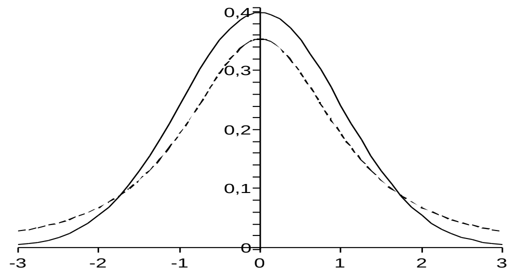
Uveďme zde některé vlastnosti t-rozdělení, které budeme využívat:

a) Hustota f_ν je symetrickou funkcí vzhledem k ose y, tj. je sudá: platí $f_\nu(x) = f_\nu(-x)$.

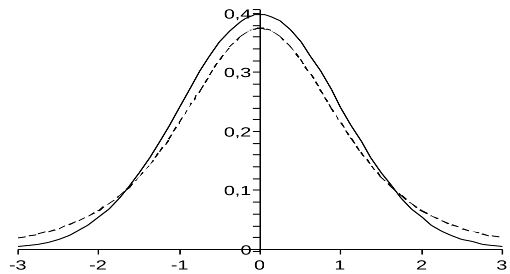
b) Kritická t-hodnota je dále od počátku než kritická U-hodnota, protože t-rozdělení je odvozeno při neznámém rozptylu, tj. zahrnuje větší míru náhodnosti a nejistoty než U-rozdělení (veličina t má větší rozptyl než veličina U). Hustota rozdělení t je „nižší a širší“ než hustota rozdělení U.

c) Čím lepší je náš odhad neznámého rozptylu σ měřené veličiny, tím více se t-rozdělení bude podobat U-rozdělení. A odhad rozptylu bude tím lepší, čím vyšší je počet měření N (tj. čím vyšší je počet stupňů volnosti ν).

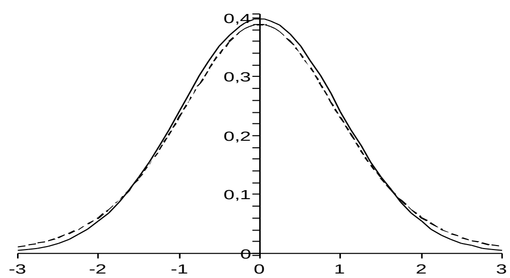
Vlastnosti b), c) lze znázornit graficky porovnáním U-rozdělení s t-rozdělením o různém počtu ν stupňů volnosti – (hustota U-rozdělení je v obrázcích znázorněna plnou čarou, hustota t-rozdělení čárkovanou čarou):



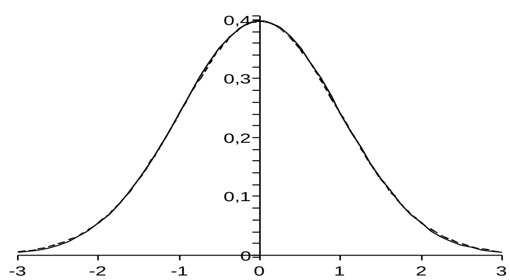
$\nu = 2$



$\nu = 4$



$\nu = 10$



$\nu = 60$

Z obrázků je vidět, že pro rostoucí počet stupňů volnosti se hustota t-rozdělení (v obrázku její graf vyznačen slabě) svým tvarem stále více blíží ke tvaru funkce hustoty U-rozdělení, a pro $\nu = 60$ je hustota t-rozdělení prakticky totožná s hustotou U-rozdělení (omlouvám se za malou tloušťku čar, ale při silnější tloušťce nebyl na obrázku patrný rozdíl mezi čárkovanou a plnou čarou).

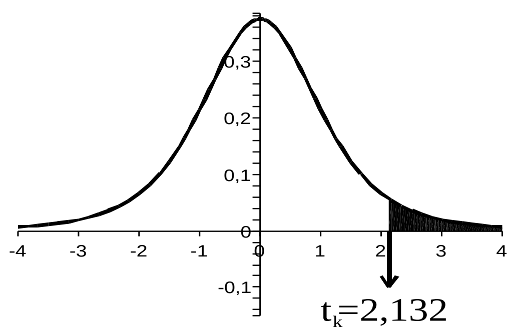
d) Pro určení kritických hodnot t_k budeme potřebovat hodnoty integrálů

$$P_\nu(t \leq x) = F_\nu(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\nu(u)\mathrm{d}u, \quad P_\nu(-x \leq t \leq x) = \int_{-x}^{x} f_\nu(u)\mathrm{d}u.$$

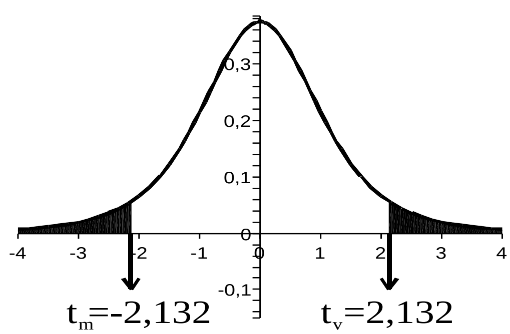
Tyto integrály se nepočítají vždy znovu a znovu, poněvadž jejich výpočet je složitý, ale jednou provždy byly spočteny a sestaveny do tabulky. Protože pro jednu hodnotu ν lze sestavit tabulku tak velkou jako je tabulka funkce Φ (kapitola 9), měli bychom pro 35 různých hodnot ν také 35 různých tabulek. Toto množství dat je zredukováno jen na několik hodnot v závislosti na hladině významnosti α.

A vůbec, pro statistické testy je nejužitečnější místo hodnot distribuční funkce přímo tabulka kritických hodnot pro různé α a ν – jedná se o tabulku 11.12. S touto tabulkou budeme pracovat tak, že vybereme řádek s daným počtem stupňů volnosti ν, sloupec s danou hodnotou $\alpha = q$ u pravostranného ($\alpha = 2q$ u oboustranného) testu. Na průsečíku řádku se sloupcem se pak nachází požadovaná kritická hodnota testu.Tabulku lze volit takto úsporně, protože mezi jednostranným a oboustranným testem je následující vztah:

- t_k u levostranného testu se liší od pravostranného pouze znaménkem.
- t_k u pravostraného testu pro $\alpha = q$ je stejné jako $|\pm t_k|$ u oboustranného testu pro $\alpha = 2q$. Je to vidět i na srovnání následujících dvou obrázků:



Pravostranný t-test pro $\alpha = q = 0{,}05$, $\nu = 4$ ... $t_k = 2{,}132$. Šrafovaná část tvoří 5% obsahu celého podgrafu.



Oboustranný t-test pro $\alpha = 2q = 0{,}1$, $\nu = 4$ ... $t_m = -2{,}132$, $t_v = 2{,}132$. Šrafovaná část tvoří celkem 10% obsahu celého podgrafu (na každé straně je vyšrafováno 5% obsahu podgrafu).

Tabulka 11.12: Kritické hodnoty t-testu.

	q=0,4	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
ν	2q=0,8	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,704	31,821	63,657	318,31
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,326
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,213
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,262	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,261	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,260	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,260	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,259	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,259	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,258	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,258	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,258	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,257	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,257	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,257	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,257	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,257	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,256	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,256	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,256	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,256	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,256	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,256	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,256	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,256	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,256	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,255	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0,254	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,254	0,677	1,289	1,658	1,98	2,358	2,617	3,160
∞	0,253	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

– Ze symetrie hustoty t-rozdělení je patrné, že pokud budeme provádět levostranný t-test, stačí najít kritickou hodnotu pravostranného testu a změnit její znaménko na záporné.

Vraťme se nyní zpět k příkladu 11.3 a proveďme statistický t-test:

(K1) H_0: $\mu = 6$ *(střední hodnota délky úsečky není ovlivněna iluzí prodloužení).*
H_1: $\mu > 6$.

(K2) *Testovým kritériem bude výběrový průměr $\overline{X}$, jehož realizaci $\overline{x} = 8$ převedeme na t-hodnotu*

$$\frac{8-6}{est\sigma_{\overline{X}}}.$$

(„est“ označuje odhad, z anglického „estimate“ [estimit] – protože v dalším textu budeme odhadovat odchylku i pomocí jiných funkcí než $\overline{X}$, bude výhodné si tímto označením připomenout, u které veličiny vlastně odchylku nebo rozptyl odhadujeme).

(K3) $\overline{s^2} = 5$, *a tedy*

$$est\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\overline{s^2}}{N} = \frac{5}{5} = 1,$$

přičemž počet stupňů volnosti odhadu je $N-1 = 5-1 = 4$, tj. za předpokladu platnosti H_0 má veličina $\frac{\overline{X}-6}{1}$ Studentovo t-rozdělení pro $\nu = 4$.

(K4) *Příslušná kritická hodnota t_k je na průsečíku řádku $\nu = 4$ a sloupce pro $\alpha = 0{,}05$ (u pravostranného testu), tj. $t_k = 2{,}132$.*

(K5) $\frac{8-6}{1} = 2 < t_k = 2{,}132 \Rightarrow H_0$ *nezamítáme, nenašli jsme dostatek důkazů pro potvrzení iluze větší délky.*

11.3 Několik poznámek ke statistickému testu

Poznámka A) Logika formulace „nezamítáme H_0“ V právě dokončeném příkladu bylo odpovědí „hypotézu H_0 nezamítáme“. Logiku této formulace snad osvětlí následující příklad.

Příklad 11.4 *Když něco někde nenajdu, neznamená to, že to tam není.*

S nástupem lyžařské sezóny pan Loftus začal oprašovat svou výstroj a zjistil, že nemůže najít své lyžařské brýle, i když prohledal celý byt. Potom jej ovšem zděsila představa, že si za dva tisíce bude muset koupit brýle nové, a celý byt prohledal ještě jednou, a to důkladněji. Nakonec brýle našel v zadním rohu své skříně!!

Tento příklad je ilustrací jednoho celkem logického principu: pokud naleznu hledaný předmět, určitě vím, že tam je. Ale pokud jej nenaleznu, může to znamenat buď že tam není, nebo že tam je, ale mé hledání nebylo dost důkladné (nemělo dostatečnou sílu).

Testování hypotéz je také takovým hledáním – hledáme vliv jedné veličiny na druhou veličinu. Pokud nalezneme tento vliv (zamítáme H_0), víme „s jistotou“ (na hladině významnosti α), že existuje. Pokud vliv nenalezneme, může to znamenat buď že tento vliv neexistuje, nebo že existuje, ale síla testu nebyla dostatečná pro jeho nalezení.

Výsledek „zamítáme H_0“ má docela pevný logický základ (pro $\alpha = 0{,}05$ platí s pravděpodobností 95%). Ale říct v případě, kdy nebyla překročena kritická hodnota, že „H_0 přijímáme“ nebo „H_0 platí“, je příliš ukvapené, protože při důkladnějším hledání by se mohlo ukázat, že určitý vliv existuje, tj. H_0 neplatí. Ustálilo se tedy rčení „nezamítáme H_0“, které odpovídá jisté opatrnosti v učinění konečného závěru.

Fráze „nezamítáme H_0“ je tedy opatrným vyjádřením, které je zcela na místě. Znamená to, že říkáme: „Výsledky testu nám neposkytují dostatečné důkazy k závěru, že H_0 neplatí.“

K příkladu 11.4: Co by to znamenalo, kdyby pan Loftus provedl tak důkladné hledání, že by obrátil celý byt naruby, ale přesto brýle nenašel? Stále by existovala jistá malá šance, že je přehlédl v nějaké zapadlé škvíře, ale protože je nenašel, bylo by rozumné koupit nové.

Podobně i experiment provedený v úžasné síle a rozsahu, pokud neprokáže vliv nezávislé proměnné na závislou proměnnou, nás vede k závěru, že „je rozumné přijmout H_0“.

Příklad 11.5 *Chceme otestovat kvalitu jisté techniky pamatování. Vybereme náhodně dvě skupiny lidí. Oběma skupinám je předložen jistý počet navzájem nesouvisejících slov k zapamatování (například* 20 *slov). Poté jsou lidé z první skupiny okamžitě vyzkoušeni, kolik slov si zapamatovali. Lidé ze druhé skupiny jsou vyzkoušeni až o týden později. Čili nezávislou proměnnou je doba pamatování, závislou proměnnou je počet zapamatovaných slov z daných dvaceti. Stanovíme hypotézy testu:*

H_0**:** *počet zapamatovaných slov nezávisí na době pamatování (technika zapamatování byla tak dobrá, že po týdnu si pamatuji stejně dobře jako po bezprostředním naučení slov).*

H_1**:** *počet zapamatovaných slov závisí na době pamatování (= době držení slov v paměti).*

Pokud v testovaných skupinách bude například jen v každé pět lidí a vliv se neprokáže, můžeme uzavřít, že H_0 platí, tj. že technika učení je vynikající? Asi ne, protože právě zde bychom se mohli dopustit té chyby, že jsme vliv nenašli, i když je možné, že existuje. Na druhé straně pokud by v každé z testovaných skupin bylo 10000 *lidí a stále by se neprokázala existence závislosti, závěr „H_0 platí“ by asi byl docela rozumný.*

Poznámka B) Snížení rozptylu zvyšuje sílu testu V příkladu 11.5 lze vidět jednu celkem přirozenou skutečnost, že totiž výpovědní síla statistického testu se zvyšuje se zvýšením počtu měření. Pro připomenutí **síla testu** je pozitivní pojem – je to pravděpodobnost, se kterou správně zamítneme H_0, pokud platí H_1. Je to tedy jakási síla nalezení vlivu mezi proměnnými testu. Na tuto sílu má především vliv rozptyl $\sigma^2_{\overline{X}}$ neboli

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{N}. \tag{11.13}$$

Cokoli, co snižuje rozptyl $\sigma^2_{\overline{X}}$, zvyšuje současně i sílu testu. Jedním činitelem je počet měření N – je vidět ze vzorce, že pokud zvyšujeme N, zvyšuje se hodnota jmenovatele ve zlomku, a tím klesá hodnota rozptylu. Další možností, jak snížit rozptyl, je snížit přímo hodnotu rozptylu σ^2 celé populace v čitateli zlomku. Pokud si říkáte, že σ^2 je dáno a nelze je přece měnit, máte pravdu. Ale stejně některé vlivy na rozptyl σ^2 celé populace můžeme vyloučit vhodným naplánováním experimentu.

Příklad 11.6 *Experimentem se má zjistit, zda alkohol v krvi má vliv na reakční dobu řidiče. Náhodně byly vybrány dvě skupiny lidí. První skupině je nabídnut alkohol ve formě ginu s tonikem, druhé skupině pouze tonik. Pak jsou všichni podrobeni měření reakční doby. Testovaný člověk sedí u stolu a před sebou má lampu s červenou žárovkou a tlačítko. Lampa se rozsvěcuje v různých nepravidelných intervalech – jakmile se rozsvítí, je úkolem testovaného co nejrychleji stisknout tlačítko. Je změřena jeho reakční doba (v milisekundách). U každého člověka se měření několikrát opakuje, a pak je vypočten průměr jeho reakční doby.*

Samozřejmě uvnitř každé ze skupin se projeví určitá variabilita v průměrné době reakce. Ta je dána různými faktory, z nichž některé nemůžeme ovlivnit, ale jiné ano. Mezi **neovlivnitelné faktory** *patří:*

1. *Nálada člověka během měření (špatná nálada = delší doba reakce).*
2. *Osobní předpoklady – někdo má prostě schopnost rychlejší reakce než ostatní.*
3. *Postoj člověka vůči experimentu (znuděný postoj = delší doba reakce).*

Mezi **ovlivnitelné faktory** *lze zahrnout*

1. *Teplotu v místnosti, kde se provádí měření (extrémní teploty $\Rightarrow$ delší doba reakce).*
2. *Vlhkost v místnosti, kde se provádí měření (vyšší vlhkost $\Rightarrow$ delší doba reakce).*
3. *Pohlaví (u žen ... kratší doba reakce).*
4. *Věk (vyšší věk ... kratší doba reakce).*
5. *Čas dne (měření pozdě odpoledne ... delší doba reakce).*

Některé faktory rozptylu hodnot můžeme významně ovlivnit – jak výběrem sledované populace (omezení se na stejné pohlaví a věk eliminuje rozdíly způsobené těmito faktory), tak zajištěním stejných podmínek měření (stálá vlhkost a teplota místnosti, měření u všech ve stejnou denní dobu). Tímto způsobem plánování a provedení experimentu pak následný statistický test získá větší výpovědní sílu v těch parametrech, které jsou pro nás důležité, a není zkreslen rozdíly v těch ovlivnitelných faktorech, které nás nezajímají.

11.4 Interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ průměru $\overline{X}$

Kromě statistických testů jsou při zpracování měření často užitečnější tzv. **intervaly spolehlivosti**. V této fázi výkladu se seznámíme s intervalem spolehlivosti pro střední hodnotu $E\overline{X} = \mu$ průměru z normálního rozdělení.

11.4.1 Interval spolehlivosti pro μ při známém rozptylu

Střední hodnotu μ měřené veličiny obyčejně neznáme. Kdybychom ji znali, nemusíme provádět ani měření, ani statistický test Určit μ je v podstatě naším cílem.

Jakýmsi odhadem střední hodnoty je výběrový průměr $\overline{X}$. Ovšem tento průměr (zejména při nižším počtu měření N) není přesně roven střední hodnotě μ – vlastně víme, že platí $P(\overline{X} = \mu) = 0$. Potřebovali bychom spíše najít nějaký interval $(\overline{X} - a; \overline{X} + a)$ pro nějaké vhodné a „ne příliš velké“ $a > 0$. A to bude vlastně interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ. Přesněji řečeno, **r%-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ průměru $\overline{X}$ je takový interval, který obsahuje μ s pravděpodobností $\frac{r}{100}$.**

Příklad 11.7 *Životnost 75-wattové žárovky má normální rozdělení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 25$ hodin. U náhodně vybraného vzorku dvaceti žárovek byla naměřena průměrná životnost $\overline{x} = 1024$ hodin. Utvořte 95%-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ průměrné životnosti.*

Řešení tohoto příkladu je instruktivní, proto si dovolím vypnout kurzívu (:-)). Každý interval spolehlivosti je velmi úzce svázán se statistickým testem. Budeme se zabývat zejména oboustrannými intervaly spolehlivosti, proto v našem příkladu je zde vazba na oboustranný U-test s hypotézami

H_0**:** $\mu = \mu_0$ (skutečnou střední hodnotu μ_0 neznáme).

H_1**:** $\mu \neq \mu_0$.

Pokud hledáme 95%-ní interval spolehlivosti, je příslušná hladina významnosti $\alpha = 0{,}05$. Kritériem testu je výběrový průměr $\overline{X}$. Dále vezmeme v úvahu počet měření pro výpočet průměru:

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{25}{\sqrt{20}} = 5{,}59.$$

Jak je dobře známo ze BMA3, příslušné kritické hodnoty v tomto případě jsou

$$u_{\frac{\alpha}{2}} = -1{,}96, \quad u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$$

Obě tyto hodnoty lze převést na kritické hodnoty vzhledem k veličině $\overline{X}$:

$$-1{,}96 = \frac{\overline{x}_m - \mu_0}{5{,}59} \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_m = \mu_0 - 1{,}96 \cdot 5{,}59 = \mu_0 - 10{,}96;$$

$$1{,}96 = \frac{\overline{x}_v - \mu_0}{5{,}59} \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_v = \mu_0 + 1{,}96 \cdot 5{,}59 = \mu_0 + 10{,}96.$$

Interval pro „nezamítnutí H_0“ je pak

$$\overline{X} \in (\mu_0 - 10{,}96; \mu_0 + 10{,}96)\,. \tag{11.14}$$

Ovšem hodnotu μ_0 neznáme. Ale pokud ze vzorce 11.14 vyjádříme místo $\overline{X}$ hodnotu μ_0, dostaneme vztah pro interval spolehlivosti:

$$\mu_0 \in \left(\overline{X} - 10{,}96; \overline{X} + 10{,}96\right). \tag{11.15}$$

Odtud pro jednu realizaci $\overline{x} = 1024$ dostaneme

$$\mu_0 \in (1024 - 10{,}96; 1024 + 10{,}96) = (1013{,}04; 1034{,}96),$$

se spolehlivostí 0,95, což je odpověď příkladu 11.7. **Obecně s využitím symetrie**

$$u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

lze $(1-\alpha)\cdot 100$**%-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu** μ **při známém rozptylu psát ve tvaru**

$$\mu \in \left(\overline{X} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}}; \overline{X} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}}\right). \tag{11.16}$$

V některé literatuře se objevuje kromě pojmu „interval spolehlivosti“ ještě pojem „konfidenční interval“ – to je jen nesprávný (nebo jiný) překlad anglického termínu „confidence interval“, ale jedná se o totéž (překladatelé se zase jednou nedomluvili ... :-)).

Pojem intervalu spolehlivosti úzce souvisí se silou příslušného statistického testu – jak už to vyplývá ze vzorce 11.16, čím větší je síla příslušného statistického testu, tím menší je rozptyl $\sigma^2_{\overline{X}}$, a tím užší je interval spolehlivosti.

11.4.2 Interval spolehlivosti pro μ při neznámém rozptylu

Příklad 11.8 *Uvažujme stejnou situaci jako v příkladu 11.7 ($N = 20$, $\overline{x} = 1024$), pouze odchylka σ není známá a musíme ji odhadnout – tedy z měření životnosti u dvaceti žárovek byl vypočten rozptyl $\overline{s^2} = 625$. Odtud*

$$est\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\overline{s^2}}{N} = \frac{625}{20} = 31{,}25.$$

Tedy $est\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{31{,}25} = 5{,}59$ – toto číslo je stejné jako v příkladu 11.7, ovšem nyní se nejedná o přesnou hodnotu, ale odhad, čili zde bude $\nu = N - 1 = 19$ stupňů volnosti odhadu. Nalezněte 95%-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ výběrového průměru $\overline{X}$.

V příslušném statistickém testu použijeme nyní t-rozdělení – nalezneme kritické hodnoty pro oboustanný test ($\alpha = 2q = 0{,}05$) a pro $\nu = 19$ stupňů volnosti (tabulka 11.12): $t_v = 2{,}093$, odtud $t_m = -2{,}093$.

