Algebra 2 (MA 0005)

RNDr. Břetislav Fajmon, Ph.D.

KATEDRA MATEMATIKY PEDF MUNI, BRNO – verze 2024

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Obsah

Úvod

Tento text je psán jako doplněk přednášky a návrh koordinace výuky v předmětu Algebra 2 na Pedagogické fakultě MU Brno, Katedra matematiky. Otázky k ústní zkoušce v závěrečné kapitle budou vždy upraveny před začátkem aktuálního zkouškového období.

Předmět Algebra 2 (MA0005) je jakýmsi předběžným, algebraickým pohledem na geometrii. Dobrým předpokladem je absolvování předmětu Repetitorium středoškolské matematiky 2 (tj. MA0015), návazným předmětem na Algebru 2 bude Geometrie 2 (tj. MA0009).

Rád bych zde poděkoval studentce Janě Vyvialové, která pečlivě přepsala podstatnou část mého rukopisu v sázecím prostředí TEX. V roce 2023 je text opět přepracováván díky projektu získanému na jeho dokončení. Proběhla revize textu, ale budu rád za informaci o chybách, které unikly mé pozornosti.

Cvičení v textu není příliš aktualizováno, protože jak k první prověrce předmětu (analytická geometrie), tak k samotnému textu byly napsány v průběhu roku 2023-24 vlastní materiály, které najdete v interaktivní osnově k předmětu.

`https://is.muni.cz/auth/el/ped/podzim2023/MA0005/index.qwarp`

Břetislav Fajmon, verze leden 2024

1 Týden 1

1.1 Přednáška 1: Determinant a jeho vlastnosti, Cramerovo pravidlo

Algebra je věda o řešení rovnic a speciálně Algebra 2 neboli lineární algebra se zabývá řešením systému lineárních rovnic. První z metod, kterou se budeme zabývat , je tzv. Cramerovo pravidlo – jedná se o vzorec, do kterého jen dosadíme čísla a_{ij} a b_i a dostaneme vyjádření neznámé x_i. Při hledání-odvození vzorce začněme dvěma rovnicemi o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 &= b_1 / \cdot a_{22}, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 &= b_2 / \cdot (-a_{12}). \end{aligned}$$

Vynásobme první rovnici číslem a_{22}, druhou číslem $(-a_{12})$ a obě rovnice sečtěme. Ve výsledné rovnici se vyruší neznámá x_2, a pak z ní vyjádříme x_1:

$$x_1 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}},$$

kde čitatel $b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$ označíme jako $|A_1|$ a jmenovatel $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ označíme $|A|$. Všimněte si také, že b_1, b_2 se v čitateli zlomku vyskytují přesně v té situaci, ve které se ve jmenovateli zlomku vyskytují hodnoty a_{11}, a_{21} z prvního sloupce.

Podobně najdeme analogický vzorec i pro x_2: provedeme násobení takovými konstantami, aby při sečtení obou rovnic vypadla neznámá x_1, a z výsledné rovnice pak vyjádříme x_2:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 &= b_1 / \cdot (-a_{21}), \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 &= b_2 / \cdot a_{11}. \end{aligned}$$

$$x_2 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}},$$

kde čitatel $b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}$ označíme jako $|A_2|$ a jmenovatel $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ je opět $|A|$. Všimněte si také, že b_1, b_2 se v čitateli zlomku vyskytují přesně v té situaci, ve které se ve jmenovateli zlomku vyskytují hodnoty a_{21}, a_{22} z druhého sloupce.