Hypotézy H_0, H_1 a kritérium oboustranného testu zde zůstávají stejné jako v 11.7: $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$, kritériem je výběrový průměr $\overline{X}$. Přepočteme nyní kritické hodnoty vzhledem k veličině $\overline{X}$:

$$-2{,}093 = \frac{\overline{x}_m - \mu_0}{5{,}59} \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_m = \mu_0 - 2{,}093 \cdot 5{,}59 = \mu_0 - 11{,}7;$$

$$2{,}093 = \frac{\overline{x}_v - \mu_0}{5{,}59} \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_v = \mu_0 + 2{,}093 \cdot 5{,}59 = \mu_0 + 11{,}7.$$

Nyní interval pro „nezamítnutí H_0“ je

$$\overline{X} \in (\mu_0 - 11{,}7; \mu_0 + 11{,}7)\,, \tag{11.17}$$

nás ovšem zajímá spíše tvar (rychle jej naň převedem)

$$\mu_0 \in \left(\overline{X} - 11{,}7; \overline{X} + 11{,}7\right). \tag{11.18}$$

Odtud pro příklad 11.8 se spolehlivostí 0,95 a realizaci (= konkrétní měření) průměru $\overline{x} = 1024$ dostaneme

$$\mu_0 \in (1024 - 11{,}7; 1024 + 11{,}7) = (1012{,}3; 1035{,}7),$$

Vidíme, že při větší míře nejasnosti, kdy rozptyl neznáme a musíme jej odhadnout, je interval spolehlivosti širší (ostatní hodnoty v příkladech 11.7 a 11.8 jsou stejné, takže lze opravdu provést porovnání).

Obecně s využitím symetrie

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

lze $(1-\alpha)\cdot 100$%-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ při neznámém rozptylu psát ve tvaru

$$\mu \in \left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot est\sigma_{\overline{X}}; \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot est\sigma_{\overline{X}}\right). \tag{11.19}$$

11.4.3 Několik důležitých poznámek k intervalům spolehlivosti

Následuje několik poznámek k intervalům spolehlivosti, každá z nich je důležitější než ty ostatní ... :-)

a) **Vztah mezi intervalem spolehlivosti a pravděpodobností.** Je potřeba říci něco velmi důležitého k formulaci „95%-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ obsahuje tuto hodnotu s pravděpodobností 0,95“. Věta je vyslovena správně ale může být zavádějící – a problém pochopení souvisí s pojmem **statistika** a **realizace statistiky** (viz definice 11.2). Interval spolehlivosti je totiž vlastně intervalem, jehož mezemi jsou náhodné veličiny. A pak pro konkrétní měření dosadíme do vzorců 11.16, 11.19 konkrétní realizaci $\overline{x}$. Třeba v příkladu 11.7 interval $(1013{,}04; 1034, 96)$ neznámou střední hodnotu μ buď obsahuje (stoprocentně), nebo neobsahuje (stoprocentně).

Souvislost s pravděpodobností se projeví pouze při opakovaném měření a opakované konstrukci realizace intervalu spolehlivosti: pokud bychom například tisíckrát zopakovali experiment změření životnosti u dvaceti žárovek, spočetli tisíc různých realizací $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2 \dots$, $\overline{x}_{1000}$ a sestrojili tisíc různých realizací intervalu spolehlivosti podle vzorce 11.16, tak přibližně 95% těchto intervalů (tj. asi 950 z nich) bude neznámou hodnotu μ obsahovat, zbylých pět procent ji obsahovat nebude.

V dalších výpočtech realizací intervalů spolehlivosti pro $\overline{x}$ budu slovo „realizace“ vynechávat, takže pojem **interval spolehlivosti** se středem v $\overline{X}$ (středem intervalu je nikoli konkrétní hodnota, ale náhodná veličina) bude splývat s pojmem **realizace intervalu spolehlivosti** se středem v $\overline{x}$ (středem intervalu je konkrétní číslo). Matematicky je mezi těmito dvěma pojmy rozdíl, ale v praxi pod intervalem spolehlivosti máme na mysli vždy konkrétní interval vypočtený na základě měření. !!!! :-)

b) **Jednostranné intervaly spolehlivosti.** Pozorný čtenář by možná mohl položit otázku: no dobrá, oboustranný interval spolehlivosti odpovídá jistému oboustrannému statistickému testu (příklad 11.7) – pokud se ale týká jednostranných testů (například test grafické iluze 11.3), existuje také u nich nějaký analogický jednostranný interval spolehlivosti? Odpověď zní „ano, existuje“. Jeho odvození je analogické, proveďme jej například pro data testu grafické iluze 11.3:

$H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$, kritériem je $\overline{X}$, kritickou hodnotu použijeme přesně tu stejnou jako v daném pravostranném testu: $t_k = 2{,}132$. Převodem normovaného tvaru kritické hodnoty do tvaru aktuálního vzhledem k veličině $\overline{X}$ dostaneme

$$2{,}132 = \frac{\overline{x}_k - \mu_0}{1} \quad \Rightarrow \overline{x}_k = \mu_0 + 2{,}132 \cdot 1 = \mu_0 + 2, 132;$$

tedy interval pro „nezamítnutí H_0“ je

$$\overline{X} \in (-\infty; \mu_0 + 2{,}132), \tag{11.20}$$

ale protože nás zajímá spíše interval pro μ_0, tak z tohoto vztahu vyjádříme ohraničení pro μ_0 a index 0 vypustíme:

$$\mu \in (\overline{X} - 2{,}132; \infty) = (5{,}868; \infty) \tag{11.21}$$

a to je hledaný interval se spolehlivostí 0,95. Vidíme, že **oboru 11.20 pravostranného testu odpovídá levostranný interval spolehlivosti 11.21**.

I když jsou tedy jednostranné intervaly spolehlivosti zcela přirozené a možné, v dalším textu se na ně nebudeme příliš zaměřovat – spíše nás bude zajímat vymezení pro μ na intervalu konečné délky. Tedy i když budeme provádět jednostranné statistické testy, intervaly spolehlivosti budeme hledat na základě příslušného oboustranného testu se stejnou hladinou významnosti.

Tak tedy i v příkladu 11.3 lze sestrojit oboustranný interval spolehlivosti: Pro $\nu = 4$ je kritická hodnota rovna

$$t_{1-\frac{0{,}05}{2}}(4) = 2{,}776;$$

Pak (vzorec 11.19):

$$\mu \in (8 - 2{,}776 \cdot 1; 8 + 2{,}776 \cdot 1) = (5{,}224; 10{,}776).$$

c) **Vztah mezi intervalem spolehlivosti a statistickým testem.** Mezi výsledkem statistického testu a intervalem spolehlivosti existuje jednoznačný vztah:

Statistický test zamítne hypotézu $H_0 : \mu = \mu_0$ právě tehdy, když μ_0 nenáleží do příslušného intervalu spolehlivosti

Třeba pokud bychom v situaci příkladu 11.7 testovali hypotézu $H_0 : \mu = 1000$, místo abychom prováděli test, stačí se podívat na příslušný interval spolehlivosti oboustranného testu: $1000 \notin (1013{,}04; 1034{,}96)$, tj. to znamená, že příslušný statistický test zamítne hypotézu H_0.

Nebo podíváme-li se na příklad pravostranného testu 11.3, kde $H_0 : \mu = 6$, vidíme, že $6 \in (5{,}868; \infty)$ (levostranný interval spolehlivosti vypočten v předchozí poznámce b)), tj. to znamená, že hypotéza H_0 příslušného jednostranného testu nebude zamítnuta.

d) **Interval spolehlivosti uvádí více informací než statistický test.** Omlouvám se za další členění, ale budu prezentovat tuto poznámku ve čtyřech myšlenkách:

1. Výsledek statistického testu není přesně to, co bychom chtěli znát. Ve skutečnosti chceme znát míru platnosti hypotézy H_1, je-li dán výsledek experimentu – ovšem místo toho se ze statistického testu dovídáme pravděpodobnost výsledku experimentu za předpokladu platnosti hypotézy

H_0 (a stále neznáme **míru platnosti** H_1, a to ani v případě, kdy je H_0 zamítnuto).

2. Statistický test nám ve svém výsledku nedává informaci o rozsahu studovaného vlivu, kdežto interval spolehlivosti ano. Informace o umístění střední hodnoty μ je ve statistických testech, které jsme dosud prováděli, skryta, ale interval spolehlivosti činí tuto informaci zjevnou a překládá ji do srozumitelného měřítka.

   Například test 11.3 pouze prohlásí, že se nenašlo dostatek důkazů pro vliv grafické iluze na μ. Ale interval spolehlivosti (nyní už spíše ten oboustranný, tj. pro $\alpha = 0{,}05$ byl odvozen v poznámce b)) $(5{,}224; 10{,}776)$ navíc naznačuje, že se spolehlivostí 0,95 by střední hodnota místo šesti mohla být stejně dobře rovna i osmi nebo deseti, ale už ne jedenácti nebo dvanácti.

3. Statistický test zdůrazňuje chybu prvního druhu, ale říká velmi málo o chybě druhého druhu. Na druhé straně interval spolehlivosti naznačuje i chybu druhého druhu – pokud α necháme pevné a zmenšujeme β, tak interval spolehlivosti zmenšuje svou délku.

4. Závěr: Z uvedených důvodů je lepší používat intervaly spolehlivosti spíše než jen pouhé testování hypotéz. Někdy statistické zpracování v literatuře příliš zdůrazňuje testy a zapomíná dodat užitečné informace navíc, které lze snadno vyčíst z intervalů spolehlivosti.

11.5 t-test typu „$\mu_1 = \mu_2$“

11.5.1 Párový test

V tomto oddílu se budeme zabývat statistickými testy při experimentech, kde získáváme dva soubory měření. Zde je potřeba si dát pozor na vztah mezi těmito dvěma soubory (= skupinami) měření, na základě tohoto vztahu rozlišujeme totiž dva typy statistického testu – párový a nepárový test. Párovým testem se budeme zabývat nejdříve – spočívá v tom, že sice získáme dvě skupiny (= dva soubory) měření, ale tyto soubory jsou navzájem těsně svázány v tom smyslu, že ke každé hodnotě v prvním souboru měření lze jednoznačně přiřadit tzv. párovou hodnotu měření ze druhého souboru. Zejména to taky znamená, že počet měření v obou souborech je stejný – a v podstatě bychom mohli říct, že místo dvou souborů měření máme jediný soubor, ve kterém jedna položka je reprezentována uspořádanou dvojicí hodnot.

Párový test tedy užijeme v situaci, kdy sice máme k dispozici dva soubory měření, ale tyto dva soubory měření jsou spolu těsně svázány – obyčejně tak, že v obou skupinách jsou hodnoceni stejní jedinci; nejprve provedeme měření vybrané skupiny jedinců za systému podmínek A, a pak provedeme měření téže skupiny jedinců za systému podmínek B. Proto se tomuto typu experimentů také říká **experiment opakovaného měření**. Další vhodný název je zde experiment typu **„jedna skupina dvakrát“**, protože jedna skupina jedinců je podrobena měření při dvou různých situacích.

Příklad 11.9 *Chceme experimentem zjistit, jak se změní počet úderů srdce člověka za minutu po vypití šálku kávy (studujeme vliv kofeinu na činnost srdce). Kdybychom k tomuto experimentu přistupovali „nepárovým“ přístupem a vybrali náhodně dvě skupiny lidí, z nichž jedna by vypila kávu s kofeinem a druhá kávu bez kofeinu, do měření by byl zanesen jistý rozptyl způsobený tím, že tempo srdečních úderů se liší u různých lidí.*

Mnohem vhodnější je zde experiment opakovaného měření, kdy jedna a táž skupina vybraných lidí je vystavena měření po kávě bez kofeinu, a pak po kávě s kofeinem. Potom se vypočte rozdíl obou hodnot vždy u téhož člověka a testuje se, zda je tento rozdíl významný. Byla získána následující data počtu srdečních úderů za minutu u devíti lidí (na každém řádku jsou hodnoty měření jednoho člověka):

x_{i1} *bez kofeinu*	x_{i2} *s kofeinem*	*rozdíl* $x_{i2} - x_{i1}$
70	*76*	*6*
60	*61*	*1*
49	*52*	*3*
72	*71*	*-1*
70	*81*	*11*
66	*70*	*4*
55	*55*	*0*
54	*61*	*7*
80	*89*	*9*

První dva sloupečky tabulky představují dva soubory měření párového testu. My ovšem budeme dále pracovat jen s jednorozměrným souborem, a sice s vektorem rozdílů měření ve třetím sloupci. To znamená, že párový test vlastně odpovídá situaci jednorozměrného souboru měření (= oddílu 11.2).

Spočteme průměr $\overline{x} = 4{,}44$ a odhadneme rozptyl pomocí $\overline{s^2}$. Aby čtenář neměl pocit, že v oddílu 11.5 nebude vzhledem k 11.2 nic nového, vypočteme $\overline{s^2}$ pomocí pátého možného vzorce, který jsme si ještě neuváděli:

$$\overline{S^2} = \frac{SS}{\nu} \tag{11.22}$$

(ono se vlastně jedná o vzorec 11.12, ovšem ve jmenovateli vzorce je ν místo $N-1$). Dále do čitatele za SS dosadíme ze vzorce 11.11, který zkombinujeme s nejpohodlnějším způsobem výpočtu 11.8:

$$SS = N \cdot S^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \right) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \right)^2}{N},$$

čili pak pro realizaci ss platí

$$ss = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right)^2}{N}, \tag{11.23}$$

a po dosazení

$$ss = 314 - \frac{40^2}{9} = 136{,}22.$$

Počet stupňů volnosti pro odhad rozptylu je $\nu = N - 1 = 8$, a tedy

$$\overline{s^2} = \frac{ss}{\nu} = 17{,}03.$$

a) Sestrojme nyní 95**%-ní interval spolehlivosti** pro μ: t_k najdeme jako průsečík řádku $\nu = 8$ a sloupce $2q = \alpha = 0{,}05$ (oboustranný interval spolehlivosti vychází z oboustranného testu): $t_k = 2{,}306$. Pak interval pro μ se spolehlivostí 0,95 je

$$\overline{x} \pm \sqrt{\frac{\overline{s^2}}{N}} \cdot t_k(\nu = 8) = 4{,}44 \pm \sqrt{\frac{17{,}03}{9}} \cdot 2{,}306 = (1{,}27; 7{,}61).$$

Z tohoto intervalu spolehlivosti se dovídáme, že kofein zvyšuje činnost srdce, a sice o 1,27 až o 7,61 úderů za minutu.

b) Provedeme i statistický t-test:

(K1) H_0: $\mu = 0$ (rozdíl hodnot je nulový, tj. počet úderů srdce za minutu je stejný s kofeinem i bez kofeinu – srdeční tep nezávisí na kofeinu);
H_1: $\mu \neq 0$.

(K2) Testovým kritériem bude výběrový průměr $\overline{X}$, respektive jeho normovaná hodnota $\frac{\overline{X}-0}{est\ \sigma_{\overline{X}}}$.

(K3) $\overline{s^2} = 17{,}03 \Rightarrow$

$$est\ \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\overline{s^2}}{N} = \frac{17{,}03}{9} = 1{,}89 \Rightarrow est\ \sigma_{\overline{X}} = \sqrt{1{,}89} = 1{,}37.$$

Tj. za předpokladu platnosti H_0 má veličina $\frac{\overline{X}-0}{1{,}37}$ Studentovo t-rozdělení s $\nu = 8$ stupni volnosti.

(K4) $t_k = \pm 2{,}306$ je u oboustranného testu stejné jako u intervalu spolehlivosti a).

(K5) Příslušná t-hodnota je

$$\frac{4{,}44 - 0}{1{,}37} = 3{,}24 > 2{,}306,$$

a tedy zamítáme H_0 o nezávislosti, je potvrzen vliv kofeinu na zvýšení srdečního tepu.

Hypotézy H_0 nejsou pravdivé téměř nikdy (pokud uvažujeme větší počet desetinných míst), tj. zamítnutí H_0 nám nic podstatného neříká. Spíše nás zajímalo, jak velký je vliv kofeinu, a to jsme se dozvěděli z intervalu spolehlivosti.

11.5.2 Nepárový test

Nyní se pojďme věnovat **nepárovému testu** neboli zpracování dat při experimentu typu **„dvě skupiny jednou"**.

Příklad 11.10 *Chceme zjistit kvalitu jisté techniky pamatování. Náhodně jsme vybrali deset lidí a rozdělili do dvou skupin po pěti lidech. Skupina* 1 *(tzv. experimentální skupina) se naučila* 100 *zadaných slov novou technikou, skupina* 2 *(kontrolní skupina … zažitý nesprávný překlad anglického „control group", správný význam překladu je „řízená skupina", protože „control"= řídit, vést, nikoli kontrolovat) použila obyčejnou klasickou techniku zapamatování. Po týdnu se vyzkouší, kolik si kdo pamatuje z daných* 100 *slov – jsou získána data*

experimentální skupina	*kontrolní skupina*
43	*16*
37	*22*
51	*24*
27	*30*
32	*18*

Nyní data na jednom řádku spolu nijak nesouvisí, jedná se o měření u dvou různých lidí. Zdá se, že experimentální skupina má lepší výsledky, ale musíme statisticky prokázat, že to není způsobeno pouze náhodnými vlivy.

V každé ze skupin vypočteme průměr a odhadneme rozptyl.

skupina 1: $\overline{x}_1 = 38$, podle vzorce 11.23 $ss_1 = 352$, $\nu_1 = 4$, a tedy podle 11.22

$$est_1\ \sigma^2 = \overline{s_1^2} = \frac{352}{4} = 88.$$

skupina 2: $\overline{x}_2 = 22$, podle vzorce 11.23 $ss_2 = 120$, $\nu_2 = 4$, a tedy podle 11.22

$$est_2\ \sigma^2 = \overline{s_2^2} = \frac{120}{4} = 30.$$

No a teď přicházíme k úvahám, které jsou pro další vývoj (i další kapitolu) důležité. V situaci experimentu typu „dvě skupiny jednou" je potřeba se vypořádat se dvěma typy rozptylu, kterými jsou – **vnitřní rozptyl** a **vnější rozptyl**.

vnitřní rozptyl: Jedná se o rozptyl představující vzájemnou rozdílnost jedinců v celé populaci (např. rozdílnost lidí, rozdílnost různých součástek stejného typu, apod.). V tomto textu se budeme převážně zabývat situacemi, kdy je splněn tzv. **princip homogenního vnitřního rozptylu: jakýkoliv experiment nemá vliv na rozptyl rozdělení celé populace, z níž byla náhodně vybrána skupina jedinců pro měření**.

Slovy našeho příkladu, rozdílnost výsledků est_1 způsobená růzností lidí ve skupině 1 je přibližně stejná jako rozdílnost výsledků est_2 způsobená růzností lidí ve skupině 2. Jinak řečeno, ať už měříte daný soubor měření za jakékoli podmínky, „rozmanitost" těchto měření je v dané skupině přibližně stejná.

Z Tohoto principu homogenního rozptylu tedy plyne, že odhady est_1, est_2 jsou odhady jednoho a stejného vnitřního rozptylu σ^2 (díky tomu jsem u písmenka σ o pár řádků výše už nepsal žádný index), který vypočteme jako aritmetický průměr obou odhadů:

$$est\ \sigma^2 = \frac{est_1\ \sigma^2 + est_2\ \sigma^2}{2} = \frac{88+30}{2} = 59.$$

Tedy nejlepší možný odhad vnitřního rozptylu σ^2 je roven 59 a v dalším budeme pracovat s ním. Počet stupňů volnosti je $\nu = 4 + 4 = 8$, protože jsme tento odhad získali pomocí dvou jiných odhadů o počtu stupňů volnosti 4 – stupně volnosti ve výsledném odhadu sečítáme.

vnější rozptyl: Jedná se o **rozptyl vyjadřující rozdílnost mezi danými podmínkami měření**. Tento rozptyl v případě dvou souborů měření lze odhadnout na základě průměrů $\overline{x}_1 = 38$, $\overline{x}_2 = 22$. Způsob je následující: Vypočteme rozptyl těchto dvou průměrů podle vzorců 11.23 a 11.22: Protože $\nu = 2 - 1 = 1$, máme

$$est\ r_N = \frac{ss}{1} = \frac{38^2 + 22^2 - \frac{60^2}{2}}{1} = 128.$$

Ale to ještě není všechno – tento odhad je odhadem rozptylu průměru pěti hodnot ($N = 5$). Abychom získali odhad rozptylu jediné hodnoty měření, musíme v souladu se vzorcem $est\ r_N = \frac{est\ r}{N}$ (analogie vzorce 11.13) počítat

$$est\ r = N \cdot est\ r_N = 5 \cdot 128 = 640.$$

celkový rozptyl: Aby byla plejáda přehledu rozptylů úplná, je možné si položit následující otázku – co se vlastně spočítá, když budeme považovat všech deset hodnot za měření jediné veličiny a vypočteme $\overline{s^2}$ ze všech deseti měření? Podle logiky výpočtu by to měl být jakýsi celkový rozptyl – a skutečně je tomu tak.

Průměr všech deseti hodnot je $\overline{x} = 30$, což je mimochodem aritmetický průměr hodnot $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$. Bude tedy podobně hodnota $\overline{s^2}$ průměrem hodnot $\overline{s_1^2}$, $\overline{s_2^2}$?

Podle vzorce 11.23 $ss = 1112$, a tedy podle 11.22

$$\overline{s^2} = \frac{ss}{\nu} = \frac{1112}{9} \doteq 123{,}56,$$

což není hodnota rovná součtu $\overline{s_1^2} + \overline{s_2^2} = 88 + 30 = 118$. Ještě méně se zdá, že by odhad celkového rozptylu 123,56 byl součtem odhadu vnitřního rozptylu 59 a odhadu vnějšího rozptylu 640 – ale přesto zde platí jisté součtové vzorce:

a) Celkový počet stupňů volnosti 9 u odhadu celkového rozptylu je součtem volnosti 8 u odhadu vnitřního rozptylu a volnosti 1 u odhadu vnějšího rozptylu.

b) Celkový součet čtverců 1112 je součtem součtu čtverců 472 vnitřního rozptylu (který vznikl součtem $ss_1 = 352$ a $ss_2 = 120$) a 640 u vnějšího rozptylu.

Tolik přehled a jemné intro do problematiky rozptylu – více na to téma nebude prostor, ale čtenáři by se s tématem setkali při už zmiňované analýze rozptylu (ANOVA), která se používá až tehdy, když skupiny měření jsou tři a více. Nyní se vraťme k řešení našeho příkladu.

Odhad vnitřního rozptylu je est $\sigma^2 = 59$, *odtud odhad rozptylu průměru*

$$est\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{59}{5} = 11{,}8.$$

Nyní lze užitím 11.19 určit např. 95%-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu průměru v každé ze skupin měření: Pro $t_k(\nu = 8; \alpha = 2q = 0{,}05) = 2{,}306$

$$\mu_1 \in 38 \pm \sqrt{11{,}8} \cdot 2{,}306 \doteq (30{,}08; 45{,}92),$$

$$\mu_2 \in 22 \pm \sqrt{11{,}8} \cdot 2{,}306 \doteq (14{,}08; 29{,}92).$$

V souvislosti se statistickým testem tohoto příkladu nás ovšem spíše zajímá interval spolehlivosti pro střední hodnotu veličiny $\overline{X_1} - \overline{X_2}$. *Střed intervalů spolehlivosti bude v tomto případě* $\overline{x_1} - \overline{x_2} = 38 - 22 = 16$, *odhad rozptylu je*

$$est\ \sigma^2_{\overline{X_1} - \overline{X_2}} = est\ \sigma^2_{\overline{X_1}} + est\ \sigma^2_{\overline{X_2}} = \frac{59}{5} + \frac{59}{5} = 23{,}6.$$

Tedy pro $t_k(\nu = 8; \alpha = 2q = 0{,}05) = 2{,}306$

$$\mu_1 - \mu_2 \in 16 \pm \sqrt{23{,}6} \cdot 2{,}306 \doteq 16 \pm 11{,}2 = (4{,}8; 27{,}2).$$

Protože výsledný interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot neobsahuje nulu, víme také, že příslušný statistický test zamítne hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. *A skutečně, pojďte se přesvědčit:*

(K1) H_0*:* $\mu_1 = \mu_2$ *(střední hodnoty obou skupin ohodnocení jsou stejné, tj. nová technika zapamatování ovlivňuje výsledek přibližně stejně jako ta dřívější).*
H_1*:* $\mu_1 \neq \mu_2$ *(nová technika zapamatování má přibližně stejné výsledky jako dřívější technika).*

(K2) *Testovým kritériem bude rozdíl* $\overline{X_1} - \overline{X_2}$.

(K3) *Při platnosti* H_0 *má veličina*

$$\frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - 0}{\sqrt{est\ \sigma^2_{\overline{X_1} - \overline{X_2}}}} = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{23{,}6}}$$

Studentovo t*-rozdělení pro* $\nu = 8$.

(K4) *Pro* $\alpha = 0{,}05$ *příslušná kritická hodnota* t_k *je na průsečíku řádku* $\nu = 8$ *a sloupce pro* $\alpha = 2q = 0{,}05$*, tj.* $t_k = 2{,}306$.

(K5) $\frac{38-22}{4{,}858} = 3{,}29 \notin (-t_k; t_k)$. H_0 *tedy zamítáme – nová technika významně zvyšuje úroveň zapamatování.*

Příklad 11.11 *Psychologové fyziologie chtějí experimentem ověřit, že podvěsek mozkový je hlavním řídícím centrem sexuálního chování. Rozhodli se získat dvacet dobrovolníků z řad studentů, kteří by se chtěli podrobit operaci mozku. Protože žádní dobrovolníci se nepřihlásili (zejména do experimentální skupiny), byly náhodně vybrány dvě skupiny po deseti krysách.*

Krysám z experimentální skupiny byl operací odebrán podvěsek mozkový. Krysám z kontrolní skupiny byla pouze otevřena lebka, ale nic nebylo odebráno (aby byl snížen rozptyl způsobený otevřením lebky).

Protože operaci prováděl nezkušený operatér, některé z krys zahynuly přímo na operačním stole. V experimentální skupině přežilo pět krys, v kontrolní skupině sedm. Psycholové byli rozmrzelí nad nezkušeným studentem, ale pokračovali dále v experimentu. Byla získána data o počtu pohlavních spojení v průběhu jistého časového intervalu. V experimentální skupině ($N_1 = 5$*):* $0, 1, 4, 4, 1$. *Odtud* $\overline{x_1} = 2$, $ss_1 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{N_1} = 14$, $\nu_1 = N_1 - 1 = 4$, *pak* $\overline{s_1^2} = \frac{ss_1}{\nu_1} = \frac{14}{4} = 3{,}5$.

V kontrolní skupině ($N_2 = 7$*):* $5, 7, 4, 3, 4, 6, 6$. *Odtud* $\overline{x_2} = 5$, $ss_2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{N_2} = 12$, $\nu_2 = N_2 - 1 = 6$, *pak* $\overline{s_2^2} = \frac{ss_2}{\nu_2} = \frac{12}{6} = 2$.

Odhad vnitřního rozptylu: Podobně jako u předchozího příkladu (vyjdeme z platnosti principu homogenního rozptylu), i nyní vypočteme jakýsi jeden odhad rozptylu jako průměr odhadů $\overline{s_1^2}$, $\overline{s_2^2}$ *– nebude se jednat ovšem o aritmetický průměr, ale o tzv.* **vážený průměr**. *Protože odhad* $\overline{s_2^2}$ *byl sestaven na základě většího počtu stupňů volnosti (většího počtu měření), budeme mu přikládat větší váhu:*

$$est\ \sigma^2 = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2} \cdot \overline{s_1^2} + \frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \cdot \overline{s_2^2} \tag{11.24}$$

V našem příkladu est $\sigma^2 = \frac{4}{10} \cdot 3{,}5 + \frac{6}{10} \cdot 2 = 2{,}6$. *Pak intervaly spolehlivosti pro jednotlivé střední hodnoty a* $t_k(\nu = 10, \alpha = 2q = 0{,}05) = 2{,}228$ *jsou*

$$\mu_1 \in 2 \pm \sqrt{\frac{2{,}6}{5}} \cdot 2{,}228 \doteq 2 \pm 1{,}61 = (0{,}39; 3{,}61);$$

$$\mu_2 \in 5 \pm \sqrt{\frac{2{,}6}{7}} \cdot 2{,}228 \doteq 2 \pm 1{,}36 = (3{,}64; 6{,}36).$$

Intervaly nemají společný průnik, což znamená, že testovaná hypotéza o rovnosti středních hodnot bude zamítnuta. Dále je možné si všimnout, že interval spolehlivosti pro μ_2 *má menší délku než interval pro* μ_1 *– to je dáno větším počtem měření ve druhé skupině, pak totiž ve druhé skupině při odhadu rozptylu průměru dělíme sedmi, nikoli pěti.*

V testu, který bude následovat, budeme používat rozdělení $\overline{X_1} - \overline{X_2}$. Pokud bychom chtěli najít 95%-ní interval spolehlivosti pro rozdíl $\mu_1 - \mu_2$, použijeme střed $\overline{x_1} - \overline{x_2} = 2 - 5 = -3$ a odhad rozptylu

$$est\ \sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = est\ \sigma^2_{\overline{X_1}} + est\ \sigma^2_{\overline{X_2}} = \frac{2{,}6}{5} + \frac{2{,}6}{7} \doteq 0{,}891.$$

Pak

$$\mu_1 - \mu_2 \in -3 \pm \sqrt{0{,}891} \cdot 2{,}228 \doteq -3 \pm 2{,}1 = (-5{,}1; -0{,}9).$$

Příslušný statistický test:

(K1) *H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (odstranění podvěsku mozkového nemá vliv na sexuální chování);*
H_1: $\mu_1 < \mu_2$ (odstranění podvěsku mozkového povede ke snížení sexuální aktivity).

(K2) *Testovým kritériem bude veličina $\overline{X_1} - \overline{X_2}$.*

(K3) *Při platnosti H_0 má veličina*

$$\frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - 0}{\sqrt{est\ \sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}} = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{0{,}891}}$$

Studentovo t-rozdělení pro $\nu = 10$.

(K4) *Pro $\alpha = 0{,}05$ příslušná kritická hodnota t_k je na průsečíku řádku $\nu = 10$ a sloupce pro $\alpha = q = 0{,}05$, tj. $t_k = 1{,}812$.* **Pozor, intervaly spolehlivosti budeme vždy konstruovat pro $\alpha = 2q$, ovšem u jednostranného statistického testu musíme vzít hodnotu t_k pro $\alpha = q$!!**

(K5) *Odpovídající t-hodnota kritéria je $\frac{-3}{\sqrt{0{,}891}} = -3{,}178 \notin (-t_k; t_k)$. H_0 tedy zamítáme.*

11.6 Předpoklady použitelnosti parametrických testů

Při odvozování testů (zejména t-testu – odvození je mimo rámec tohoto kursu) muselo být učiněno několi předpokladů:

1. Naměřené hodnoty x_i jsou navzájem nezávislé (= předpoklad nezávislosti) – například předpoklad nezávislosti v příkladu 11.10 je porušen, pokud členové skupiny podvádějí a opisují jeden od druhého.

2. Měřená veličina má normální rozdělení (= předpoklad normality).

3. Rozptyl uvnitř experimentální skupiny je stejný jako rozptyl uvnitř kontrolní skupiny, tj. oba rozptyly jsou odhadem stejného (vnitřního) rozptylu σ^2 celé populace (= princip homogenního rozptylu).

Testy, které splňují uvedené tři předpoklady, se nazývají **parametrické testy**. Pokud některý z předpokladů není splněn, kritérium použité v testu nemá rozdělení t (nebo U, pokud známe rozptyl σ^2), a tudíž nelze určit kritické hodnoty – pro srovnání středních hodnot se v tom případě užívají tzv. **neparametrické testy**. Na tu v tomto kursu už nebude moc prostoru – jsou to například Mannův-Whitneův test, Friedmanův test, Wilcoxonův test, znaménkový test, Kruskalův-Wallisův test, Spearmanův test korelace a další.

Úplná diskuse použitelnosti parametrických testů U, t (a v následující kapitole testu F) je mimo rámec tohoto kursu. Ovšem následující poznámky mohou být důležitým vodítkem, který pro běžného „uživatele“ statistiky dostačuje:

a) Mějte se na pozoru pouze tehdy, když t-hodnota kritéria je blízká hodnotě t_k. Přepoklady by musely být porušeny velmi hrubě, aby například při jednostanném testu pro $\alpha = 0{,}05$ kritická hodnota t_k „usekla“ ve skutečnosti významně více než 5% obsahu podgrafu hustoty t – i při porušených předpokladech tato kritická hodnota většinou usekne 6 nebo 7 procent, a nikoli třeba 15 procent obsahu. Proto **pokud t-hodnota kritéria přesáhne hodnotu t_k výrazně, je rozhodnutí zamítnout H_0 celkem bezpečné**.

b) Zkontrolujte své rozdělení. Nákres histogramu rozdělení je užitečný jak pro ověření předpokladu normality, tak ověření principu homogenního rozptylu.

c) Porovnejte $\overline{s_1^2}$ a $\overline{s_2^2}$. pokud se hodnoty obou odhadů liší výrazně, znamená to porušení předpokladu homogenního rozptylu. Ale pokud podíl těchto odhadů je menší než 4 při přibližně stejné délce obou souborů měření, není třeba dělat paniku.

d) Porušení předpokladů nemá takový dopad, pokud $N_i \geq 20$ a $N_1 \doteq N_2$.

e) Pozor na porušení měřítka. Některé proměnné jsou bezproblémové, např. $X =$ průměrná rychlost (v km za hodinu), protože rozsah stupnice 10 až 20 km má stejnou váhu jako rozsah 70km až 80km.

Ale existují pochybné proměnné v tom smyslu, že měřítko porušují – například $Y =$ ohodnocení otázky v dotazníku počtem bodů ze stupnice 1 až 7. Zde totiž rozsah 3 až 4 body nemusí být ekvivalentní rozsahu stupnice 6 až 7 bodů. Taková stupnice je hodně subjektivní, nemá pevně vymezený absolutní přírůstek, a proto může vést ke zkreslenému tvaru rozdělení.

f) Pokud některý z předpokladů je porušen do té míry, že U-test nebo t-test nelze použít, je možné zkusit neparametrické testy.

11.7 Shrnutí

Tato kapitola je klíčovou kapitolou z kapitol 10,11,12, protože obsahuje nejčastěji prováděný test porovnání dvou souborů měření – t-test – a také odvozuje a ilustruje význam intervalů spolehlivosti.

Úvodem v oddílu 11.1 jsou zopakovány některé vzorce, zejména vzorce pro $\overline{X}$, S^2 – a dále je vysvětlen a odvozen vzorec pro $\overline{S^2}$ jako nejlepší nestranný odhad neznámého rozptylu σ^2 normálního rozdělení.

t-test používáme v situacích analogických U- testu (= u veličiny s normálním rozdělením) s tím jediným rozdílem, že totiž není znám rozptyl $\sigma^2_{\overline{X}}$ a musíme jej odhadnout pomocí $\frac{\overline{S^2}}{N}$. Pro odhad rozptylu průměru je důležitý zejména vzorec 11.13, na který je potřeba nezapomenout.

Celá kapitola předpokládá, že čtenář už ví, co je to statistický test – přesto ty důležité informace ohledně statistických testů opakuje (poznámky 11.3 objasňují terminologii a otázku přístupu ke statistickému testu).

Protože téměř všechno se vším souvisí, zamítne statistický test, který je dostatečně silný, hypotézu H_0 prakticky vždy – z toho důvodu je někdy lepší hledat informace nikoli ve statistickém testu, ale v intervalu spolehlivosti (blíže viz poslední poznámku v 11.4.3).

Vyvrcholením kapitoly jsou testy typu $\mu_1 = \mu_2$, které opět nemohou pozorného studenta překvapit, protože test podobného typu byl probrán v předchozí kapitole. Ovšem věcí novou je představení rozdílu mezi párovým a nepárovým testem.

11.8 Otázky k opakování a úlohy ke cvičení

U následujících výroků rozhodněte, zda se jedná o výrok pravdivý či nepravdivý.

Otázka 11.1 *Výběrový průměr $\overline{X}$ je nestranným a konzistentním odhadem parametru μ měření veličiny s normálním rozdělením.*

Otázka 11.2 *Statistika S^2 je nestranným a konzistentním odhadem parametru σ^2 měření veličiny s normálním rozdělením.*

Otázka 11.3 *Kritická t- hodnota je blíže počátku než odpovídající (= pro stejnou hladinu významnosti sestrojená) kritická U-hodnota.*

Otázka 11.4 *Pro rostoucí počet stupňů volnosti graf hustoty t-rozdělení stále více splývá s grafem hustoty normovaného normálního rozdělení.*

Otázka 11.5 *Je možné, že interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ průměru $\overline{X}$ sestrojený na základě konkrétní realizace $\overline{x}$ tuto střední hodnotu vůbec neobsahuje.*

Otázka 11.6 *Pokud hodnota μ_0 nepadne do oboustranného intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ průměru $\overline{X}$, znamená to, že oboustranný test pro $H_0 : \mu = \mu_0$ tuto hypotézu H_0 nezamítne.*

Otázka 11.7 *Párovým testem je každý test typu $\mu_1 = \mu_2$, který porovnává střední hodnoty dvou náhodných veličin.*

Otázka 11.8 *Vnitřní rozptyl popisuje rozmanitost konkrétních jedinců v populaci – tato rozmanitost přitom nezávisí na podmínkách, při kterých je měření prováděno (je stejná u kontrolní skupiny i experimentální skupiny).*

Otázka 11.9 *Celkový rozptyl je součtem vnitřního rozptylu a vnějšího rozptylu.*

Otázka 11.10 *Při nestejných délkách obou souborů měření lze vnitřní rozptyl odhadnout jako aritmetický průměr rozptylů* $\overline{s_1^2}$, $\overline{s_2^2}$ *jednotlivých souborů měření.*

Otázka 11.11 *Existují situace, kdy neplatí princip homogenního rozptylu (rozptyl měření v kontrolní skupině je nesrovnatelně větší než rozptyl měření v experimentální skupině).*

Každý příklad z následujících bude zadán trojici studentů – vypočtěte přesně jen zadaný úkol. U zkoušky budete muset znát příklady 11.1, 11.4 a 11.6.

Úloha 11.1 *Expert zaplacený prodejcem tvrdil, že o nový výrobek šamponu bude mít zájem* 30 % *zákazníků. Při průzkumu u* 500 *zákazníků jich o nový šampon projevilo zájem* 130. *(příklad je analogický příkladu 10.2, ale interval spolehlivosti ještě ve skriptech (2024) není zpracován, doporučuji přijít na přednášku, na které se tento příklad bude dělat)*

a) Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ *testujte hypotézu* H_0*že zájem o výrobek je zhruba stejný, jak expert předpokládal.*

b) Zkonstruujte $0,95\%$*-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu zájemců o nový šampón, na základě testu v (a) a pprovedeného průzkumu.*

Úloha 11.2 *Zkonstruujte* $0,95\%$*-ní interval spolehlivosti pro jednostranný test u příkladu 10.3 pro střední hodnotu průměrného výsledku počtu bodů z matematiky u těch, co používali navíc výukový program. Malá nápověda: interval spolehlivosti bude mít jednu mez plus nebo minus nekonečno, podobně jako interval pro zamítnutí* H_0 *u jednostranného testu.*

Úloha 11.3 *Je známa následující grafická iluze: úsečka* **a** *se zdá delší než úsečka* **b** *(počítá se délka bez koncových šipek), i když ve skutečnosti jsou obě úsečky stejně dlouhé. Pro ověření této iluze jsme dali pěti lidem úkol odhadnout délku úsečky* **a** *(a úsečku typu* **b** *už jim neukazovali) – odhady délek úsečky* **a** *byly po řadě* 8, 11, 9, 5, 7 *cm.*

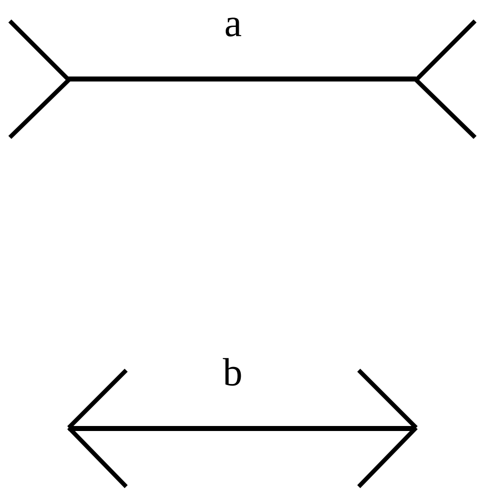
a) *Ověřte tuto iluzi jednostranným stat. testem, pokud délka úsečky* **a** *je ve skutečnosti* 6 *cm.*

b) *Určete p-hodnotu tohoto jednostranného statistického testu v části (a).*

c) *Zkonstruujte příslušný jednostranný* 95%*-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu průměru odhadované délky v části (a).*

Úloha 11.4 *U náhodně vybraného vzorku dvaceti žárovek byla naměřena průměrná životnost* $\overline{x} = 1024$ *hodin a spočítán rozptyl měření* $S^2 = 625$.

a) *Ověřte oboustranným t-testem, zda je průměrná životnost rovna* $\mu = 1000$ *hodin.*



Obrázek 11.18: Grafická iluze: délky úseček a, b jsou stejné.

b) *Utvořte* 95*-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu* μ *průměru životnosti.*

b) *určete p-hodnotu testu v části (a).*

Úloha 11.5 *Sociologové chtějí provést experiment, který má zjistit, zda počet schůzek chlapce s děvčetem závisí na tom, zda je chlapec prvorozený nebo ne. Získá náhodně vybrané čtyři chlapce náctileté prvorozené a šest jiných druhorozených a zjistí, kolik schůzek měl každý z nich během jednoho měsíce. Prvorození:* $2, 2, 1, 4$. *Druhorození:* $3, 4, 5, 7, 3, 5$.

a) *Vypočtete příslušné intervaly spolehlivosti (pro střední hodnotu přůměru měření) se spolehlivostí* 95% *u každé z obou skupin chlapců.*

b) *Proveďte t-test.*

c) *Určete p-hodnotu statistického testu v úloze (b).*

Úloha 11.6 *Chceme testem ověřit, zda kvalita reakcí člověka je stejná za denního i z umělého světla. U náhodně vybrané skupiny deseti lidí byly získány výsledky zkoušky „denní světlo“:* $9, 2, 7, 12, 14, 10, 6, 7, 12, 10$ *a hodnoty zkoušky „umělé osvětlení“:* $7, 2, 4, 13, 13, 7, 4, 6, 8, 9$ *(oba soubory jsou uspořádané, tj. data od i-tého respondenta jsou v obou případech na i-té pozici).*

a) *Za použití oboustranného t-testu rozhodněte, zda soubor „denní světlo“ nabývá významně vyšších hodnot než soubor „umělé světlo“.*

b) *vypočtěte interval spolehlivosti pro střední hodnotu odchylek v úloze (a),*

c) *určete p-hodnotu statistického testu v úloze (a).*

Odpovědi na otázky a některé příklady viz 14.11.

12 Týden 12

12.1 Vlastnosti rozdělení χ^2

Uvažujme veličinu X s normálním rozdělením pravděpodobnosti $No(\mu, \sigma^2)$. Víme, že veličina $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ má normované normální rozdělení $No(0; 1)$. Jaké rozdělení má veličina

$$U^2 = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}?$$

Především můžeme říci, že hodnoty veličiny U^2 jsou nezáporné. Dále víme, že asi 68% veličiny U leží v intervalu $\langle -1; 1\rangle$, tj. asi 68% veličiny U^2 leží v intervalu $\langle 0; 1\rangle$. Zkrátka a dobře, vlastnosti veličiny U^2 lze odvodit z vlastností veličiny U. A protože se veličina U^2 ve statistice hojně používá, dostala i své jméno: $\chi^2(1)$ ... čti: chí kvadrát o jednom stupni volnosti.