Podobné totální vzorce lze najít i pro systém tří lineárních rovnic o třech neznámých (viz 1.1):

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 &= b_1,\\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 &= b_2,\\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_3 + a_{33}\cdot x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Zase násobíme rovnice čísly a sčítáme, proces je trochu složitější (viz obrázek na následující straně): jedná se v podstatě o eliminaci proměnné x_3 z prvních dvou rovnic a ze druhé a třetí rovnice, dostaneme dvě rovnice – z nich eliminujeme další neznámou x_2, a výslednou rovnici pro neznámou x_1 ještě vydělíme a_{23}, protože jsme si všimli, že se vyskytuje ve všech sčítancích na obou stranách rovnice. Všimněte si, že ve výsledném zlomku se vyskytuje v čitateli b_i přesně na tom místě, kde ve jmenovateli se vyskytuje a_{i1} – to je přesně rozdíl mezi výpočtem $|A_1|$ a $|A|$. Kdybychom podobné odvození celé provedli tak, že jako poslední neznámá by nám zůstala x_2, respektive x_3, dostaneme tři vzorce:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},$$

kde

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{22}\cdot a_{13}\cdot a_{31}-a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21} =$$

= výsledkem je číslo!!!

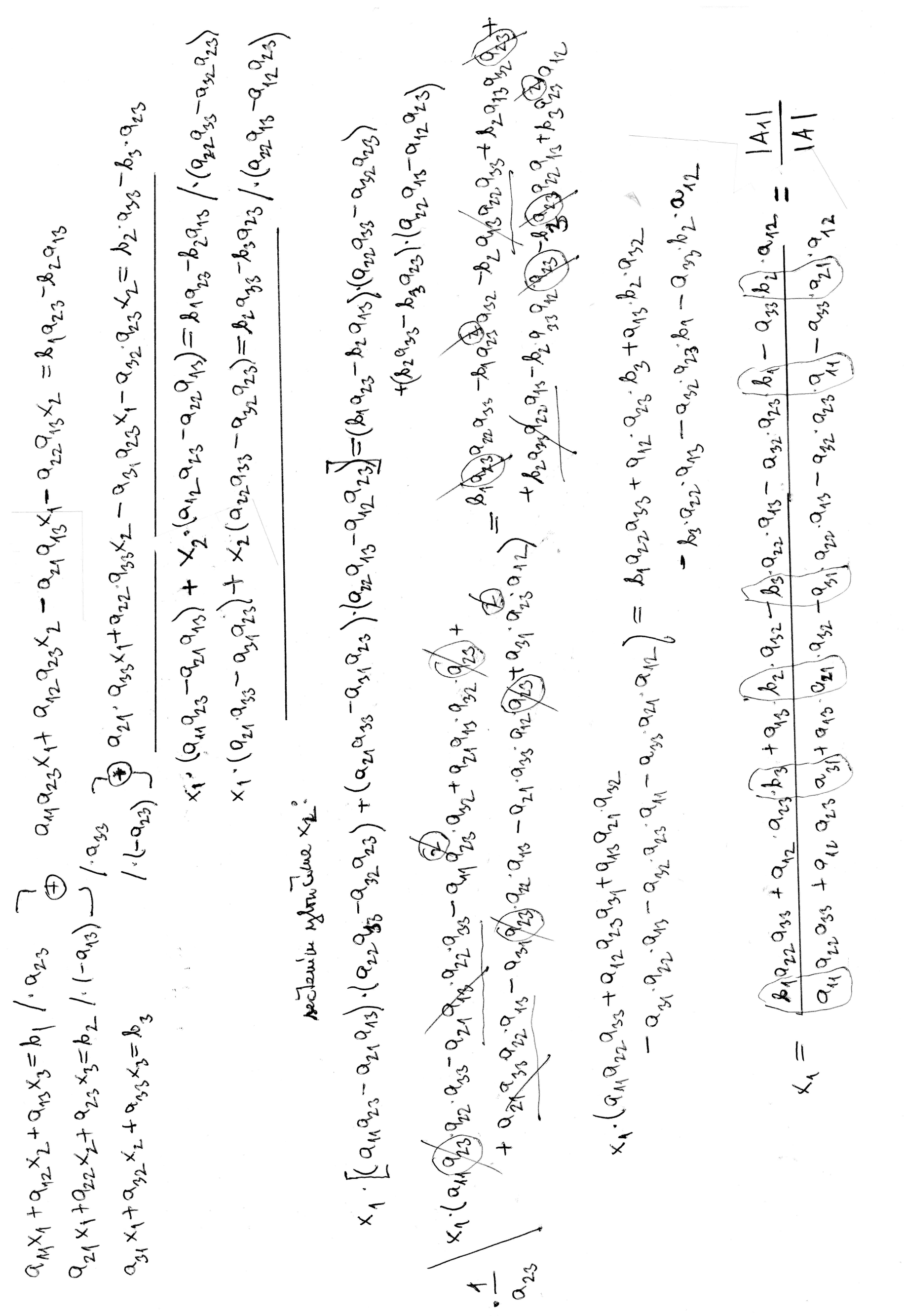
$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