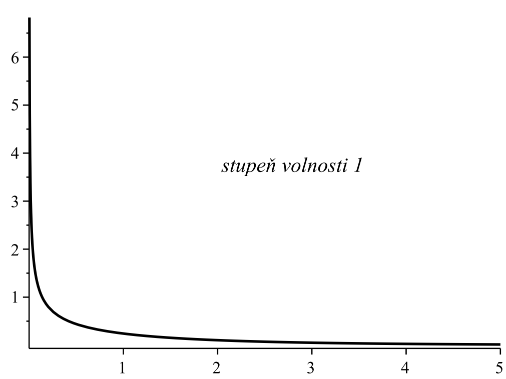
Označení $\chi^2(1)$ naznačuje, že může nastat i více stupňů volnosti než jeden. A skutečně, pokud dvě hodnoty U_1, U_2 veličiny U umocníme na druhou mocninu a sečteme, dostaneme obecně větší hodnotu než $\chi^2(1)$, označujeme ji $\chi^2(2)$ (veličina „chí kvadrát“ se dvěma stupni volnosti):

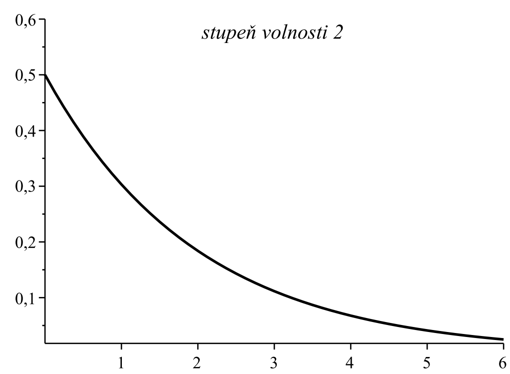
$$\chi^2(2) = U_1^2 + U_2^2.$$

Čili střední hodnota veličiny $\chi^2(2)$ je větší než střední hodnota veličiny $\chi^2(1)$. Obecně lze pak vyjádřit veličinu o n stupních volnosti:

$$\chi^2(n) = U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_n^2.$$

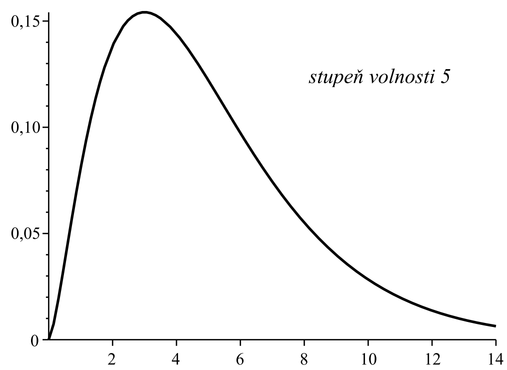
Příklady χ^2 o různých stupních volnosti jsou na obrázku:

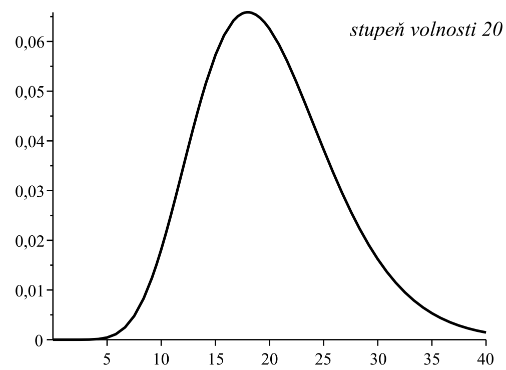




Obecný vzorec hustoty rozdělení $\chi^2(n)$ zní

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \dots \quad x \le 0; \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \dots \quad x > 0, \end{cases}$$





kde Γ je tzv. gama-funkce. Co se týká střední hodnoty a rozptylu rozdělení χ^2, vypočteme jen střední hodnotu, rozptyl uvedeme bez důkazu:

$$E\left\{\chi^2(n)\right\} = E(U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_n^2) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Opravdu platí $E(U_i^2) = 1$:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 &= \frac{1}{\sigma^2}\cdot E(X-\mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2}(EX^2 - 2\mu EX + \mu^2) = \\ &= \frac{1}{\sigma^2}(EX^2 - 2\mu^2 + \mu^2) = \frac{1}{\sigma^2}(\sigma^2 + \mu^2 - \mu^2) = 1. \end{aligned}$$

Pro výpočet EX^2 jsme využili faktu, že $\sigma^2 = DX = EX^2 - E^2X = EX^2 - \mu^2$, tj. $EX^2 = \sigma^2 + \mu^2$.

$$D\left\{\chi^2(n)\right\} = 2n.$$

Další důležitou vlastností je tzv. aditivita rozdělení χ^2, že totiž

$$\chi^2(n_1) + \chi^2(n_2) = \chi^2(n_1 + n_2),$$

která v podstatě plyne z toho, že $\chi^2(n) = \sum_1^n U_i^2$.

Podobně jako u jiných rozdělení, i zde byly kritické hodnoty rozdělení spočteny jednou provždy a seřazeny do tabulky, takže při konkrétním užívání kritických hodnot nemusíme počítat žádné nechutné integrály (kritické hodnoty viz tabulky 12.13, 12.14).

Například pokud chceme určit kritickou hodnotu h_k tak, že

$$P(\chi^2(10) \geq h_k) = 0{,}05,$$

tak ve druhé části tabulky najdeme hodnotu 18,307 na průsečíku řádku 10 a sloupce pro 0,05.

Pokud hledáme d_k tak, aby

$$P(\chi^2(10) \leq d_k) = 0{,}05,$$

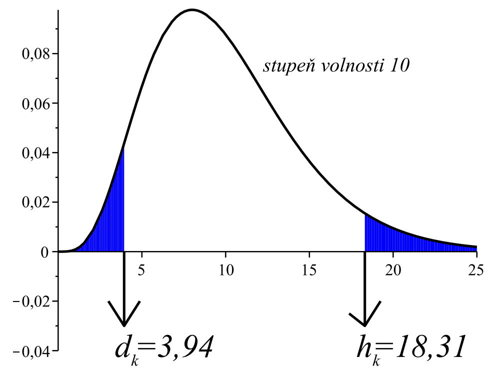
tak v první části tabulky na průsečíku řádku 10 a sloupce 0,95 (protože v tabulce jsou kritické hodnoty uvedené pro pravou část podgrafu) najdeme hodnotu 3,94 (viz též obrázek):

Tabulka 12.13: Kritické hodnoty jednostranného testu χ^2 – část 1.

$q \to$ $\nu \downarrow$	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,750	0,500
1	$392{,}704 \cdot 10^{-10}$	$157{,}088 \cdot 10^{-9}$	$982{,}069 \cdot 10^{-9}$	$393{,}214 \cdot 10^{-8}$	0,0157908	0,1015308	0,454937
2	0,0100251	0,0201007	0,0506356	0,102587	0,210720	0,575364	1,38629
3	0,0717212	0,114832	0,215795	0,351846	0,584375	1,212534	2,36597
4	0,206990	0,297110	0,484419	0,710721	1,063623	1,92255	3,35670
5	0,411740	0,554300	0,831211	1,145476	1,61031	2,67460	4.35146
6	0,675727	0,872085	1,237347	1,63539	2,20413	3,45460	5,34812
7	0,989265	1,239043	1,68987	2,16735	2,83311	4,25485	6,34581
8	1,344419	1,646482	2,17973	2,73264	3,48954	5,07064	7,34412
9	1,734926	2,087912	2,70039	3,32511	4,16816	5,89883	8,34283
10	2,15585	2,55821	3,24697	3,94030	4,86518	6,73720	9,34182
11	2,60321	3,05347	3,81575	4,57481	5,57779	7,58412	10,3410
12	3,07382	3,57056	4,40379	5,22603	6,30380	8,43842	11,3403
13	3,56503	4,10691	5,00874	5,89186	7,04150	9,29906	12,3398
14	4,07468	4,66043	5,62872	6,57063	7,78953	10,1653	13,3393
15	4,60094	5,22935	6,26214	7,26094	8,54675	11,0365	14,3389
16	5,14224	5,81221	6,90766	7,96164	9,31223	11,9122	15,3385
17	5,69724	6,40776	7,56418	8,67176	10,0852	12,7919	16,3381
18	6,26481	7,01491	8,23075	9,39046	10,8649	13,6753	17,3379
19	6,84398	7,63273	8,90655	10,1170	11,6509	14,5620	18,3376
20	7,43386	8,26040	9,59083	10,8508	12,4426	15,4518	19,3374
21	8,03366	8,89720	10,28293	11,5913	13,2396	16,3444	20,3372
22	8,64272	9,54249	10,9823	12,3380	14,0415	17,2396	21,3370
23	9,26042	10,19567	11,6885	13,0905	14,8479	18,1373	22,3369
24	9,88623	10,8564	12,4011	13,8484	15,6587	19,0372	23,3367
25	10,5197	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	19,9393	24,3366
26	11,1603	12,1981	13,8439	15,3791	17,2919	20,8434	25,3364
27	11,8076	12,8786	14,5733	16,1513	18,1138	21,7494	26,3363
28	12,4613	13,5648	15,3079	16,9279	18,9392	22,6572	27,3363
29	13,1211	14,2565	16,0471	17,7083	19,7677	23,5666	28,3362
30	13,7867	14,9535	16,7908	18,4926	20,5992	24,4776	29,3360
40	20,7065	22,1643	24,4331	26,5093	29,0505	33,6603	39,3354
50	27,9907	29,7067	32,3574	34,7642	37,6886	42,9421	49,3349
60	35,5346	37,4848	40,4817	43,1879	46,4589	52,2938	59,3347
70	43,2752	45,4418	48,7576	51,7393	55,3290	61,6983	69,3344
80	51,1720	53,5400	57,1532	60,3915	64,2778	71,1445	79,3343
90	59,1963	61,7541	65,6466	69,1260	73,2912	80,6247	89,3342
100	67,3276	70,0648	74,2219	77,9295	82,3581	90,1332	99,3341

Tabulka 12.14: Kritické hodnoty jednostranného testu χ^2 – část 2.

$q \rightarrow$ $\nu \downarrow$	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001
1	1,32330	2,70554	3,84146	5,02389	6,63490	7,87944	10,828
2	2,77259	4,60517	5,99147	7,37776	9,21034	10,5966	13,816
3	4,10835	6,25139	7,81473	9,34840	11,3449	12,8381	16,266
4	5,38527	7,77944	9,48773	11,1433	13,2767	14,8602	18,467
5	6,62568	9,23635	11,0705	12,8325	15,0863	16,7496	20,515
6	7,84080	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	18,5476	22,458
7	9,03715	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753	20,2777	24,322
8	10,2188	13,3616	15,5073	17,5346	20,0902	21,9550	26,125
9	11,3887	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	23,5893	27,877
10	12,5489	15,9871	18,3070	20,4831	23,2093	25,1882	29,588
11	13,7007	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250	26,7569	31,264
12	14,8454	18,5494	21,0261	23,3367	26,2170	28,2995	32,909
13	15,9839	19,8119	22,3621	24,7356	27,6883	29,8194	34,528
14	17,1170	21,0642	23,6848	26,1190	29,1413	31,3193	36,123
15	18,2451	22,3072	24,9958	27,4884	30,5779	32,8013	37,697
16	19,3688	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999	34,2672	39,252
17	20,4887	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087	35,7185	40,790
18	21,6049	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053	37,1564	42,312
19	22,7178	27,2036	30,1435	32,8523	36,1908	38,5822	43,820
20	23,8277	28,4128	31,4104	34,1696	37,5662	39,9968	45,315
21	24,9348	29,6151	32,6705	35,4789	38,9321	41,4010	46,797
22	26,0393	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894	42,7956	48,268
23	27,1413	32,0069	35,1725	38,0757	41,6384	44,1813	49,728
24	28,2412	33,1963	36,4151	39,3641	42,9798	45,5585	51,179
25	29,3389	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141	46,9278	52,620
26	30,4345	35,5631	38,8852	41,9232	45,6417	48,2899	54,052
27	31,5284	36,7412	40,1133	43,1944	46,9630	49,6449	55,476
28	32,6205	37,9159	41,3372	44,4607	48,2782	50,9933	56,892
29	33,7109	39,0875	42,5569	45,7222	49,5879	52,3356	58,302
30	34,7998	40,2560	43,7729	46,9792	50,8922	53,6720	59,703
40	45,6160	51,8050	55,7585	59,3417	63,6907	66,7659	73,402
50	56,3336	63,1671	67,5048	71,4202	76,1539	79,4900	86,661
60	66,9814	74,3970	79,0819	83,2976	88,3794	91,9517	99,607
70	77,5766	85,5271	90,5312	95,0231	100,425	104,215	112,317
80	88,1303	96,5782	101,879	106,629	112,329	116,321	124,839
90	98,6499	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299	137,208
100	109,141	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169	149,449



12.2 Využití rozdělení χ^2

12.2.1 Testování hypotézy $\sigma^2 = konst$

Příklad 12.1 *Zajímá nás, zda jistý výukový program je schopen naučit jisté partie aritmetiky při výuce na ZŠ. Může se totiž stát, že nadaní studenti budou chápat instrukce počítače, kdežto průměrní žáci budou mít potíže s programem komunikovat a naučí se méně, než by pochopili z výkladu živého učitele.*

Je známo z dlouhodobého měření, že rozptyl výsledků testu z aritmetiky při klasické výuce je $\sigma_0^2 = 25$. Pokud by naše obava byla oprávněná, rozptyl výsledků znalostí by byl při použití programu větší (nadaní žáci by byli lepší, průměrní žáci horší než obvykle).

Byl proveden experiment, kdy deset žáků se podrobilo programové výuce. Výsledky znalostí (bodové ohodnocení) byly: 68, 90, 70, 91, 72, 80, 85, 82, 91, 95. *Odtud*

$$\sum_1^{10}(x_i - \overline{x})^2 = 846{,}4, \text{ a tedy } \ est\ \sigma^2 = \frac{N}{N-1} \cdot \frac{1}{N} \cdot 846{,}4 = \frac{1}{9} \cdot 846{,}4 \doteq 94{,}04$$

a odhad est $\sigma^2 = 94{,}04$ *populačního roptylu je mnohem větší než* $\sigma_0^2 = 25$. *Proveďte statistický test, který by potvrdil, že ke zvýšení rozptylu nedošlo náhodou.*

K1: H_0: rozptyl výsledků znalostí σ^2 nabytých počítačovu výukou je stejný jako rozptyl $\sigma_0^2 = 25$ při klasické výuce (tj. $\sigma^2 = 25$).

H_1: $\sigma^2 \neq 25$ (oboustranný test).

K2: Ukazuje se (uvidíme v bodě K3), že vhodným kritériem testu je $\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \sum_1^{10}(x_i - \overline{x})^2$.

K3: Za předpokladu platnosti H_0 má výraz $\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \sum_1^{10}(x_i - \overline{x})^2$ rozdělení $\chi^2(9)$.

Skutečně, dokažme tento fakt.

Víme, že $\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \sum_1^{n}(x_i - \mu)^2$ má rozdělení $\chi^2(n)$, protože se jedná o součet n čtverců rozdělení U. Ovšem μ neznáme – jaký je tedy vztah mezi $\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \sum_1^{n}(x_i - \mu)^2$ a $\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \sum_1^{10}(x_i - \overline{x})^2$?

Platí

$$\sum(x_i-\mu)^2 = \sum(x_i-\overline{x}+\overline{x}-\mu)^2 = \sum(x_i-\overline{x})^2+2\cdot\sum(x_i-\overline{x})\cdot(\overline{x}-\mu)+\sum(\overline{x}-\mu)^2.$$

A protože

$$2 \cdot \sum (x_i - \overline{x}) \cdot (\overline{x} - \mu) = 2(\overline{x} - \mu) \cdot \underbrace{\sum (x_i - \overline{x})}_{=0} = 0,$$

dostaneme

$$\sum (x_i - \mu)^2 = \sum (x_i - \overline{x})^2 + \sum (\overline{x} - \mu)^2.$$

Máme tedy rovnici

$$\sum (x_i - \mu)^2 = \sum (x_i - \overline{x})^2 + n \cdot (\overline{x} - \mu)^2,$$

kterou po vynásobení hodnotou $\frac{1}{\sigma_0^2}$ lze převést na tvar

$$\underbrace{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}}_{=\chi^2(n)} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{\sigma_0^2} + \underbrace{\frac{(\overline{x} - \mu)^2}{\frac{\sigma_0^2}{n}}}_{=\chi^2(1)}.$$

To, že člen na levé straně má rozdělení $\chi^2(n)$, už bylo řečeno, člen na pravé straně má rozdělení $\chi^2(1)$, protože se jedná o druhou mocninu normovaného rozdělení průměru $\overline{x}$ se střední hodnotou μ a rozptylem $\frac{\sigma_0^2}{n}$. Dohromady tedy dostáváme to, co jsme chtěli spočítat a dokázat pro první člen na pravé straně předchozího vztahu:

$$\sum \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sigma_0^2} = \chi^2(n) - \chi^2(1) = \chi^2(n-1).$$

K4: Pro $\alpha = 0{,}05$ usekáváme na obou stranách hodnotu 0,025 z obsahu hustoty, tj. $d_k(9) = 2{,}70039$ (na průsečíku řádku 9 a sloupce 0,975) a $h_k(9) = 19{,}0228$ (na průsečíku řádku 9 a sloupce 0,025).

K5: Po dosazení naměřených hodnot

$$\sum \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sigma_0^2} = \frac{846{,}4}{25} = 33{,}86 \notin (2{,}70039; 19{,}0228) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } H_0,$$

rozptyl je (bohužel) významně odlišný od 25, v našem případě významně větší. A to je tragédie počítačové výuky :-)

V případě oboustranného testu najdeme dvě kritické hodnoty na řádku 9, a sice $\chi_m = 2{,}7$ (ve sloupci 0,975) a $\chi_v = 19{,}02$ (ve sloupci 0,025) a H_0 bychom zamítli na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$, pokud by hodnota kritéria ležela mimo interval $(2{,}7; 19{,}02)$.

12.2.2 Test druhu rozdělení – χ^2 test dobré shody

Příklad 12.2 *Rodičům se narodily už čtyři dcery, a přesto by si přáli i syna. Chystají se mít páté dítě s nadějí, že pravděpodobnost narození chlapce je* 0,5 *(tj. že rození dětí má podobný charakter – co se týká pohlaví dítěte – jako házení korunou). Ale přece jen si vyhledali data o* 1024 *rodinách s pěti dětmi a zjistili, v kolika rodinách se narodilo kolik chlapců:*

0 *chlapců*	...	40	*rodin*
1 *kluk*	...	184	*rodin*
2 *kluci*	...	300	*rodin*
3 *kluci*	...	268	*rodin*
4 *kluci*	...	196	*rodin*
5 *kluků*	...	36	*rodin*

Pokud tato data o pohlaví při rození dětí mají stejný charakter jako házení korunou, pak je lze dobře popsat binomickým rozdělením s parametry $N = 1024$, $p = 0{,}5$. Teoretické rozdělení pravděpodobnosti a rozdělení četnosti mají následující průběh:

počet chlapců x_i	p_i	*četnost* f_i
0	*1/32*	32
1	*5/32*	160
2	*10/32*	320
3	*10/32*	320
4	*5/32*	160
5	*1/32*	32

Otázka zní: do jaké míry se shoduje empirické rozdělení četnosti a teoretické rozdělení četnosti, čili: lze nashromážděná data dobře popsat binomickým rozdělením s uvedenými parametry?

Provedeme tzv. **test dobré shody** *(v angličtině: good fit test ... GFT).*

K1: H_0: počet chlapců z pěti narozených dětí lze dobře popsat binomickým rozdělením pro $p = 0{,}5$.

H_1: Nelze.

K2: Jaké kritérium zvolit? Vezmeme součet čtverců rozdílů normalizovaných odchylek naměřené a teoretické četnosti $\sum_1^k \frac{(f_t - f_m)^2}{f_t}$:

počet chlapců	naměřená četnost	teoretická četnost	$(f_t - f_m)^2$	$\frac{(f_t - f_m)^2}{f_t}$
0	40	32	64	2
1	184	160	576	3,6
2	300	320	400	1,25
3	268	320	2704	8,45
4	196	160	1296	8,1
5	36	32	16	0,5

K3: Za předpokladu platnosti H_0 má kritérium z bodu K2 rozdělení $\chi^2(k-1)$. Tento fakt nebudeme dokazovat.

K4: Kritérium je vhodným reprezentantem míry platnosti H_0: pokud H_0 platí, očekáváme, že hodnota kritéria bude malá, pokud neplatí, bude velká. Jedná se tedy o jednostranný test, kde k je počet skupin četnosti, tj. v našem případě $k = 6$. Tedy pro $\alpha = 0{,}05$ je $\chi_k(5) = 11{,}0705$ („usekáváme" přet procent obsahu hustoty psti zprava).

K5:

$$\sum_{1}^{6} \frac{(f_m - f_t)^2}{f_t} = 23{,}9 > 11{,}07 \Rightarrow \text{ zamítáme } H_0,$$

binomické rozdělení není příliš dobré pro popis našich dat (tj. pohlaví chlapců při narození se nechová jako počet líců při hodu korunou).

12.2.3 Testování nezávislosti v kontingenční tabulce

Příklad 12.3 *Zajímá nás, zda existuje vztah mezi názory na jadernou energii a politickou příslušností. Proto jsme se dotázali nezávisle vybraných* 200 *lidí, jaký mají názor na jadernou elektrárnu Temelín (neměla by být v provozu – nezajímá mě to – měla by být v provozu), a dále které ze stran ODS, ČSSD dávají větší přednost. Výsledky průzkumu byly sestaveny do kontingenční tabulky (čísla v závorkách vyjadřují empirické pravděpodobnosti = četnosti vydělené číslem* 200*):*

	elektr. by neměla být	nevím	elektr. by měla být	
ČSSD	40 (0,2)	70 (0,35)	40 (0,2)	150 (0,75)
ODS	35 (0,175)	5 (0,025)	10 (0,05)	50 (0,25)
	75 (0,375)	75 (0,375)	50 (0,25)	200 (1,000)

Při testování, zda existuje závislost mezi oběma proměnnými, můžeme použít test χ^2:

K1: H_0: Obě proměnné se chovají nezávisle, čili empirické rozdělení je hodně blízké následujícímu teoretickému rozdělení, kde poslední řádek a poslední sloupec jsou stejné jako v předchozí tabulce (udávající výsledky průzkumu), ovšem ostatní pravděpodobnosti jsou získány vynásobením příslušných pravděpodobností v posledním řádku a sloupci; označme $A_1 \dots$ ČSSD ($P(A_1) = 0{,}75$); $A_2 \dots$ ODS ($P(A_2) = 0{,}25$); $B_1 \dots$ elektrárna NE ($P(B_1) = 0{,}375$); $B_2 \dots$ nevím ($P(B_2) = 0{,}375$); $B_3 \dots$ elektrárna ANO ($P(B_3) = 0{,}25$). Nyní pokud A_i, B_j jsou nezávislé, tak

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i) \cdot P(B_j)$$

(například $P(A_1 \cap B_1) = P(A_1) \cdot P(B_1) = 0{,}281$, atd.). Dostáváme tedy tabulku teoretických pravděpodobností (uvedených v závorce), četnosti jsou získány vynásobením příslušné pravděpodobnosti číslem 200 (četnosti tedy nemusí být celočíselné):

	elektr. by neměla být	nevím	elektr. by měla být	
ČSSD	56,2 (0,281)	56,2 (0,281)	37, 6 (0,188)	150 (0,75)
ODS	18,8 (0,094)	18,8 (0,094)	12,4 (0,062)	50 (0,25)
	75 (0,375)	75 (0,375)	50 (0,25)	200 (1,000)

H_1: Obě proměnné jsou závislé, čili nelze je dost dobře popsat příslušným teoretickým rozdělením.