(Determinanty $|A_1|, |A_2|, |A_3|$ se spočítají obdobným způsobem jako $|A|$, pouze j-tý sloupec $\vec{a_j}$ matice A je nahrazen sloupcem pravých stran $\vec{b}$)

Poznámka: Všimněte si například také, že při výpočtu $|A|$ vytvářejí permutace sloupcových indexů všechny prvky grupy $(S_3, \circ)$ permutací tříprvkové množiny.

Definice 1 *Čtvercové nebo obdélníkové schéma čísel se nazývá* **matice typu** m/n*, kde* m *značí počet řádků a* n *počet sloupců matice.*

(Tedy A, A_1, A_2, A_3 jsou matice typu $3/3$ = matice řádu 3.) Matice je tedy schéma čísel jakéhokoli obdélníkového typu m/n, ale determinant je číslo, které přiřazujeme POUZE KE ČTVERCOVÉ MATICI TYPU n/n.



Obrázek 1.1: Odvození Cramerova pravidla pro $m = n = 3$.

Definice 2 **Determinant čtvercové matice** *A typu n/n je číslo, které čtvercové matici přiřadíme podle vzorce*

$$|A| = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{\pi(j_1, j_2, \dots, j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,j_n}$$

(tj. suma přes všechny možné permutace $(j_1, j_2, ..., j_n)$ sloupcových indexů z množiny $1, 2, ..., n$, v každém členu je (-1) umocněno na počet inverzí v dané permutaci sloupcových indexů[1].

Součin n prvků $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot ... \cdot a_{nj_n}$ je součin prvků vybraných ze čtvercové matice tak, aby z každého řádku a každého sloupce byl vybrán právě jeden činitel.

Počet všech permutací = součinů = členů v dané sumě je právě $n!$)

Příklad 1 *Vyřešte Cramerovým pravidlem (metodou determinantů) systém lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8, \\ 3x_1 \qquad - x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Řešení: Vypočteme jednotlivé determinanty:

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 6 + 0 - 0 - (-9) - (-4) = 20 \\
|A_1| &= \begin{vmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9 + 6 + 0 - 0 - (-16) - (-9) = 40 \Rightarrow x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{40}{20} = 2 \\
|A_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 27 + 18 - 3 - (-18) - 72 = -20 \Rightarrow x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-20}{20} = -1 \\
|A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 48 + 0 - 0 - 12 - (-27) = 60 \Rightarrow x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{60}{20} = 3
\end{aligned}$$

Příklad 2 *Pomocí Cramerovy metody determinantů vyřešte systém lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Řešení: Napišme si nejdříve vzorec pro determinant čtvercové matice řádu 4:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} - a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{43} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{42} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{44} +$$

[1]Poznámka: Permutace řádkových indexů neuvažujeme, protože ty bereme neustále ve vzestupném pořadí $(1, 2, \dots, n)$.

$$+a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{43} - a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{42} - a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{44} -$$
$$-a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{43} + a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{41} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{44} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43} +$$
$$+a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{42} - a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{41} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44} - a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{42} +$$
$$+a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{41} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{44} - a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{43} + a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{42} -$$
$$-a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{41} + a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{43} - a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} + a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{41}.$$

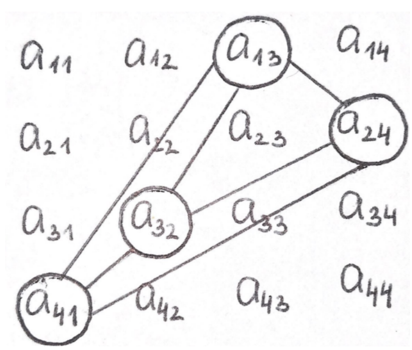
Je vidět, že v rozvoji determinantu řádu n se vyskytuje $n!$ sčítanců, protože ve čtvercové matici A existuje právě $n!$ možných výběrů n-tic prvků, kdy je v dané n-tici vybrán prvek v každém řádku i v každém sloupci (viz obrázek 1.2).

Vezměme si například součin $a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{41}$. Znaménko před tímto součinem určíme:

a) Podle počtu inverzí v permutaci sloupců $(3, 4, 2, 1)$...inverze je vztah mezi dvěma prvky v daném pořadí, kdy větší prvek se vyskytuje před menším prvkem.

Musíme projít všech $\binom{n}{2}$ vztahů mezi dvojicemi prvků a zjišťujeme, že počet inverzí je 5, tj. znaménko je MÍNUS.

b) Z grafického nákresu:



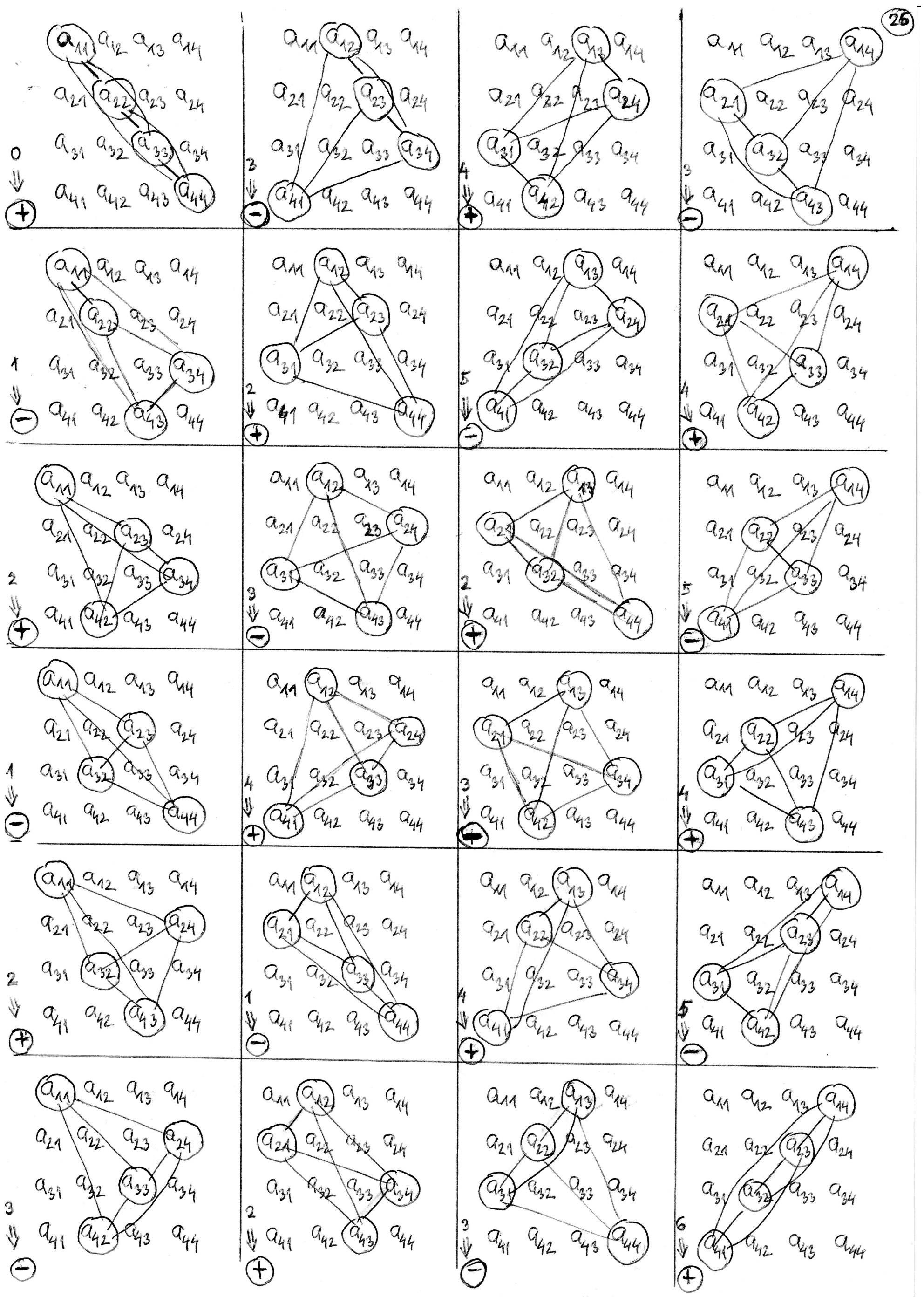
Spojíme všechny dvojice dané zvolené n-tice, dostaneme $\binom{n}{2}$ spojů:

Větší sloupcový index stojí před menším v takové dvojici, kdy v reprezentaci grafu daná hrana má sklon příbuzný vedlejší diagonále – takových sklonů je 5, tj. znaménko je MÍNUS.

Definice 3 *Hlavní diagonála čtvercové matice A je diagonála spojující prvky a_{11} až a_{nn}. Vedlejší diagonála čtvercové matice A je diagonála spojující prvky a_{1n} až a_{n1}.*

Definice 4 *Inverzi ve vztahu mezi dvěma prvky j_k, j_l v permutaci sloupcových indexů určujeme:*

a) *Algebraicky: větší ze sloupcových indexů j_k, j_l daných pozic v matici se vyskytuje před menším;*



Obrázek 1.2: Znázornění všech členů determinantu pro $m = n = 4$.

b) *Graficky: hrana spojující dané prvky* a_{k,j_k} *a* a_{l,j_l} *v matici* A *má sklon příbuzný/blízký vedlejší diagonále.*

U první metody řešení SLR lze tedy říci:

Věta 1 Cramerovo pravidlo: *Pokud platí, že $|A| \neq 0$ a $m = n$, tak existuje jediné řešení SLR s maticí koeficientů A na levé straně rovnic a vektorem pravých stran $\vec{b}$ na pravé straně rovnic:*

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, ..., x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

Poznámka. Jak bylo předvedeno na přednášce nebo bude ve cvičení, pro $|A| = 0$ lze také Cramerovo pravidlo užít i pro nekonečný počet řešení – zvolíme parametry a členy s nimi převedeme na pravé strany rovnic tak, aby determinant matice, která na levé straně zůstane (třebaže nižšího řádu než původní systém), byl nenulový (a dále aplikujeme Cramerovo pravidlo i na tento systém, kde na pravé straně se vyskytují parametry – viz BP Danešová, str. 64-65).

Ve větě 2 se podíváme na některé další vlastnosti determinantu, které usnadňují jeho výpočet. V průběhu uvádění vlastností a jejich důkazů bude rozprostřeno několik definic pojmů, které budou důležité i v dalším výkladu.

Věta 2 Vlastnosti D1 až D6 determinantu čtvercové matice:

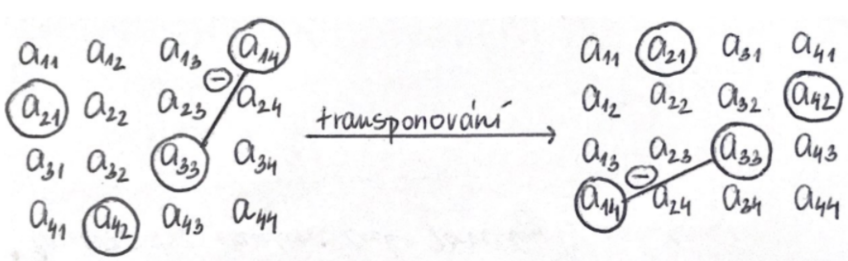
D1. $|A| = |A^T|$*...determinant se nezmění transponováním matice.*

Definice 5 Matice A^T transponovaná k matici *A je matice vzniklá z A záměnou řádků za sloupce: $|A| = |A^T|$, neboli*[2].