K2: Kritériem bude $\sum_1^k \frac{(f_t - f_m)^2}{f_t}$, kde k je počet různých tříd četností (v našem případě počet různých oken tabulky kromě posledního (shrnujícího) řádku a posledního (shrnujícího) sloupce: $J \cdot K = 2 \cdot 3 = 6$), f_t jsou příslušné teoretické četnosti (=četnosti z poslední tabulky), f_m příslušné naměřené četnosti (z předposlední tabulky).

K3: Za předpokladu platnosti H_0 má kriteriální funkce rozdělení $\chi^2((J-1)(K-1))$, kde J je počet podmínek veličiny A, K je počet podmínek veličiny B (tento fakt nebudeme dokazovat). V našem případě $\chi^2(1 \cdot 2) = \chi^2(2)$.

K4: Pro $\alpha = 0{,}05$ kritická hodnota $\chi_k(2) \doteq 5{,}99$.

K5:

$$\sum_1^6 \frac{(f_t - f_m)^2}{f_t} = \frac{(56{,}2 - 40)^2}{56{,}2} + \frac{(56{,}2 - 70)^2}{56{,}2} + \cdots + \frac{(12{,}4 - 10)^2}{12{,}4} = 32{,}76;$$

toto číslo zdaleka přesahuje kritickou hodnotu testu 5,99, tedy H_0 zamítáme, prokázala se závislost obou veličin.

12.3 Neparametrický Mannův-Whitneyův test podle pořadí

Příklad 12.4 *Vraťme se k příkladu 12.1, kde jsme chtěli zjistit, jaký vliv na studenty bude mít počítačová výuka matematiky. Proveďme nyní experiment jiného rázu: náhodně vybraných 24 studentů rozdělíme na dvě skupiny po dvanácti lidech. Jedna skupina se účastnila výuky pod dohledem učitele, druhá příslušné počítačové výuky. Potom se žáci podrobili písemce, kde se měřil čas potřebný na vyřešení zadaných úloh. Získala se data:*

$$1 \ldots \textit{ běžná výuka: } 43, 12, 21, 41, 39, 23, 27, 37, 35, 31, 33, 29;$$

$$2 \ldots \textit{ počítačová výuka: } 3, 13, 1, 5, 11, 10, 9, 8, 6, 2, 4, 7;$$

Pomocí všech naměřených hodnot odhadneme rozptyl:

$$est\ \sigma^2 = \frac{SS_1 + SS_2}{V_1 + V_2} = \frac{908{,}92 + 154{,}92}{11 + 11} = 48{,}36$$

A nyní můžeme provést t-test:

K1: H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (doba potřebná na vyřešení písemky z aritmetiky má stejnou střední hodnotu u obou skupin);
H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.

K2: Kritériem je $\frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - \mu_{1-2}}{est\ \sigma_{1-2}}$, kde $\mu_{1-2} = 0$,

$$est\ \sigma_{1-2} = \sqrt{est\ \sigma_1^2 + est\ \sigma_2^2} = \sqrt{\frac{48{,}36}{12} + \frac{48{,}36}{12}} = 2{,}84.$$

K3: Za předpokladu platnosti H_0 má naše kritérium rozdělení $t(22)$, protože $V_1 + V_2 = 22$.

K4: Pro $\alpha = 0{,}05$ je $t_k(22) = \pm 2{,}09$.

K5: Hodnota kritéria: $\frac{30{,}91-6{,}58}{2{,}84} = 8{,}57$, a tak H_0 zamítáme.

Ovšem právě provedený t-test nesplňoval předpoklad rovnosti rozptylů v obou skupinách: $est_1\ \sigma^2 = \frac{SS_1}{V_1} = 82{,}63$, kdežto $est_2\ \sigma^2 = \frac{SS_2}{V_2} = 14{,}08$. První odhad je přibližně šestinásobkem druhého, což už přesahuje rozumnou (= čtyřnásobnou) míru. Toto hrubé porušení předpokladu t-testu je důvodem k detailnějšímu prozkoumání dat pomocí neparametrického testu. Vhodným kandidátem nyní je Mannův-Whitneyův test.

Vraťme se datům z právě opuštěného příkladu 12.4 a podrobme jej Mannovu-Whitneyovu testu:

K1: Uspořádejme všechna měření (z obou souborů dohromady) podle velikosti a zaznamenejme přitom

a) pořadí dané hodnoty;

b) příslušnost dané hodnoty k experimentální skupině (B ... běžná výuka, P ... počítačová výuka).

hodnota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
skupina	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	B

13	21	23	27	29	31	33	35	37	39	41	43
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
P	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B

K2: Nyní vypočteme jakési míry U_1, U_2:

$$U_1 = \sum_{\text{děti ze skupiny P}} (\text{počet dětí z B, které mají horší skóre než dítě } i).$$

Tedy pro dítě s hodnotou 1 na prvním místě pořadí má všech dvanáct dětí z B horší skóre. Pro dítě s hodnotou 2 na druhém místě pořadí má opět všech dvanáct dětí z B horší skóre, atd. až pro dítě s hodnotou 11 na jedenáctém místě má stále všech dvanáct dětí z B horší skóre. A konečně změna, pro dítě s hodnotou 13 na třináctém místě má už jen jedenáct dětí z B horší skóre. Dohromady

$$U_1 = \underbrace{12 + 12 + \cdots + 12}_{\text{jedenáctkrát}} + 11 = 143.$$

Podobně

$$U_2 = \sum_{\text{děti ze skupiny B}} (\text{počet dětí z P, které mají horší skóre než dítě } i).$$

Zde pouze pro dítě s hodnotou 12 na dvanáctém místě má jedno dítě z P horší skóre, tj.

$$U_1 = 1 + \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{\text{jedenáctkrát}} = 1.$$

Z konstrukce U_1, U_2 je vidět, že tyto míry zachycují závažnost, s jakou má jedna skupina lepší pořadí než druhá. Samozřejmě existují poněkud pohodlnější vzorce pro jejich výpočet:

$$U_1 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_2 \cdot (n_2 + 1)}{2} - \sum(\text{pořadí hodnot ze skupiny 2}),$$

$$U_2 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{2} - \sum(\text{pořadí hodnot ze skupiny 1})$$

(mimochodem, platí také $U_1 + U_2 = n_1 \cdot n_2$ – v našem příkladu tedy $143 + 1 = 12 \cdot 12$). Kritériem testu bude nyní menší z obou vypočtených hodnot: $U = min(U_1, U_2)$. V našem příkladu $U = min(143, 1) = 1$.

K3: Kritická hodnota testu:

a) pro $n_1, n_2 \leq 20$**:** Byly sestaveny tabulky kritických hodnot našeho oboustranného testu, a to pro $\alpha = 0{,}05$ tabulka 12.15, pro $\alpha = 0{,}01$ tabulka 12.16.

b) pro $n_1, n_2 > 20$**:** Rozdělení kritéria U je normální se střední hodnotou $\mu = \frac{n_1 \cdot n_2}{2}$ a směrodatnou odchylkou

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{12}},$$

čili normovanou hodnotu

$$\frac{U - \frac{n_1 \cdot n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$$

testujeme s běžnými kritickými hodnotami $\pm 1{,}96$ normálního rozdělení pro $\alpha = 0{,}05$.

K4+K5: V našem příkladu tedy stanovíme kritickou hodnotu

a) z tabulky pro $\alpha = 0{,}05$, $n_1 = n_2 = 12$: $U_k = 37 > U = 1$, tj. H_0 zamítáme ve prospěch alternativní hypotézy H_1.

Všimněte si, že na rozdíl od většiny testů v této přednášce zde zamítnutí H_0 nastane tehdy, když hodnota kritéria kritickou hodnotu NEPŘEKROČÍ. Je to dáno konstrukcí kriterijní funkce – pokud převáží malé hodnoty pořadí v jednom souboru, tak hodnota kritéria je malá, ale současně to znamená jasný a zřetelný rozdíl mezi skupinami.

b) pomocí aproximace normálním rozdělením (nyní méně přesné, ale výpočetně jednodušší):

$$\frac{U - \frac{n_1 \cdot n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1+n_2+1)}{12}}} = -4{,}1 < -1{,}96 \Rightarrow H_0 \text{ zamítáme}$$

ve prospěch alternativní hypotézy H_1.

Vidíme, že výsledky neparametrického testu jsou stejné jako výsledky příslušného parametrického testu 12.4 s porušenými předpoklady. Z toho je vidět, že navzdory porušeným předpokladům t-testu je i při silném rozdílu obou souborů výsledek testu správný, To ovšem nemusí být pravdou, pokud rozdíly mezi oběma skupinami nebudou tak jednoznačné, jak to dokumentují další situace v této kapitole.

12.4 Shrnutí

Cílem této kapitoly bylo představit další užitečné rozdělení pravděpodobnosti, a sice rozdělení χ^2. rozdělení $\chi^2(n)$ (o n stupních volnosti) se definuje jako součet čtverců n normovaných normálních rozdělení U^2. Ukazuje se, že mnohé veličiny v praxi jsou rozděleny jako χ^2, a tedy toto rozdělení se vyskytuje v mnoha statistických testech:

1. V příkladu 12.1 jsme viděli, že rozdělení χ^2 lze užít v testu typu $\sigma^2 = konst$. Pokud měření jsme získali z populace, jejíž rozptyl je σ_0^2, pak kritérium

$$\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{\sigma_0^2}$$

   má rozdělení χ^2 o počtu stupňů volnosti $(n-1)$.

2. V příkladu 12.2 jsme viděli, že χ^2 lze užít v testu, zda naměřená data odpovídají jistému teoretickému rozdělení pravděpodobnosti (toto je asi nejčastější a nejznámější využití rozdělení χ^2, kterému se říká **test dobré shody**). Pokud máme konkrétně n naměřených (či pozorovaných) četností f_m, a jim odpovídající teoretické četnosti f_t, pak kritérium

$$\frac{\sum (f_t - f_m)^2}{f_t}$$

   má rozdělení χ^2 o počtu stupňů volnosti $(n-1)$.

3. V příkladu 12.3 jsme viděli, že χ^2 lze užít při testu nezávislosti hodnot v kontingenční tabulce o počtu řádků a sloupců $J \times K$ (contingent = závislý, podmíněný ... tj. test si klade otázku: do jaké míry jsou data pozorovaná přibližně stejná jako data vypočtená = nezávislá? tj: je mezi dvěma uvedenými veličinami nějaká závislost?). Tento test je specielním příkladem předchozího testu dobré shody, kdy za teoretické

Tabulka 12.15: Kritické hodnoty Mannova-Whitneyova testu pro $\alpha = 0{,}05$.

	n_2																	
n_1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2	–	–	–	–	–	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	–	–	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4		0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5			2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6				5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7					8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8						13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9							17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10								23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11									30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12										37	41	45	49	53	57	61	65	69
13											45	50	54	59	63	67	72	76
14												55	59	64	67	74	78	83
15													64	70	75	80	85	90
16														75	81	86	92	98
17															87	93	99	105
18																99	106	112
19																	113	119
20																		127

Tabulka 12.16: Kritické hodnoty Mannova-Whitneyova testu pro $\alpha = 0{,}01$.

									n_2									
n_1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0
3	–	–	–	–	–	–	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3
4		–	–	0	0	1	1	2	2	3	4	4	5	5	6	6	7	8
5			0	1	2	3	3	4	5	6	7	7	8	9	10	11	12	13
6				2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	15	16	17	18
7					4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24
8						8	10	12	14	16	18	19	21	23	25	27	29	31
9							11	13	16	18	20	22	24	27	29	31	33	36
10								16	18	21	24	26	29	31	34	37	39	42
11									21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
12										27	31	34	37	41	44	47	51	54
13											34	38	42	45	49	53	56	60
14												42	46	50	54	58	63	67
15													51	55	60	64	69	73
16														60	65	70	74	79
17															70	75	81	86
18																81	87	92
19																	93	99
20																		105

pravděpodobnosti vezmeme ty, co jsou dány součinem součtových pozorovaných pravděpodobností, nikoli měřením. Za této situace má kritérium

$$\frac{\sum(f_m - f_t)^2}{f_t}$$

rozdělení χ^2 o $(J-1)\cdot(K-1)$ stupních volnosti.

V závěru kapitoly byl představen jeden příklad neparametrických testů. U parametrických testů byl obyčejně nějaký parametr rozdělení neznámý, a ten byl podroben danému testu (např. μ, σ). Nyní u neparametrických testů žádný takový parametr není u daného testu k dispozici – odtud název „neparametrické“.

Parametrické testy většinou lépe a rychleji vyvrátí hypotézu H_0, což je jejich cílem, pokud skutečně H_0 má být zamítnuta. Když ovšem nejsou splněny tři důležité předpoklady POUŽITELNOSTI těchto testů, máme k dispozici pouze testy neparametrické.

Tabulka 12.17 uvádí přehled statistických testů neparametrických i parametrických, z nichž k některým jsme se v tomto textu vůbec nedostali, společně s přehledem situací a vhodností jejich použitelnosti.

12.5 Otázky k opakování a cvičení 12

U následujících výroků rozhodněte, zda se jedná o výrok pravdivý či nepravdivý.

Otázka 12.1 *Rozdělení χ^2 o n stupních volnosti je součtem n stejně rozdělených veličin U.*

Otázka 12.2 *Rozptyl veličiny χ^2 o n stupních volnosti je roven hodnotě $2n$.*

Otázka 12.3 *Protože hustota rozdělení χ^2 není symetrickou funkcí vzhledem k žádné přímce, některé kritické hodnoty mohou být záporné.*

Otázka 12.4 *Testy dobré shody lze používat jen u diskrétních náhodných veličin.*

Otázka 12.5 *Při oboustranném χ^2 testu jsou kritické hodnoty χ^2_m, χ^2_v symetrické vzhledem k průměru, tj. $\chi^2_m = E\chi^2 - d$, $\chi^2_v = E\chi^2 + d$ pro jistou hodnotu d.*

Otázka 12.6 *Pro rostoucí n se hustota rozdělení $t^2(n)$ blíží hustotě rozdělení $\chi^2(n)$.*

Otázka 12.7 *Při testech v kontingenční tabulce je počet tříd četnosti vždy sudý.*

Otázka 12.8 *Test dobré shody je jednostranným (konkrétně pravostranným) testem.*

Otázka 12.9 *Mannův–Whitneyův test místo jednotlivých hodnot měření zpracovává jen pořadí těchto měření v souboru uspořádaném podle velikosti hodnot.*

Tabulka 12.17: Přehled param. i neparam. testů

data	**účel testu**	**parametrický test**	**neparametrický test**
jeden vzorek	zjistit, zda střední hodnota populace, ze které byl vzorek vybrán, se liší od jisté hodnoty μ_0	U-test či t-test	znaménkový test
dva vzorky jednou	zjistit, zda střední hodnoty populací, ze kterých byly vzorky vybrány, se rovnají	U-test či t-test pro nezávislé skupiny	Mannův–Whitneyův test
jeden vzorek dvakrát	zjistit, zda střední hodnoty populací, ze kterých byly vzorky vybrány, se rovnají	U-test či t-test typu „jeden vzorek dvakrát"	znaménkový test nebo Wilcoxonův test
více než dva vzorky jednou	zjistit, zda populace, ze kterých byly vzorky vybrány, mají tutéž střední hodnotu	jednorozměrná ANOVA (F-test)	Kruskalův–Wallisův test
jeden vzorek více než dvakrát dvakrát	zjistit, zda populace, ze kterých byly vzorky vybrány, mají tutéž střední hodnotu	jednorozměrná ANOVA opakovaného měření	Friedmanův test
množina položek, z nichž každá má dva parametry	zjistit, zda tyto parametry či proměnné jsou korelovány	Pearsonův test korelace	Spearmanův test korelace
jeden vzorek	zjistit, zda populace, ze které byl vzorek vybrán, má jisté teoretické rozdělení		test χ^2 typu 12.2.2 nebo 12.2.3 nebo Kolmogorovův–Smirnovův test

Otázka 12.10 *Neparametrické testy mají obecně větší sílu (= větší schopnost správně zamítnout H_0, když neplatí).*

Úloha 12.1 *Prodej Kola-loky má normální rozdělení se střední hodnotou* 82000 *lahví denně a směrodatnou odchylkou* 1500 *lahví denně. V zájmu výrobce je snížit tuto směrodatnou odchylku, protože by to učinilo obchod pružnějším. Proto se snaží o novou reklamu výrobku. Prvních deset dnů „nového“ prodeje vykazuje tyto výsledky (v počtech prodaných lahví):*

$$81752, 83812, 82104, 82529, 82620, 82033, 81925, 81599, 82730, 81885.$$

Ověřte oboustranným testem (z něho to bude také dobře vidět), zda nová reklama snížila směrodatnou odchylku počtu prodaných lahví za den.

Úloha 12.2 *Výška mužů v USA má normální rozdělení se střední hodnotou* 70 *palců (jeden palec =* 2,54 *cm) a směrodatnou odchylkou dva palce. Antropologa Františka Neználka zajímá, zda muži kmene Bora-Bora mají tentýž rozptyl hodnot své výšky. Získá náhodně vybraný vzorek sedmi mužů kmene Bora-Bora:*

$$69, 68, 68, 67, 70, 71, 69.$$

Může zamítnou nulovou hypotézu o stejných rozptylech?

Úloha 12.3 *Honza Kovář pracuje v mincovně. Jeho úkolem je zajistit, aby mince byly dobře vyváženy – aby například při hodu desetikorunou padal rub i líc stejně často. Proto hodí stovkou desetikorun a padne mu* 61*-krát líc. Testujte následující hypotézy:*
H_0: pravděpodobnost padnutí líce je 0,5*;*
H_1: pravděpodobnost padnutí líce není 0,5.

Úloha 12.4 *Rozdělení IQ v České Republice je normální (v matematickém slova smyslu) se střední hodnotou* 100 *a rozptylem* 225*. Náhodně vybraný vzorek obyvatel Brna prokázal následující rozdělení IQ:*

IQ	< 55	$55 - 70$	$70 - 85$	$85 - 100$	$100 - 115$	$115 - 130$	$130 - 145$	> 145
četnost	20	17	29	52	63	42	13	14

Řekli byste, že brňané dostatečně stejně reprezentují Českou Republiku ve vztahu k IQ? Proveďte statistický test dobré shody v tomto případě.

Úloha 12.5 *Je prováděn výzkum, který má potvrdit, že očekávání u člověka ovlivňuje výsledek experimentu. Každému z devíti náhodně vybraných učitelů Katedry matematiky je přidělen jeden náhodně vybraný student. Čtyřem učitelům je neformálně řečeno, že jejich student není zrovna nejchytřejší, pěti ostatním je řečeno, že jejich student je celkem inteligentní. Pak každý vyučující podrobil svého studenta testu ze statistiky, a pečlivě přitom pokládal otázky a zaznamenával počet chyb. Získala se data*

a) *U studentů, kteří byli nepřímo představeni jako inteligentní:* 6, 8, 5, 12.

b) *U studentů, kteří byli nepřímo představeni jako ne zrovna nejchytřejší:* 10, 2, 14, 9, 4.

Ověřte neparametrickým testem, zda tato data potvrzují hypotézu, že vyučující, který studenta předem (= a priori) považuje za chytrého, mu napočítá méně chyb.

Úloha 12.6 *Dělníky na stavbě zajímá otázka, zda mají ve svých kancelářích více knih politici nebo psychologové; navštíví kancelář několika z nich a spočítají všechny knihy na regálech. Určete pomocí neparametrického testu, zda existuje významný rozdíl v počtu knih u těchto dvou profesí.*

a) *Politikové (9 lidí):* 87, 72, 65, 54, 67, 76, 73, 82, 104.

b) *Psychologové (12 lidí):* 131, 94, 77, 88, 116, 90, 87, 76, 95, 164, 127, 77.

Ověřte neparametrickým testem, zda tato data potvrzují hypotézu, že vyučující, který studenta předem (= a priori) považuje za chytrého, mu napočítá méně chyb.

Odpovědi na otázky a některá cvičení viz 14.12.

13 Týden 13

13.1 Přednáška 13

Už bylo vše probráno, na eventuálníá poslední přednášce budou provedeny resty, které se nestihly, nebo zodpovězeny otázky z následujících zápočtových příkladů.

13.2 Cvičení 13: Zápočtové příklady 1-2

Následující sérii sedmi příkladů proveďte za pomoci Excelu podle následujícího postupu:

a) Odhadněte, jakým modelem popíšeme naměřená data, podle četností nebo intervalového rozdělení četností (nakreslete v Excelu histogram četností) – použijte v každém příkladu, co je vhodnější;

b) Pak z měření vypreparujte parametry potřebné pro teoretický popis;

c) pomocí teoretického modelu vypočtěte teoretické četnosti (uveďte v tabulce v Excelu),

d) a nakonec testem χ^2 (chí kvadrát) porovnejte, zda je navržený teoretický model ve shodě s naměřenými daty (test chí kvadrát proveďte také v Excelu, který tento test obsahuje).

Úloha 13.1 *51.99882, 54.62071, 58.34618, 52.33503, 54.34023, 50.44404, 48.23762, 48.86250, 48.15060, 49.31562, 55.05544, 46.74591, 49.41650, 44.01911, 47.74186, 46.58175, 55.90116, 60.99310, 45.26392, 52.18025, 47.90630, 47.18151, 54.81286, 55.36082, 50.31988, 55.96361, 57.07858, 50.38156, 41.96963, 54.28295, 51.96203, 42.72137, 48.71775, 58.25657, 44.41251, 43.88321, 56.95593, 52.75391, 45.94371, 38.85037.*

Nápověda: pravděpodobně se bude jednat o normální rozdělení S3 – zjistíte po provedení intervalového rozdělení četností.

Úloha 13.2 *0.31679, 0.19195, 0.03202, 0.10703, 0.33120, 0.00305, 0.15606, 0.02107, 0.07481, 0.05017, 0.1332, 0.19609, 0.08193, 0.08473, 0.03614, 0.15838, 0.13192, 0.06462, 0.06559, 0.24249, 0.04222, 0.03124, 0.35355, 0.00125, 0.06360, 0.11149, 0.03475, 0.17893, 0.06980, 0.16811, 0.01520, 0.09588, 0.00583, 0.03656, 0.03999, 0.06500, 0.12474, 0.06415, 0.07629, 0.21434.*

Nápověda: zkuste exponenciální rozdělení $Exp(\lambda)$.

Úloha 13.3 *8.398068, 47.183415, 11.655249, 19.874558, 35.560654, 13.948998, 59.421469, 52.361322, 15.931113, 54.191444, 2.283628, 22.631475, 44.125797, 53.957976, 57.499843, 29.170605, 11.832367, 34.954316, 25.547414, 4.719695, 16.023275, 14.554789, 46.299197, 36.764952, 57.274647, 24.112847, 5.281371, 9.604469, 26.929707, 51.412021, 32.699513, 33.283787, 37.283912, 30.088545, 35.840679, 48.711673, 57.638311, 59.552026, 10.683609, 39.997975.*

Nápověda: zkuste rovnoměrné spojité rozdělení, model S2. Je to dobře vidět z intervalového rozdělení četností.

Úloha 13.4 *8, 8, 5, 12, 11, 15, 12, 9, 6, 7, 9, 7, 12, 7, 11, 12, 8, 6, 12, 7, 5, 7, 10, 10, 9, 13, 9, 11, 9, 6, 13, 11, 6, 10, 12, 6, 5, 8, 13, 10, 10, 13, 13, 7, 12, 10, 11, 7, 11, 8.*

Nápověda: zkuste rovnoměrné diskrétní rozdělení, model D1. Bude to patrno z intervalového rozdělení četností.

Úloha 13.5 *5, 6, 6, 11, 5, 5, 5, 2, 11, 5, 6, 3, 8, 4, 9, 5, 10, 7, 11, 8, 6, 8, 4, 3, 2, 7, 2, 4, 4, 4, 7, 7, 8, 7, 4, 2, 4, 4, 7, 6.*

Nápověda: zkuste binomické rozdělení, model D3. Zvolte $N = 11$ *(největší hodnotu), a pak z odhadu* $\overline{X} \doteq N \cdot p$ *odhadněte* p *… bude asi blízké jedné polovině.*

Úloha 13.6 *1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 3, 1, 0.*

Nápověda: zkuste Poissonovo rozdělení, model D5.

Úloha 13.7 *6, 0, 7, 2, 5, 11, 6, 0, 2, 2, 11, 0, 19, 21, 8, 0, 2, 14, 8, 5, 0, 21, 2, 6, 18, 6, 0, 6, 12, 6, 0, 0, 11, 3, 4, 0, 0, 6, 12, 2, 12, 0, 7, 4, 3, 6, 7, 0.*

Nápověda: zkuste geometrické rozdělení, model D4. Zkuste nějak vypreparovat hodnotu p *z odhadu střední hodnoty:* $\overline{X} \doteq \frac{p}{1-p}$*. Asi do čitatele odečtěte a přičtěte jedničku, rozdělte pak na dva zlomky, ten první zjednodušíte, a z rovnice vyjádříte* p*.*

13.3 Cvičení 13: Zápočtové příklady 3-10

Vypočtěte následující příklady = odpovězte na otázky:

3) Pro $\alpha = 0{,}05$ testujte hypotézu, že střední hodnota průměru měření veličiny je ve skutečnosti rovna 11:

   9, 7, 12, 7, 11, 12, 8, 6, 12, 7, 5, 7, 10, 10, 9, 13, 9, 11, 9, 6, 13, 11, 6, 10, 12, 6, 5, 8, 13, 10, 10, 13, 13, 7, 12, 10, 11, 7, 11, 8.

4) Zjistěte p-hodnotu předchozího testu z otázky 3. Pomoc, kterou asi budete potřebovat: Pokud jste v předchozí otázce použili t-test (což jste udělali dobře), je možné, že budete nyní potřebovat spočítat obsah podgrafu hustoty t-rozdělení v jiných mezích, protože v tabulce t-testu ve skriptech se vyskytuje jen několik kritických hodnot – zkuste použít Excel k nalezení potřebného obsahu podgrafu.

5) Sestrojte 95%-ní interval spolehlivosti pro střední hodnotu průměru 40 hodnot veličiny z otázky 3. V jakém vztahu je tento interval s výsledkem testu v otázce 3?

6) Najděte kvantily následujících diskrétních rozdělení psti, ovšem nestačí výsledek – měli byste využít vektor dostatečného počtu[15] hodnot pstí $p(k)$, a také příslušných kumulativních pstí $c_p(k)$, které uveďte do tabulky jako součást vašeho řešení.

   a) Najděte 0,38-kvantil rozdělení $Bi(N = 40, p = 0{,}3)$.

[15] Pokud k nabývá nekonečně mnoha hodnot, nemusíte je všechny vypisovat, stačí ta správná část :-).

b) Najděte 0,78-kvantil rozdělení $Po(\lambda = 2)$, kde λ je průměrný počet výskytů jisté náhodné události za hodinu (o jakou náhodnou událost by se mohlo například jednat?).

7) Najděte kvantily následujících spojitých rozdělení psti pomocí distribuční funkce $F(x)$, ovšem nestačí výsledek, musíte provést a popsat celý postup – dále nemůžete využít žádný software, pouze kalkulačku, pokud se týká exponenciálního rozdělení, nebo tabulku distribuční funkce rozdělení U, pokud se týká normálního rozdělení.

a) Najděte 0,78-kvantil rozdělení $Exp(\lambda = 2)$.

b) Najděte 0,38-kvantil rozdělení $No(\mu = 50, \sigma = 10)$.

8) **a)** Pomocí binomického rozdělení vypočtěte: Experti odhadují, že o šampon V-protilup bude mít zájem jen 30% jeho bývalých uživatelů, protože po vánocích podražil o padesát procent. Vypočtěte pst (za předpokladu správnosti odhadu expertů), že ze 40 bývalých uživatelů si jej v drogerii nadále koupí aspoň 15 lidí.

b) Pomocí náhrady binomického rozdělení normálním s korekcí vypočtěte přibližně pst z části (a).

9) **a)** Veličina X má rozdělení Poissonovo s průměrným počtem výskytů náhodné události $\lambda = 2$ za hodinu. Jaká je pst, že za konkrétní hodinu měření veličiny dojde ke dvěma a více výskytům této události?

b) Pomocí náhrady Poissonova rozdělení normálním s korekcí vypočtěte přibližně pst z části (a).

10) **a)** Náhodná veličina Y má rozdělení $Exp(\lambda = 2)$, kde λ je průměrný počet výskytů za hodinu. Vypočtěte psti $P(Y < 30min)$, $P(Y > 40min)$ ... uveďte celý výpočet, nejen výsledek.

b) Náhodná veličina X má rozdělení $No(\mu = 50, \sigma = 8)$. Vypočtěte psti $P(X < 55)$, $P(X > 40)$ ... uveďte celý výpočet, včetně využití tabulek distribuční funkce rozdělení U.

14 Odpovědi na otázky a výsledky některých cvičení

14.1 Výsledky cvičení 1.2

Zatím nebyly zadány žádné otázky. Výskledky cvičení:

Ad 1.1: Napíšeme do polí B1 až B50 čísla: pět čísel 4, deset čísel 6, atd. Pak zadáme do pole např. B51 funkci =PRŮMĚR(B1:B50) a dostaneme hodnotu 8,74.

Ad 1.2: Toto je typický příklad, kde použijeme geometrický průměr. Geometrický průměr využijeme právě u příkladů, kde se počítá průměrný roční (denní, měsíční) zisk, výdělek, produkce,... nějaké veličiny za několik let (dní, měsíců). Všimněte si, že naše údaje v procentech jsou vlastně podíly. A to vždy hodnota růstu firmy za letošní rok lomeno hodnotou růstu, za rok předcházející

Pro výpočet tedy použijeme funkci GEOMEAN ve tvaru =GEOMEAN(C3:C7). Dostaneme výsledek 102,2271%. Výsledek nám tedy říká, že v průměru se každý rok prodalo o 2,27% více než předchozí rok.

Pokud byste chtěli příklad počítat podle vzorečku pro geom. průměr, tak by to vypadalo následovně: $\overline{x}_G = \sqrt[5]{101,3 \cdot 108,5 \cdot 100,6 \cdot 98,7 \cdot 102,3} = 102{,}2271$ %.

Ad 1.3: Pro výpočet tohoto příkladu využijeme harmonický průměr. Harmonický průměr se typicky využívá při počítání hodnot, které jsou převrácenými hodnotami jiné veličiny.

Víme tedy, že budeme počítat průměr harmonický. Zadáme tedy do excelu funkci =HARMEAN(1,2,4,1) a dostaneme že průměrná rychlost slona byla 1,4545 km/h.

Zde jsem nepoužil souřadnice buněk, ale čísla do funkce psal rovnou, jelikož u takto malého počtu hodnot, je to rychlejší.

Pokud byste chtěli počítat pomocí vzorečku, ten by vypadal následovně:

$\overline{x}_H = \frac{4}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1} = 1{,}4545.$

14.2 Výsledky cvičení 2.3

Odpovědi na otázky

2.1 – A, 2.2-A, 2.3-A, 2.4 – N (ale lze, třetí axiom psti se často použije pro konečně mnoho disjunktních náhodných jevů), 2.5 – N ($P(A)$ musíme odečíst od jedničky), 2.6 – N (nemusí – stačí, když je v $\mathcal{A}$ tolik náhodných jevů, že jsou splněny dané tři axiomy jevového pole – $\Omega \in \mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$ je uzavřená na rozdíly dvou libovolných jevů a sjednocení nekonečně mnoha po dvou disjunktních náhodných jevů), 2.7 – N (vzorec platí jen tehdy, když jevy A, B jsou disjunktní).

Výsledky příkladů

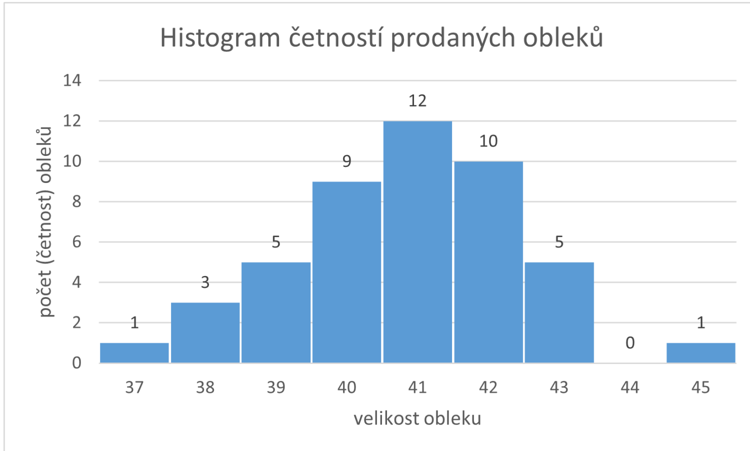
Ad 2.1: a) V excelu sestavíme následující tabulku:

Tabulka 14.18: Tabulka velikostí prodaných obleků

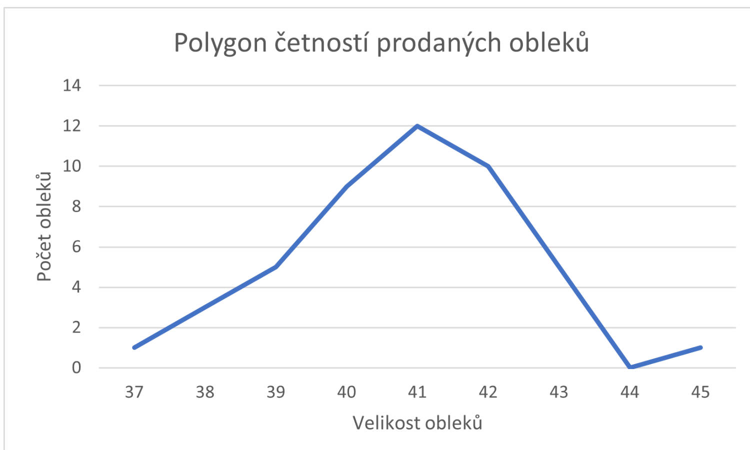
Velikost obleku	Počet prodaných kusů
37	1
38	3
39	5
40	9
41	12
42	10
43	5
44	0
45	1

Hodnoty této tabulky poté označíme a klikneme na "vložení" dále "doporučené grafy" a vybereme "skupinový sloupcový". Tím nám excel vykreslí histogram četností velikostí obleků. Ještě najedeme na histogramu na "prvky grafu," zde necháme zaškrtnuté možnosti "osy, názvy os, název grafu a mřížka". Poté už jen napíšeme název grafu a názvy os. Kliknutím pravým tlačítkem na některý ze sloupců se objeví volba, vybereme FORMÁT DATOVÉ ŘADY a nastavíme na mezery na cca 3 procenta a překrytí na 0 procent ... objeví se histogram, malá mezera funguje jen jako bílé ohraničení obdélníků:: Při vytváření polygonu pracujem téměř stejně jako u vytváření histogramu, akorát místo "skupinový sloupcový" vybereme "spojnicový". Excel nám vykreslí polygon. Opět v sekci "prvky grafu" doplníme polygon o názvy os a název grafu.

b) Zde naši tabulku doplníme o další tři sloupce, v jednom bude relativní četnost ta se počítá počet všech obleků celkem (tedy 46) děleno počet obleků dané velikost (1 u velikosti 37, 3 u velikosti 38 atd.) krát 100 a máme relativní četnost v %. Ve druhém sloupci bude kumulativní absolutní četnost - zde pouze sčítáme četnosti jednotlivých velikostí (např u velikosti 40 bude součet četností velikostí 37, 38, 39 a 40, tedy 1+3+5+9 a to je 18). U komutativní relativní četnosti pracujeme velmi podobně jako u absolutní jen sčítáme již vypočítanou relativní četnost. Výsledkem je tabulka



Obrázek 14.19: Histogram četností prodaných obleků.



Obrázek 14.20: Polygon četností prodaných obleků.

Vel. obleku	prod. kusů	Rel. četnost	Kum. četnost	Kum. rel. četnost
37	1	2,17%	1	2,17%
38	3	6,52%	4	8,69%
39	5	10,87%	9	19,57%
40	9	19,57%	18	39,13%
41	12	26,09%	30	65,22%
42	10	21,74%	40	86,96%
43	5	10,87%	45	97,83%
44	0	0%	45	97,83%
45	1	2,17%	46	100,00%

c) Modus - velikost, která má největší četnost - mod = 41. V excelu pomocí =MODE(B6:B51) = 41 (V buňkách B6 až B51 jsou velikosti obleků)

Medián - hodnota, která dělí řadu na dvě stejné poloviny v našem případě, jelikož máme sudý počet prvků je medián arit průměr 23. a 24. prvku, jelikož 23. prvek i 24. prvek je velikost 41, tak i med = 41. V excelu pomocí =MEDIAN(B6:B51) = 41
Arit. průměr (zde bez komentáře) $\overline{x} = 40,83$
Rozptyl uděláme rovnou v excelu, protože to je nejjednodušší. =VAR.P(B6:B51) = 2,535
Stejně tak je jednodušší dělat směrodatnou odchylku rovnou v excelu, nebo prostě můžeme jen rozptyl odmocnit. =SMODCH(B6:B59) = 1,592

d) Variační rozpětí uděláme opět v excelu. Zde použijeme funkce MAX a MIN a odečteme je od sebe. Je to tedy rozdíl mezi největším a nejmenším prvkem. Lze ho tedy určit v tomto případě snadno. Pomocí excelu je to tedy =MAX(B6:B51)-MIN(B6:B51) = 8
Mezikvartilové rozpětí představuje rozdíl mezi třetím a prvním kvartilem, tak ho tedy i spočítáme pomocí excelu. =QUARTIL(B6:B51;3)-QUARTIL(B6:B51;1) = 2.
Pokud necháme předešlé dva vzorečky osamotě a nebudeme je odečítat, máme rovnou i první a třetí kvartil.

e) Tyto kvantily vypočítáme pomocí funkce PERCENTIL.
Takže =PERCENTIL(B6:B51;45%) = 41, =PERCENTIL(B6:B51;57%) = 41, =PERCENTIL(B6:B51;86,9%) = 42,105.

Ad 2.2: Nejprve si sestrojíme intervaly, do kterých pak naše hodnoty zařadíme. Jak na to? Použijeme Sturgesovo pravidlo, to nám řekne, kolik budeme mít intervalů. Pravidlo vypadá takto: $1 + 3,3\cdot$ log n = V našem případě tedy $1 + 3,3\cdot$ log 27 = 5,72 Zvolíme tedy 6 intervalů. Teď ještě šířku intervalu. Tu zjistíme podle vzorečku: největší hodnota minus nejmenší hodnota lomeno počet intervalů. V našem případě tedy. $\frac{45061-12736}{6} = 5387,5$. Zaokrouhlíme na 5 400 (je třeba vždy zaokrouhlit na číslo větší, jinak se může stát, že některá hodnota nespadne do žádného intervalu).

Nyní sestavíme tabulku s rozdělením četností.

Cena bytu	Počet měst	Rel. četnost	Kum. četnost	Kum. rel. četnost
12 700 - 18 100	11	40,74%	11	40,74%
18 100 - 23 500	11	40,74%	22	81,48%
23 500 - 28 900	3	11,11%	25	92,59%
28 900 - 34 300	1	3,7%	26	96,29%
34 300 - 39 700	0	0%	26	96,29%
39 700 - 45 100	1	3,7%	27	100%

Následující výpočty budou dělány v excelu.

Výpočet průměru (bez komentáře): $\overline{x} = 20318,41$

Výpočet rozptylu: =VAR.P(A2:A28) = 40 475 082,02

Výpočet směr. odchylky: =SMODCH(A2:A28) = 6 362

Výpočet variačního rozpětí: =MAX(A2:A28)-MIN(A2:A28) = 32 325

Výpočet kvantilů je složitější. Nejprve musíme vynásobit hledaný kvantil číslem n+1. V našem případě $0,25 \cdot 28$. Dostaneme číslo 7. Hledáme tedy hodnotu 7. prvku intervalu. Tu zjistíme pomocí vzorce:

$$x_\alpha = a + \frac{(n+1)\cdot\alpha - c_a}{n(a;b)} \cdot (b-a)$$

Kde a - dolní mez intervalu, b - horní mez intervalu a c_a - kumulace v bodě dolní meze intervalu

V našem případě tedy:

$$x_{0,25} = 12700 + \frac{28 \cdot 0,25 - 0}{11} \cdot 5400 = 16136.$$

Nyní výpočet 0,85-kvantilu. Opět uděláme $0,85 \cdot 28$. Zde dostaneme hodnotu 23,8. To, že nám nevyšlo číslo celé nám nevadí a počítáme dále. Nalezneme tedy interval, kde je 23,8. hodnota a dosadíme do vzorečku.

$$x_{0,85} = 23500 + \frac{28 \cdot 0,85 - 22}{3} \cdot 5400 = 26740.$$

ad 2.3 **ad a)** Příslušné hodnoty četností ν_i a pravděpodobností $p(\nu_i)$ jsou v tabulce:

ν_i	1	2	3	4	5
$c(\nu_i)$	19	11	17	19	11
$p(\nu_i)$	0,247	0,143	0,221	0,247	0,143

ad b) Využijeme vzorce pro případ známých četností: $\overline{x} = 2{,}896$, $s^2 = 1{,}937$, $s = 1{,}392$.

ad 2.4 Uvedený příklad ilustruje možnost vytváření rozdělení četností i ve spojitém případě.

ad a) Příslušné rozdělení četností pro vytvořené třídy je v tabulce:

interval (=třída)	$<0;3)$	$<3;6)$	$<6;9)$	$<9;12)$	$<12;15)$	$<15;\infty)$
reprezentant třídy	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5
četnost třídy	14	9	2	2	1	1

ad b) $\overline{X} = \frac{1}{29} \cdot \sum x_i = 4{,}2276$, $s^2 = 17{,}3964$, $s = 4{,}1709$.

ad c) $\overline{X} = 4{,}3966$, $s^2 = 15{,}1958$, $s = 3{,}8982$. Hodnoty b) jsou samozřejmě přesnější, ale pokud bychom měli k dispozici jen intervalové rozdělení četností a už neměli přístup k původním hodnotám měření, tak $\overline{x}$, s^2 a s vypočtené zde nám dávají celkem solidní popis veličiny X (četnosti v posledních dvou intervalech jsou rovny jedné - kdybychom tedy místo středu intervalu brali jako reprezentanta příslušnou jedinou hodnotu, parametry ad c) by byly ještě lepším odhadem přesných ad b)).

14.3 Výsledky cvičení 3.3

Odpovědi na otázky

3.1-N, 3.2-A, 3.3-N (může a nemusí, ale striktně tro zakázáno není; stené pravděpodobnosti jsou speciálním případěm diskrétní pravděpodobnosti), 3.4-A (pro $a = b$ je $\int_a^a f(x)dx = 0$ pro jakékoli a; odtud také plyne, že v axiomu 3 pro hustotu psti mohou být v intervalu ostré i neostré závorky a výsledek je stále stejný), 3.5-N (například ve 3.6 má hustota $f(x)$ bod nespojitosti v nule), 3.6-A, 3.7-A, 3.8-N (například pro $f(x) = 3$ na intervalu $(0; \frac{1}{3})$ a $f(x) = 0$ pro ostatní x vidíme, že funkční hodnoty jsou větší než 1, a přesto se jedná o hustotu psti – nezápornou funkci, z níž je integrál od minus nekonečna do plus nekonečna roven jedné).

Výsledky příkladů:

Ad 3.1: a) krabička padne naplocho s pstí $\frac{385}{500}$, b) krabička padne na bok s pstí $\frac{82}{500}$, c) krabička padne na výšku s pstí $\frac{33}{500}$.

Ad 3.2: a) sudé číslo s pstí: $n = 18$, $m = 9$ (2,4,6,8,10,12,14,16,18), tj. $P(A) = \frac{9}{18} = 0,5 = 50\%$.

b) číslo dělitelné 3 bude vytaženo s pstí: $n = 18$, $m = 6$ (3,6,9,12,15,18), tj. $P(A) = \frac{6}{18} = 0,33 = 33\%$.

c) prvočíslo bude vytaženo s pstí: $n = 18$, $m = 7$ (2,3,5,7,11,13,17), tj. $P(A) = \frac{7}{18} = 0,389 = 38,9\%$.

d) číslo dělitelné 6 s pstí: $n = 18$, $m = 3$ (6,12,18), tj. $P(A) = \frac{3}{18} = 0,166 = 16,6\%$.

Ad 3.3: a) součet 8, možnosti: 2,6;6,2;4,4;5,3;3,5
n=36, m=5, tj. $P(A) = \frac{5}{36} = 0,139 = 13,9\%$.

b) součet, který je dělitelný pěti, možnosti: 5,5;1,4;4,1;2,3;3,2;4,6;6,4 (součet bude 5 nebo 10)
n=36, m=7, tj. $P(A) = \frac{7}{36} = 0,194 = 19,4\%$.

c) součet, který bude sudý,
možnosti: 1,5;5,1...4,4;5,5;6,6
n=36, m=18, tj. $P(A) = \frac{18}{36} = 0,5 = 50\%$.