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Důkaz vlastnosti D1: Transponováním matice ji „překlopíme“ symetricky vzhledem k hlavní diagonále, n-tice prvků vybraná pro $|A|$ zůstane n-ticí, která se vyskytuje i v $|A^T|$.

Počet inverzí v permutaci sloupcových indexů určené danou n-ticí prvků matice A se transponováním nezmění (směr příbuzný vedlejší diagonále se překlopením vzhledem k hlavní diagonále nemění, tj. stále je příbuzný vedlejší diagonále), tj. nemění se ani znaménko před tímto součinem při výpočtu determinantu matice A^T.



[2] Na pravé straně následující rovnosti mimořádně neznamená první index číslo řádku a druhý index číslo sloupce, protože označení prvků na pravé straně je voleno vzhledem k jejich označení na levé straně rovnosti – řádky v matici na levé straně jsou zapsány do sloupců matice na pravé straně.

Z vlastnosti $D1$ plyne, že všechny další vlastnosti, které vyslovíme pro řádky čtvercové matice, platí (lze je přeformulovat) i pro sloupce.

Definice 6 *Pokud se díváme na řádky matice A jako na vektory, tedy:*

$$\vec{a_1} = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}), \vec{a_2} = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}), ..., \vec{a_n} = (a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$$

lze determinant $|A| = det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n})$ chápat jako zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které přiřadí n vektorům v daném pořadí číslo

$$det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}) := \sum_{j_1, j_2, ..., j_n} (-1)^{\pi(j_1, j_2, ..., j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdot ... \cdot a_{n,j_n}.$$

Každému zobrazení, které přiřadí jednomu nebo více reálným vektorům reálné číslo, říkáme reálná forma.

D2. Při předchozím označení je forma $det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n})$ **antisymetrická, tj. záměnou 2 různých řádků v matici se změní znaménko determinantu**:
$det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_n}) = -det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_n})$.

Důkaz: Záměnou dvou indexů se jedna inverze v permutaci přidá nebo ubere, tj. před každým součinem n prvků bude v sumě opačné znaménko. Tedy i před celým determinantem bude opačné znaménko.

Důsledek vlastnosti $D2$: Determinant matice A se dvěma stejnými řádky je roven 0.

Důkaz: Když zaměníme tyto stejné řádky, s maticí se nic nestane, ale z vlastnosti $D2$ se musí i při záměně těchto řádků změnit znaménko determinantu, čili platí $|A| = -|A| \Rightarrow 2 \cdot |A| = 0$, a tedy $|A| = 0$.

Definice 7 *Pokud $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$ jsou vektory, tak vektor*

$$\vec{v} := \alpha_1 \cdot \vec{a_1} + \alpha_2 \cdot \vec{a_2} + ... + \alpha_k \cdot \vec{a_k}$$

je <u>lineární kombinací vektorů</u> $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$.

*(**Lineární kombinace vektorů** $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$ je jakýkoli součet skalárních násobků těchto vektorů.)*

D3. $det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n})$ je **zobrazení lineární v každé složce**, tj. pokud na k-tém řádku se vyskytuje lineární kombinace dvou vektorů $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$, tak determinant lze upravit na lineární kombinaci dvou determinantů:

$$det(\vec{a_1}, ..., \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, ..., \vec{a_n}) = \alpha \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{u}, ..., \vec{a_n}) + \beta \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{v}, ...\vec{a_n})$$

Důkaz:

$$\sum(-1)^{\pi(j_1,\ldots,j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot (\alpha \cdot u_{jk} + \beta \cdot v_{jk}) \cdot \ldots \cdot a_{n,j_n}$$

$$= \text{vytkneme } \alpha, \beta \text{ a rozdělíme na dva součty} =$$

$$\alpha \cdot \sum(-1)^{\pi(j_1,\ldots,j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot u_{j_k} \cdot \ldots \cdot a_{n,j_n} + \beta \cdot \sum(-1)^{\pi(j_1,\ldots,j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot v_{j_k} \cdot \ldots \cdot a_{n,j_n} =$$

$$= \alpha \cdot det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{u}, \ldots, \vec{a_n}) + \beta \cdot det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{v}, \ldots, \vec{a_n})$$

Poznámka: Vlastnost $D3$ lze přirozeně rozšířit tak, že k-tý vektor není lineární kombinací pouze dvou vektorů, ale l vektorů ($l > 2$).