Ad 3.4: a) pst součtu 11: $n = 6^3 = 216$,
(6,4,1)...P(3)=3!=6
(6,3,2)...P(3)=3!=6
(4,5,2)...P(3)=3!=6
(5,5,1)...$P * 2,1(3) = \frac{3!}{2!} = 3$
(3,3,5)...$P * 2,1(3) = \frac{3!}{2!} = 3$
(4,4,3)...$P * 2,1(3) = \frac{3!}{2!} = 3$
m=27
$P(A) = \frac{27}{216} = 0,125 = 12,5\%$

b) pst součtu 12
$n = 6^3 = 216$,
(6,5,1)...P(3)=3!=6
(6,4,2)...P(3)=3!=6
(5,4,3)...P(3)=3!=6
(3,3,6)...$P * 2,1(3) = \frac{3!}{2!} = 3$
(5,5,2)...$P * 2,1(3) = \frac{3!}{2!} = 3$
(4,4,4)...$P * 3(3) = \frac{3!}{3!} = 1$
m=25
$P(B) = \frac{25}{216} = 0,116 = 11,6\%$

Tedy G.Galilei doporučil vsadit na součet 11, protože $P(11) > P(12)$.

Ad 3.5: a) $B = \{(1,5,),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$; b) padne součet alespoň 7; c) $A \subset C'$; d) jsou neslučitelné; e) $B \subset C$; f) padne součet menší než 6.

Ad 3.6: a) 15 (jednotlivé navzájem odlišné výsledky lze popsat např. pomocí čísel tahů, ve kterých byla vybrána bílá koule – to jsou dvoučlenné kombinace ze šestiprvkové množiny).

b) 5 (tyto výsledky si můžeme představit jako uspořádané šestice (B,B,C,C,C,C),(B,C,B,C,C,C),(B,C,C,B,C,C),(B,C,C,C,B,C),(B,C,C,C,C,B)).

c) 3 (tyto výsledky si můžeme představit jako uspořádané šestice (B,B,C,C,C,C),(B,C,B,C,C,C),(C,B,B,C,C,C).

d) „během prvních tří tahů byla vylosována nejvýše jedna bílá koule“ nebo také „v posledních třech tazích byla tažena alespoň jedna bílá koule“.

e) 10 (obě bílé koule musí být taženy v prvních pěti tazích, tj.jde o dvoučlenné kombinace z pětiprvkové množiny).

f) $B \subseteq C$.

g) bílé koule byly taženy v prvním a čtvrtém nebo v prvním a pátém tahu.

Ad 3.7: a) $A \cap \overline{B} \cap C'$, b) $A \cap B \cap \overline{C}$,

c) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$,

d) $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)=A\cup B\cup C$,

e) $(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$,

f) $(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$,

g) $A\cap B\cap C$,

h) $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)=\overline{(A\cap B\cap C)}$.

Ad 3.8: $p=\frac{1}{168}$.

Ad 3.9: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\binom{4}{2}=\frac{1}{16}\cdot\binom{4}{2}=0{,}375$.

Ad 3.10: a) 1,21%; b) 0,45%; c) 5,88%.

14.4 Výsledky cvičení 4.3

Odpovědi na otázky
4.1-A, 4.2-N (ale může – nule nemůže být rovno v tomto případě jenom $P(B)$, protože to při výpočtu dosazujeme do jmenovatele), 4.3-A (odpověď je sice ANO, jedná se o de Morganovo pravidlo pro čtyři množiny:

$$\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4},$$

ale počítat tuto pst přímo není vůbec jednoduché, protože náhodný jev $\overline{A_i}$ se vyjadřuje pouze tím, jaká volba nesmí být na i-té pozici; zde právě vypočteme pst sjednocení $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ a odečteme od jedničky), 4.4-A, 4.5-A (například tehdy, když všechny dílčí jevy jsou stochasticky nezávislé; protipříkladem je příklad 4.4, kde při výpočtu psti průniku můžeme použít jen pravou stranu rovnosti, nikoli levou), 4.6-A, 4.7-N (v jednom případě tento vzorec nemá smysl, a tedy neplatí, a sice když $P(A)=0$), 4.8-A.

Výsledky příkladů

Ad 4.1 $P(Z3 - Z1 - Z2) = \frac{6}{120} = 0,05$ ... podrobnější vysvětlení viz slajdy na cvičení, nakreslete si též obrázek – viz cvičení samotné.

Ad 4.2 Výsledek viz cvičení dvěma způsoby: nejprve nakreslete množiny S_1, S_2, S_3 v jejich obecné poloze, a všechny prvky umístěte do správné části množiny. Druhý způsob: použijte vzorec pro pst sjednocení.

Ad 4.3 62,5% .

Ad 4.4 $P(A) = P(\text{umí právě dvě}) + P(\text{umí všechny}) = 0,4680 + 0,2808 = 74,88\%$ $P(\text{složí zkoušku}) = \frac{\binom{20}{2}\cdot\binom{10}{1}}{\binom{30}{3}} + \frac{\binom{20}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}\cdot\frac{10}{28} + \frac{20}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{19}{28} + \frac{10}{30}\cdot\frac{20}{29}\cdot\frac{19}{28} + \frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}\cdot\frac{18}{28}$.

Za posledním rovnítkem je vlastně uveden druhý způsob řešení, který spočívá v použití věty o součtu a na jednotlivé členy součtu použijeme větu o součinu, tj. počítáme všechny dílčí psti vytažení otázky, kterou student umí, respektive otázky, kterou student neumí.

Ad 4.5 $\frac{\binom{8}{3}+\binom{10}{3}+\binom{12}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{3}{30}\cdot\frac{7}{29}\cdot\frac{6}{28} + \frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot\frac{8}{28} + \frac{12}{30}\cdot\frac{11}{29}\cdot\frac{10}{28}$, tedy $9,75\%$. Před rovnítkem i za rovnítkem jsou dva různé způsoby řešení téhož: buď můžeme pracovat s kombinačními čísly, kdy se nezajímáme o pořadí v daném tahu, nebo jdeme postupně všechny možnosti vytažení jedné kuličky ve známém vzorci spojujícím pst sjednocení neslučitelných jevů, a každý neslučitelný jev ještě počítáme pomocí vzorce pro průnik závislých jevů. V obojím způsobu dostaneme pst 0,0975.

Ad 4.6 a) 0,1; b) $1 - \frac{\binom{900}{5}}{\binom{1000}{5}} = 0{,}4102$; c) $1 - \frac{\binom{900}{10}}{\binom{1000}{10}} = 0{,}6531$; d) $1 - \frac{\binom{900}{20}}{\binom{1000}{20}} = 0{,}8810$.

Ad 4.13 a) $1 - 0,5^3 - 0,5^3 = \frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{4}^2 = \frac{1}{16}$; c) $\frac{1}{4}^4 = \frac{1}{256}$; d) ne, počet losování může být teoreticky libovolně velký.

Ad 4.14 $0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504$.

Ad 4.15 a) $0,1 \cdot 0,85 \cdot 0,95 + 0,9 \cdot 0,15 \cdot 0,95 + 0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,05 = 0,24725$, b) $0,24725 + 0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,95 = 0,974$.

Ad 4.19 a) $= \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$; b) $\frac{10}{23}$; c) $\frac{10}{23}\cdot\frac{6}{24} + \frac{10}{23}\cdot\frac{8}{23} + \frac{9}{23}\cdot\frac{10}{23} = \frac{5}{12}$.

14.5 Výsledky cvičení 5.5

Odpovědi na otázky

5.1-A, 5.2-N (nabývat může navíc ještě hodnotu 0), 5.3-A (veličina Y udává, s jakou pstí naměříme v N opakováních experimentu relativní četnost úspěchu; její hodnoty nejsou tedy celočíselné, ale psti, kterých nabývá, jsou stále Bernoulliovy psti), 5.4-N (při neprázdném průniku $H_i \cap H_j$ bychom museli vzorec pozměnit a nějakou pst odečíst, protože pst možných výsledků v průniku jevů bychom počítali dvakrát), 5.5-A, 5.6-N (v situaci zmetkovitosti balení bonboniér například $\sum_1^3 P(A|H_i) = 0{,}11$. Tyto psti jsou vázány jevem A a jejich součet roven jedné být nemusí), 5.7-A (výrazy na obou stranách počítají pst průniku jevů $A \cap H_i$ a průnik je operace komutativní, tj. použitím obecné věty o průniku jevů dostaneme obě možnosti), 5.8-A, 5.9-A (odpověď je sice ANO, ale k praktickému výpočtu vzorec není, protože $P(A)$ v čitateli zlomku na pravé straně rovnosti lze zkrátit se jmenovatelem zlomku a dostaneme rovnost $P(H_i|A) = P(H_i|A)$).

Výsledky příkladů

Ad 5.2: $P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^7 = 0{,}0574$.

Ad 5.3: a) 0,2416; b) 0,1762; c) 0,1445.

Ad 5.4: a) 0,3277, b) 0,2048.

Ad 5.5: a) Označme A ... náhodně vybraná cihla je super (bez ohledu z jaké cihelny je). Pak

$P(A) = \frac{0{,}8+0{,}65+0{,}65+0{,}72+0{,}72}{5} = \frac{1}{5} \cdot 0,8 + \frac{2}{5} \cdot 0,65 + \frac{2}{5} \cdot 0,72 = 0,708.$

b) apriorní pst $P(C1) = 0,20$ je známa už ze zadání; jak se tato hodnota liší od aposteriorní psti $P(C_1|A)$ po prozkoumání náhodně vybrané cihly a zjištění, že tato je superkvalitní? Použijeme Bayesův vzorec

$P(C1|A) = \frac{P(C1) \cdot P(A|C1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0{,}80}{0{,}708} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0{,}80}{\frac{1}{5} \cdot 0{,}80 + \frac{2}{5} \cdot 0{,}65 + \frac{2}{5} \cdot 0{,}72} = 0,226.$ Tedy vidíme, že po určení superkvality cihly její pst, že pochází z nejlepší cihelny (s největším procentem superkvalitních cihel), je trochu vyšší.

Ad 5.6: $P(A) = \frac{0{,}4+8 \cdot 0{,}8}{9} = \frac{1}{9} \cdot 0,8 + \frac{8}{9} \cdot 0,8 = 0,75555.$

H_1 ... náhodně vybraný hráč je začátečník ... $P(H1) = \frac{1}{9} = 0,1111$;

H_2 ... náhodně vybraný hráč je pokročilý ... $P(H_2) = \frac{8}{9}$.

Víme: koš byl trefen ... Nevíme: nastal H1?

$P(H_1|A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9} \cdot 0{,}4}{0{,}7555} = 0,0588$ (apriorní pst 0,1111 se po dodání informace „hráč se trefil“ snížila na aposteriorní pst 0,0588).

Ad 5.7: a) $P(A) = \frac{12 \frac{5}{6}}{15} + \frac{3 \cdot \frac{1}{11}}{15} = 0,68485.$

b) $P(H_1|A) = \frac{\frac{12}{15} \cdot \frac{5}{6}}{0{,}68485} = 0,9734$. Tedy apriorní pst $P(H_1) = \frac{12}{15} = 0,80$ se po dodání informace, že tento televizor byl označen expertem za kvalitní, zvýšila na aposteriorní $P(H_1|A) = 0{,}9734$.

Ad 5.8: a) $\frac{10}{400} = 0{,}025$; b) $\frac{5}{150} \cdot 0,5 + \frac{5}{250} \cdot 0,5 = 0{,}0267$.

Ad 5.9: $\frac{0{,}9 \cdot 0{,}95}{0{,}9 \cdot 0{,}95 + 0{,}1 \cdot 0{,}2} = 0{,}9771$.

Ad 5.10: $\frac{0{,}87 \cdot 0{,}72 \cdot 0{,}35}{0{,}87 \cdot 0{,}72 \cdot 0{,}35 + 0{,}87 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}65 + 0{,}13 \cdot 0{,}72 \cdot 0{,}65} = 0{,}5001$.

14.6 Výsledky cvičení ke kapitole 6

Zde nejsou žádné výsledky, protože všechny příklady v dané kapitole jsou uvedeny včetně řešení.

14.7 Výsledky cvičení 7.2

ad 7.1 ad a) $p_0 = 0{,}167$; $p_1 = 0{,}278$; $p_2 = 0{,}278$; $p_3 = 0{,}278$. Musí platit $\sum p_i = 1$ (přesně to tak není díky tomu, že jednotlivé pravděpodobnosti jsou zaokrouhleny na tři desetinná místa).

ad b) Distribuční funkce je schodová funkce analogická např. distribuční funkci z příkladu 7.1 na přednášce s tím rozdílem, že nyní má čtyři schody v bodech 0, 1, 2, 3 o výškách p_0, p_1, p_2, p_3.

ad c) $EX = \frac{5}{3} \doteq 1{,}6667$, $DX = 1{,}114222$.

ad 7.2 X udává počet úspěšných pobytů na pálce ze dvou možných – může tedy nabývat hodnoty 0, 1 nebo 2. Pravděpodobnost, že ani jeden ze dvou pobytů na pálce nebude úspěšný, vypočteme jako pravděpodobnost průniku jevů (pobyt1ne)∩(pobyt2ne): $P(X = 0) = 0{,}75 \cdot 0{,}75 = 0{,}5625$. Podobně snadný je výpočet pravděpodobnosti, že oba pobyty byly úspěšné - zde při výpočtu průniku jevů (pobyt1ano)∩(pobyt2ano) podle **??** máme $P(X = 2) = P((\text{pobyt1ano}) \cap (\text{pobyt2ano})) = P(\text{pobyt1ano}) \cdot P(\text{pobyt2ano}|\text{pobyt1ano}) = 0{,}25 \cdot 0{,}35 = 0{,}0875$. Nejkomplikovanější je výpočet pravděpodobnosti, že ze dvou pobytů bude úspěšný právě jeden. Respektive pokud bychom využili toho faktu, že součet diskrétních pravděpodobností je roven jedné, máme $P(X = 1)$ hned: $P(X = 1) = 1 - 0{,}5625 - 0{,}0875 = 0{,}35$. Z pedagogických důvodů vypočtěme $P(X = 1)$ ještě jinak, že totiž sečteme pravděpodobnost navzájem se vylučujících situací: $P(X = 1) = P((\text{pobyt1ano}) \cap (\text{pobyt2ne})) \cup P((\text{pobyt1ne}) \cap (\text{pobyt2ano})) = P((\text{pobyt1ano}) \cap (\text{pobyt2ne})) + P((\text{pobyt1ne}) \cap (\text{pobyt2ano}))$. Takže dostaneme $P(X = 1) = 0{,}25 \cdot 0{,}65 + 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}35$ – vyšlo to!!

ad 7.3 a) 0,02625 b) 0,03125 c) $1 - 0{,}03125 = 0{,}96875$ d) 0,625 e) 1 f) $F(x)$ určíme podle nenápadného vzorce v textu, který ani nemá číslo. Tak už to v životě bývá, že ty nejdůležitější vzorce a události dějin zůstávají zapomenuty; strašně mě zaráží jedna taková věc z Bible, z knihy Přísloví:

Bylo malé město a v něm hrstka mužů. Tu přitáhl na ně velký král, obklíčil je a zbudoval proti němu mohutné náspy. Našel se pak v něm nuzný moudrý muž, který by byl to město svou moudrostí zachránil, ale nikdo si na toho nuzného muže ani nevzpomněl.

$$F(x) = P(X < x) = P(X \in (-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Tak tedy

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots \text{ pro } x \leq 0; \\ \frac{x^2}{2} & \dots \text{ pro } x \in (0; 1\rangle; \\ \frac{1}{2} + \frac{x-1}{2} & \dots \text{ pro } x \in (1; 2\rangle; \\ 1 & \dots \text{ pro } x > 2. \end{cases}$$

ad 7.4 Ze vztahu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ lze určit, že $c = \frac{1}{2}$. Pak

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-x} & \dots \text{ pro } x > 0; \\ \frac{1}{2} \cdot e^{x} & \dots \text{ pro } x \leq 0. \end{cases}$$

Při odstraňování absolutní hodnoty v integrované funkci musíme situaci rozdělit na dva případy (případ $x \leq 0$ a případ $x > 0$), odtud i dvojí tvar funkce $F(x)$.

Při odstraňování absolutní hodnoty rozdělíme integrovaný interval na dvě části, a pak u každé části provádíme per partes. Z grafu hustoty je vidět, že $EX = 0$, ovšem při výpočtu rozptylu se integrování nevyhneme: $DX = EX^2 - E^2X = EX^2 - 0 = 2$.

ad 7.5 **ad a)** $P(X < 90) = F(90) = 1 - e^{-\frac{90}{100}} = 0{,}593$;
ad b) $P(X \in (80; 120)) = F(120) - F(80) = 1 - e^{-1{,}2} - 1 + e^{-0{,}8} = 0{,}148$;
ad c) $P(X > 150) = 1 - F(150) = 1 - 1 + e^{-1{,}5} = 0{,}223$.

ad 7.6 Rozdělení pravděpodobnosti a rozdělení četnosti je dáno v tabulce:

známka ν_i	1	2	3	4	5
pravděpodobnost $p(\nu_i)$	0,166	0,277	0,277	0,185	0,093
četnost $c(\nu_i)$	216	360	360	240	120

Dále pomocí hodnot pravděpodobností vypočteme očekávané (průměrné) ohodnocení $EX = 2{,}756$ a rozptyl tohoto ohodnocení $DX = 1{,}456$.

ad 7.7 $EX = \frac{19}{24} = 0{,}7917$, $EX^2 = \frac{25}{32} = 0{,}7812$, tj. $DX = EX^2 - E^2X = 0{,}1544$.

ad 7.8 $EX \doteq 1{,}22$; $EX^2 = 1{,}5$, tj. $DX = EX^2 - E^2X = 0{,}0116$.

14.8 Výsledky cvičení 8.2

ad 8.4 **a)** $P(X=0)=\frac{2}{3}$;
$P(X=1)=\frac{2}{9}$;
$P(X=2)=\frac{2}{27}$;
atd. $P(X=k)=\frac{2}{3^{k+1}}$, atd.

b) $EX=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot P(X=k)=0+1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{2}{27}+\dots=$
$=\frac{2}{9}\cdot\left(1+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\dots\right)$
a nyní tuto nekonečnou řadu v závorce sečteme tak, že místo jedné třetiny napíšeme x a řadu

$$s(x)=1+2\cdot x+3\cdot x^2+4\cdot x^3+\dots$$

sečteme tak, že ji zintegrujeme člen po členu, sečteme (už bude možné sečíst snadno podle vzorce pro součet geometrické řady) a výsledek zderivujeme; až takto získáme součet $s(x)$, dosadíme zase zpět konkrétní hodnotu $x=\frac{1}{3}$. Tím jsme vyřídili součet řady v závorce, vrátíme se k celému výpočtu a výsledek je jedna polovina.

Ad 8.5:

a) $\lambda=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}=1{,}66667$;

$p(x\geq 2)=1-p(x=0)-p(x=1)$
$p(x\geq 2)=1-\frac{1{,}66667^0}{0!}\cdot e^{-1{,}66667}-\frac{1{,}66667^1}{1!}\cdot e^{-1{,}66667}=1-e^{-1{,}66667}-1{,}66667\cdot e^{-1{,}66667}=$ 0,811125.

b) $\lambda=\frac{20}{4}=5$
$p(x=0)=\frac{5^0}{0!}\cdot e^{-5}=0{,}006738$.

c) $\lambda=20$
$P(x=15)=\frac{20^{15}}{15!}\cdot e^{-20}=0{,}05165$.

Ad 8.6: X = doba čekání na poruchu
č.j. 1=2000 hod.
λ= průměrný počet poruch za č.j., zde $\lambda=1$
$X\approx Po(\lambda=1)$

Hledání t:
$P(x\geq t)=0,9$
$1-P(x<t)=0,9$
$1-F(t)=0,9$
$F(t)=0,1$
$1-e^{-\lambda\cdot t}=1-e^{-t}=0,1$
$e^{-}t=0,9$

$t = -ln(0,9)$
$t \doteq 0,10536$

Pokud $1 = 2000h \;\rightarrow t \; = 2000 \cdot 0,10536 \; hod \; = 210{,}721 \; hod.$

Druhá možnost řešení: zkuste spočítat pro časovou jednotku rovnu 1 hodina ... výsledek by měl být stejný.

14.9 Výsledky cvičení 9.2

Ad 9.1: a) $P(X < 45) = P(U < \frac{45-60}{5}) = P(U < -3) = 1 - 0,9986501 = 0,00135;$

b $P(X > 65) = P(U > \frac{65-60}{5}) = P(U > 1) = 1 - 0,8413447 = 0,15866;$

c) $P(X >?) = 0,99 \rightarrow P(U > \frac{?-60}{5}) = 0,99$, kde
$\frac{x-60}{5} = 2,33$ – nalezeno v tabulce distribuční funkce Φ. Odtud
$x = 11,65 + 60,$
$x = 71,65$ min,

Ad 9.2: Jedná se o rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti; hustotou rovnoměrného rozdělení psti je po částech konstantní funkce, kteráse rovna nule mimo interval $(8;10)$.

Distribuční funkce $F(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-8}{10-8} = \frac{x-8}{2}$ na intervalu $(8;10)$, jinak pro hodnoty menší nebo rovné osmi je rovna nule, pro hodnoty větší nebo rovné deseti je rovna jedné.

$\int_{8,5}^{8,75} f(x)dx = F(8,75) - F(8,5) = \frac{8,75-8}{2} - \frac{8,5-8}{2} = 0,375 - 0,25 = 0,125.$

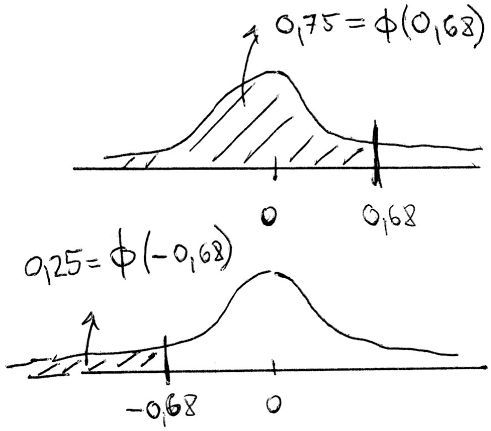
Ad 9.3: $\mu = EX = 75$, $\sigma^2 = DX = 100$, odtud $\sigma = \sqrt{DX} = 10$.

$f(x) = \frac{1}{10\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-75)^2}{2\cdot 100}}$ ... s touto hustotou psti praovat nebudeme, ale převedeme veličinu X na „vycentrovanou“ normální veličinu $U = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{x-75}{10}$.

Pak rovnost $P(X \leq x) = 0,25$ přechází po vycentrování na tvar

$$P(U \leq \frac{x-75}{10}) = 0,25.$$

Pst na levé straně rovnosti je hodnotou distribuční funkce Φ v bodě, který najdeme v tabulce. Problém je ten, že funkční hodnoty menší než 0,5 v tabulce nejsou – musíme si vypomoci symetrií funkčních hodnot hustoty psti vzhledem k počátku.



Odtud už určíme X z našeho převodního vztahu $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ takto: $-0{,}68 = \frac{X-75}{10}$, tj. $X = 75 - 0{,}68 \cdot 10 = 68{,}2$.

Ad 9.4: Řešení: Viz (Budíková, Králová, Maroš 2009), str. 76.

Ad 9.5: a) Devadesátkrát. b) $DX = Np(1-p) = 900 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 81$, odtud $\sqrt{DX} = 9$. c) 0,04428544 s využitím programového prostředí R (jazyk R). d) 0,6466186 s využitím jazyka R. e) pomocí aproximací c) je rovna přibližně 0,046; d) je rovna přibližně 0,6517, tedy odlišnost od přesné hodnoty nastává na třetím desetinném místě.

Ad 9.6: a) $\langle 290; 305\rangle$
$\mu = EX = N \cdot p = 400 \cdot 0,75 = 300$
$\sigma^2 = DX = N \cdot p \cdot (1-p) = 400 \cdot 0,75 \cdot 0,25 = 75 \implies \sigma = \sqrt{75}$
$U = \frac{X-300}{\sqrt{75}}$

$P(290 \leq X \leq 305) = P(\frac{290-300}{\sqrt{75}} \leq U \leq \frac{305-300}{\sqrt{75}}) = P(-1,15470 \leq u \leq 0,57735)$ $= \phi(0,57735) - \phi(-1,15470) = \phi(0,57735) - (1 - \phi(1,13470)) = 0,719042 - 1 + 0,8749281 = 0{,}594$.

b) $(-u < U < u) = 0{,}95$ ... z tabulky Φ určíme, že $u = 1,96$. A tedy

$\frac{X-300}{\sqrt{75}} = 1,96$
$X = 317$. Ze symetrie nyní plyne, že v hodnotách menších než 300 je zase hledaná hodnota o $317 - 300$ menší, což je 283. Pak 283 až 317 je hledaný rozsah.

Ad 9.7:

a) $P(U < 0,8) \;<\; P(U < 0,9)$;

b) $P(U < 0,7) \;>\; P(U > 0,7)$;

c) $P(U > -2) \;=\; P(U < 2)$;

d) $P(U < -3) \;<\; P(U < 3)$;

e) $P(0,9 < U < 1,1) \;>\; P(1,9 < U < 2,1)$;

f) $P(1 < U < 2) \;<\; P(U < 2) + P(U >)$;

g) $P(1 < U < 2) \;=\; 1 - P(U < 1) - P(U > 2)$;

h) $2P(U > 1) \;=\; 1 - P(-1 < U < 1)$.

Ad 9.8:

a) $P(U > u) = 0,25;$
$1 - 0,25 = 0,75$
$u = 0,68$

b) $P(U < u) = 0,1;$
$1 - 0,9 = 0,1$
$u = -1,29$

c) $P(U < u) = 0,99;$
$u = 2,33$

d) $P(-u < U < u) = 0,99;$
$u = 2,58$

e) $P(0 < U < u) = 0,35;$
$0,5 + 0,35 = 0,85$
$u = 1,04$

f) $P(1 < U < u) = 0,2$. A také platí $P(U < 1) = 0{,}841$ (viz tabulka distirbuční funkce Φ). To společně s pstí 0,2 na intervalu $(1; u)$ by znamenalo, že $P(U < u) = 0,841 + 0,2 = 1,041$, a to je spor s tím, že integrál podgrafu od minus nekonečna do plus nekonečna je roven jedné; pst nemůže přesáhnout hodnotu 1, tj. u s požadovanou vlastností neexistuje.

Ad 9.9:

a) $P(x < 11) = P(U < \frac{11-5}{4}) = \Phi(1{,}5) = 0{,}9332$.

b) $P(X > 0) = P(U > \frac{0-5}{4}) = P(U > -\frac{5}{4}) = \Phi(\frac{5}{4}) = 0{,}8943502$.

c) $P(\in \langle 3; 7\rangle = P(\frac{3-5}{4} < U < \frac{7-5}{4} = P(-0,5 < U < 0,5) = \Phi 0{,}5 - \Phi(-0{,}5) = 0{,}6914625 - 1 + 0,6914625 = 0,382925$.

d) $P(\mu < X < \mu + \sigma) = P(0 < U < 1) = \Phi(1) - \Phi(0) \doteq 0{,}3413$.

e) $P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma) = P(1 < U < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) \doteq 0{,}1359$.

f) $P(\mu + 2\sigma < X < \mu + 3\sigma) = P(2 < U < 3) = \Phi(3) - \Phi(2) \doteq 0{,}0214$.

Ad 9.10: $\int_{189{,}5}^{220{,}5} f(t)\; dt = \phi(\frac{220{,}5-200}{6{,}32}) - \phi(\frac{189{,}5-200}{6{,}32}) = 0,9993 - 1 + \phi(1,66) = 0,9993 - 1 + 0,9515 = 0,9508$.

Ad 9.11: $N = 500$
$p = 0,85$
$\mu = EX = N \cdot p = 500 \cdot 0,85 = 425$
$\sigma^2 = DX = N \cdot p(p-1) = 500 \cdot 0,85(1 - 0,85) = 63,75$
$\sigma = \sqrt{63,75}$
$u = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow u = \frac{x-425}{\sqrt{63{,}75}}$

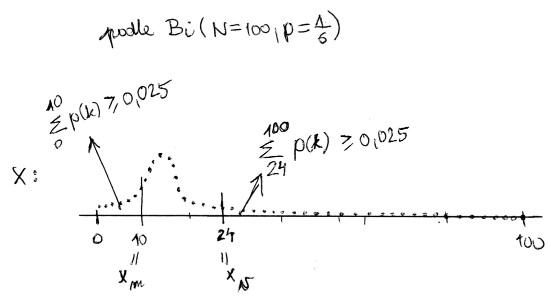
$P(X \geq 420) = P(U \geq \frac{420-425}{\sqrt{63{,}75}}) =$
$= 1 - P(U < -0{,}626224) = 1 - \phi(-0{,}626224) = 1 - (1 - \phi(0{,}626224)) = \phi(0{,}626224) \doteq 0{,}73565.$

S korekcí
$P(X \geq 420) = P(U \geq \frac{419{,}5-425}{\sqrt{63{,}73}}) = \phi(0,6888) \doteq 0,7545.$

14.10 Výsledky cvičení 10.2

Ad 10.1: Hypotézy
H_0... pst, že padne 6, je rovna $\frac{1}{6}$
H_1... pst, že padne 6, není rovna $\frac{1}{6}$

$X\ Bi(N = 100, p = \frac{1}{6})$
X může nabývat hodnot $0, 1, 2, ..., 100$
pst $p(k) = \binom{100}{k} \cdot (\frac{1}{6})^k \cdot (\frac{5}{6})^{100-k}$



$EX = 100 \cdot \frac{1}{6} = 16{,}6666$ ze 100 hodů
$\alpha = 0,05$

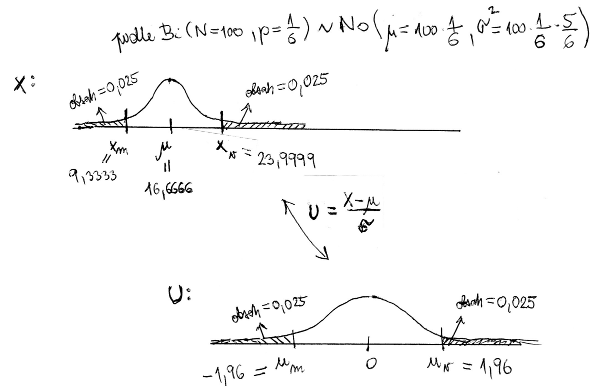
Určení dolní meze: $\sum_0^{x_m} p(k) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$ pro $x_m = 10$ (též lze zjistit v Excelu pomocí finkce binom.inv(0,025,100,1/6)).

Určení horní meze x_v: $\sum_{x_v}^{100} p(k) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$ pro $x_v = 24$ (též lze zjistit v Excelu pomocí finkce binom.inv(0,975,100,1/6)).

Pokud je počet padlých šestek ze 100 hodů podstatně vyšší-nižší než očekávaných 16,6666, pak můžeme zamítnout H_0 a prohlásit, že platí H_1

Rozhodnutí testu: počet šestek je $25 \notin (10; 24)$, tj. zamítáme H_0, kostka je nevyvážená, šestky padají významně častěji.

Druhý způsob řešení: když nemáme Excel, ale jen tabulku funkce Φ (například u zkoušky): užijeme rozdělení $No(\mu = 16,666; \sigma^2 = 13,89; \sigma = 3,73)$ kde střední hodnota i rozptyl jsou stejné jako u rozdělení binomického.



Rozhodnutí testu: počet šestek je $25 \notin (9,3333; 23,9999)$, tj. zamítáme H_0, kostka je nevyvážená, šestky na ní padají významně častěji.

Ad 10.2: K1: Vše se bude týkat veličiny X = počet nespokojenců ze 500 dotazovaných v anketě.
H_0: $EX = 200$ (průměrný počet nespokojenců bude 40%); H_1: $EX \neq 200$ (průměrný počet nespokojenců bude odlišný od 40%);

K2: Kritériem je naměřená hodnota $X = 180$.

K3: Veličina X má při platnosti H_0 chování $Bi(N = 500; p = 0{,}4)$.

K4: Pro $\alpha = 0{,}05$ jsou kritické hodoty normálního rozdělení zjistitelné podobně jako v předchozím příkladě na základě kvantilů rozdělení binomického, nebo zrovna aproximujme binomické rozdělení normálním se stejnou střední hodnotou a rozptylem, a je to: Kritické hodnoty normovaného normálního rozdělení U jsou $u_m = -1{,}96$, $u_v = 1{,}96$.

K5: Naši naměřenou hodnotu $X = 180$ převedeme na U-hodnotu, pro

$$\mu = N{\cdot}p = 500{\cdot}0{,}4 = 200; \quad \sigma^2 = Np(1-p) = 500{\cdot}0{,}4{\cdot}0{,}6 = 120, \quad \sigma = \sqrt{120} = 10{,}9544.$$

Nyní $U = \frac{180-200}{10{,}9544} = -1{,}826 \in (-1{,}96; 1{,}96)$, tj. H_0 nezamítáme, počet nespokojenců není významně odlišný od 40%.

Ad 10.3: Pouze převedeme kritické hodnoty $\pm 1{,}96$ „do řeči“ veličiny X:

$-1{,}96 = \frac{x_m-200}{10{,}9544} \implies x_m = 178{,}53.$
$1{,}96 = \frac{x_v-200}{10{,}9544} \implies x_v = 221{,}47.$

Ad 10.4: K1: H_0... průměrná životnost se rovná 1000 hodin, tj. nezávisí na změně výroby: $E\overline{X} = 1000$;
H_1... průměrná životnost závisí na změně výroby, $E\overline{X} \neq 1000$.

K2: hodnota kritéria je $\overline{X} = \frac{1}{25} \cdot \sum_1^{25} X_i = 970$ hodin.

K3: Při platnosti H_0 lze veličinu $\overline{X}$ popsat rozdělením $No(\mu_{\overline{X}} = 1000, \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{N} = \frac{10000}{25} = 400)$, tedy $\sigma_{\overline{X}} = 20$.

K4: a) $\alpha = 0,1$ je kritický interval $(-1{,}64; 1{,}64)$.
b) pro $\alpha = 0,01$ je kritický interval $(-1{,}28; 1{,}28)$.

K5 Hodnotu $\overline{X} = 970$ převedeme na U-hodnotu: $U = \frac{970-1000}{20} = -1{,}5$. Ad a) $-1{,}5 \in (-1{,}64; 1{,}64)$, tj. H_0 nezamítáme. Ad b) $-1{,}5 \notin (-1{,}28; 1{,}28)$, tj. H_0 zamítáme.

Ad 10.5: p-hodnota je nejmenší možná hodnota hladiny významnosti α, pro kterou už H_0 zamítneme. Z předchozího příkladu je vidět, že p-hodnota leží mezi čísly 0,1 a 0,2. Určeme ji přesněji: jedná se u oboustranného testu o takovou hodnotu $\frac{p}{2}$, že interval $(-1{,}5; 1{,}5)$ je kritický, tj. $0{,}9332 = \Phi(1{,}5) = 1 - \frac{p}{2}$, odtud

$$\frac{p}{2} = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668 \implies p = 0{,}1336.$$

14.11 Výsledky cvičení 11.8

Odpovědi na otázky
11.1 – A, 11.2 – N, 11.3 – N, 11.4 – A, 11.5 – A, 11.6 – N, 11.7 – N, 11.8 – A, 11.9 – N, 11.10 – N (průměr se bere nikoli aritmetický, ale vážený), 11.11 – A (pokud se oba rozptyly liší o více než čtyřnásobek, je vhodnější místo paramatrického testu použít test neparametrický).

Výsledky příkladů: Nebyl jsem si jist některými výsledky, tak jsem je smazal. Zkuste spočítat většinou sami. Bude zkontrolováno na cvičení.

Ad 11.1 Musíte sami.

Ad 11.2 Víme: $\sigma = 100$ bodů, $\overline{x} = 540$ bodů se naměřilo jako průměr 25 hodnot $(N = 25)$, tedy $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{1}{25} \cdot 10000 = 400$, tj. $\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{400} = 20$.

kritickou hodnotu $u_{0{,}95} = 1{,}64$ užijeme i u intervalu spolehlivosti: je to kritická hodnota pravostranného testu, tedy hledaný interval spolehlivosti bude levostranný:

$\mu_{\overline{X}} \in (540 - 1{,}64 \cdot 20; \infty)$;
$\mu_{\overline{X}} \in (507{,}2; \infty)$.

Ad 11.3 ad a) viz přednáška; ad b) $P(\overline{X} > 8) = p$
$1 - F(8) = p$
$1 - t(\frac{8-6}{1}) = p$
$1 - t(2) = p$, a $t(2)$ určíme v Excelu, s funkcí t.dist:
$0,058 = p$. ad c) musíte sami, ještě není uvedeno.

Ad 11.4 Ad a) $K1$:
$H_0 : \mu_{\overline{x}} = 1000$

$H_1 : \mu_{\overline{x}} \neq 1000$

$K2$:
$\frac{\overline{x}-1000}{\sqrt{\frac{est\sigma^2}{N}}}$
$est\ \sigma^2 = \overline{S^2} = 625 \cdot \frac{20}{19} = 657{,}8947$

$K3$:
$t(v = 20 - 1 = 19)$

$K4$:
t_k je na průsečíku řádku $v = 19$ a sloupce $\alpha = 0,05 = 2q$
tj. $t_m = -2,093;\ t_v = 2,093$

$K5$:
$\frac{1024-1000}{\sqrt{\frac{657{,}8947}{20}}} \approx 4,18555;\ \notin (-2,093; 2,093)$

H_0 zamítáme. ad b) musíte sami, ad c) musíte sami.

Ad 11.5 Musíte sami.

Ad 11.6

a) $t_k = \pm 2,262$ $(2q = 005)$. H_0 zamítáme, hodnoty denního světla jsou vyšší než světla umělého.

b) př. $\mu_{\overline{X}} \in 1,6 \pm 2,262 \cdot \sqrt{\frac{2{,}27}{10}}$
$\mu_{\overline{X}} \in (0,522; 2,678)$

c) p-hodnota
$2 \cdot (1 - F(3,36)) =$
$0,00839 = 2 \cdot (1 - t.dist(3{,}36; 9)) = p$ (t.dist je funkce Excelu).

14.12 Výsledky cvičení 12.5

Odpovědi na otázky
12.1 – N (χ^2 je definováno jako součet veličin U^2), 12.2 – A, 12.3 – N (ze vztahu $\chi^2(1) = U^2$ je vidět, že veličina s tímto rozdělením může nabývat pouze kladných hodnot (resp. záporných hodnot nabývá s nulovou pravděpodobností)), 12.4 – N (příslušné četnosti lze počítat i u spojitých veličin, více viz příklad 12.4), 12.5 – N (ne, protože hustota není symetrickou funkcí vzhledem k přímce $x = E\chi^2(n) = n$), 12.6 – N (pro rostoucí n se $t^2(n)$ blíží rozdělení $\chi^2(1)$ ... stupeň volnosti je pouze jeden), 12.7 – N (např. v příkladu 12.3 stačí, abychom uvažovali tři politické strany místo dvou, a počet tříd by byl $J \times K = 3 \cdot 3 = 9$), 12.8 – A, 12.9 – A, 12.10 – N (právě naopak, parametrické testy mají větší sílu, protože neparametrické testy užívají většinou spíše jen pořadí měřených hodnot něž přímo tyto hodnoty).

ad úloha 12.1. $\sigma_0 = 1500$, $n = 10$,

$$s^2 = \frac{1}{n}\left(\sum x_i^2\right) - \overline{x}^2 = \frac{1}{10}\cdot 67734929545 - \left(\frac{1}{10}\cdot 822989\right)^2 = 384013{,}29,$$

pak $\overline{s^2} = \frac{10}{9}\cdot s^2 = 426681{,}433$. Test:
H_0: $\sigma^2 = 1500^2$;
H_1: $\sigma^2 \neq 1500^2$;

$$\text{kritérium } \ldots \frac{n\cdot S^2}{\sigma_0^2} = \frac{10\cdot 384013{,}29}{1500^2} \doteq 1{,}7 \notin (2{,}70039; 19{,}0228);$$

s devíti stupni volnosti pro $\alpha = 0{,}05$ tedy H_0 zamítáme, snížení odchylky se prokázalo.

ad 12.2. Hodnota kritéria je 5, nemůžeme zamítnout H_0.

ad 12.3. Hodnota kritéria je 4,84, což je statisticky významné, zamítáme H_0.

ad 12.4. Protože normální rozdělení představuje spojitou náhodnou veličinu, dovolte mi celý příklad provést podrobně:
Potřebujeme vlastně jen znát pravděpodobnosti, s jakými nabývá normálně rozdělená veličina hodnot z uvedených intervalů
– četnosti pak získáme vynásobením těchto pravděpodobností číslem 242 (počet vybraných obyvatel);
záhlaví (první sloupec) tabulky vynechávám, aby se vešel poslední sloupec:

< 55	$55 - 70$	$70 - 85$	$85 - 100$	$100 - 115$	$115 - 130$	$130 - 145$	> 145
0,0013499	0,0214002	0,1359052	0,3413447	0, 3413447	0,1359052	0,0214002	0,0013499
0,33	5,18	32,89	82,605	82,605	32,89	5,18	0,33

Například hodnotu 0,0013499 lze vypočíst následovně:

$$P(X\in(0;55)) = \Phi\left(\frac{55-100}{15}\right) - \Phi\left(\frac{0-100}{15}\right) \doteq \Phi(-3) - \Phi(-6{,}67) \doteq \Phi(-3) = 0{,}0013499.$$

Četnost pak spočteme jako $242\cdot 0{,}0013499 \doteq 0{,}33$. Další hodnoty v tabulce získáme analogicky. Nyní dosazením četností z této tabulky a tabulky zadání do vzorce kritéria testu dostaneme:

$$\text{krit.} = \frac{(0{,}33-20)^2}{0{,}33} + \frac{(5{,}18-17)^2}{5{,}18} + \cdots + \frac{(0{,}33-14)^2}{0{,}33},$$

což je vysoké číslo, mnohem větší než kritická hodnota $\chi_k^2(7)$, takže zamítáme hypotézu H_0 o tom, že Brno je vyváženým reprezentantem IQ v České Republice.

ad 12.5. Použijeme Mannův–Whitneyův test:

hodnota	2	4	5	6	8	9	10	12	14
pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9
skupina	H	H	I	I	I	H	H	I	H

Pak $U_1 = U_I = 20 + 15 - 25 = 10$, $U_2 = 20 + 10 - 20 = 10$, odtud $10 > U_k = 1$, tj. H_0 nezamítáme (inverzní vlastnosti pro zamítnutí na rozdíl od většiny testů v tomto textu), oba soubory se statisticky významně neliší (tzv. „haló efekt“) se tedy mezi vyučujícími KM nerozšířil statisticky významně.

ad 12.6. Použijeme opět Mannův–Whitneyův test: při určování pořadí např. dvě hodnoty 76 mají pořadí 6,5, dvě hodnoty 77 mají pořadí 8,5, apod.

$$U_1 = 9 \cdot 12 + \frac{12 \cdot 13}{2} - 171 = 15, \quad U_2 = 9 \cdot 12 + \frac{9 \cdot 10}{2} - 60 = 93,$$

tedy $U = 15 < 26 = U_k$ a ZAMÍTÁME H_0 (inverzní vlastnosti pro zamítnutí na rozdíl od většiny testů v tomto textu), mezi profesemi, co se týká objemu knih v kanceláři, je významný rozdíl.

Seznam literatury:

(Brož, 2002) Mistrovství v Microsoft Excel 2000 a 2002.

(Budíková, Králová, Maroš 2009) Průvodce základními statistickými metodami, Grada Publishing 2009.

(Fajmon, Hlavičková, Novák, 2014) Matematika 3. Učební text FEKT VUT, v rámci jehož druhé části je probírána pravděpodobnost a statistika. Dostupný online.

(Loftus, J., Loftusová, E., 1988) Essence of Statistics, Second Edition, Alfred Knopf, New York 1988. Na základě této knihy jsem kdysi vybudoval svou první výuku pravděpodobnosti a statistiky, dále jsou odtud vzaty tabulky distribuční funkce U, χ^2 a kritické hodnoty rozdělení t a Mannova-Whitneyho testu.

(Robová, Hála, Calda, 2013) Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Edice Matematika pro SŠ, Prometheus 2013. Výborná učebnice představující čtyři obory uvedené v názvu, až na kombinace s opakováním, které by mohly být vysvětleny i srozumitelněji (viz výuka či konzultace).

(Rumsey 2006) Deborah Rumsey: Probability for Dummies. Wiley Publishing 2006.

(Rumsey 2016) Deborah Rumsey: Statistics for Dummies. 2nd Edition, John Wiley and Sons 2016.

(Schmuller 2016) Joseph Schmuller: Statistical Analysis with Excel for dummies. 4th Edition, John Wiley and Sons 2016.