Důsledek vlastnosti $D3$: Vynásobením k-tého řádku matice A se stejným číslem vynásobí i celý determinant této matice.
(Plyne z $D3$: $det(\vec{a_1}, \ldots, \alpha \cdot \vec{k}, \ldots, \vec{a_n}) = \alpha \cdot det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{k}, \ldots, \vec{a_n})$.)

Další důsledek vlastnosti $D3$: Je-li některý řádek matice A řádek samých nul, pak platí $|A| = 0$.
(Z $D3$: $det(\vec{a_1}, \ldots, 0 \cdot \vec{a_k}, \ldots, \vec{a_n}) = 0 \cdot det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{k}, \ldots, \vec{a_n}) = 0$. Nebo jiný důkaz přímo z definice determinantu: v každém součinu v determinantu je vybrána jedna 0 $\Rightarrow |A| = 0$.)

Vlastnosti D4 až D6 determinantu budou uvedeny ve 2. přednášce.

1.2 Cvičení 1

- Cramerovo pravidlo pro $n = 2$ nebo $n = 3$.
- Cramerovo pravidlo v případě nekonečně mnoha řešení nebo žádného řešení.
- Přehled čtyř metod řešení SLR na ZŠ (viz DP Danešová, kapitola 4).
- Metoda řešení SLR na SŠ – Gaussova eliminace jako vylepšená sčítací metoda (viz BP Danešová, kap. 5)

Úloha 1.1 *Je dán následující systém tří rovnic o třech neznámých:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & z & = & 12 \end{array}$$

a) Ověřte, že zadaný systém lze řešit Cramerovým pravidlem.

b) Vyřešte systém v oboru reálných čísel pomocí Cramerova pravidla.

Úloha 1.2 *Je dán následující systém tří rovnic o třech neznámých:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ -2x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ -3x & + & 4y & - & 5z & = & 1 \end{array}$$

a) Uveďte důvod, proč zadaný systém nelze řešit Cramerovým pravidlem (při standardní matici A).

b) Vyřešte systém Cramerovou metodou nestandardním způsobem (otázka 1, příklad třetí v pořadí ze čtyř v dané otázce), když si uvědomíte, že třetí rovnice je rovna součtu první rovnice se dvojnásobkem druhé rovnice (viz BP Danešová, str. 64-65).

Úloha 1.3 *Zdůvodněte, jaké znaménko je při výpočtu determinantu řádu šest z definice pro matici matic A u součinu*

$$a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} \cdot a_{56} \cdot a_{65}.$$

Úloha 1.4 *Zdůvodněte, jaké znaménko je při výpočtu determinantu řádu šest z definice pro matici A u součinu*

$$a_{14} \cdot a_{25} \cdot a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{51} \cdot a_{66}.$$

POZOR, PŘÍŠTÍ CVIČENÍ SI NAPÍŠEME PROVĚRKU NA TÉMA: ANALYTICKÁ GEOMETRIE – VIZ ODPOVĚDNÍKY V IS PRO PŘÍPRAVU.

2 Týden 2

2.1 Přednáška 2: Další metody výpočtu determinantu

D4. Determinant matice A se nezmění, pokud k řádku $\vec{a_k}$ přičteme nenulový násobek jiného řádku, například řádku $\vec{a_l}$:

$$det(\vec{a_1},...,\vec{a_k},...,\vec{a_l},...,\vec{a_n}) \quad = \quad det(\vec{a_1},...,\vec{a_k}+\alpha\cdot\vec{a_l},...,\vec{a_l},...,\vec{a_n})$$

Důkaz: Rozepišme si pravou stranu této rovnosti a využijem přitom nejdůležitější vlastnost tohoto předmětu, vlastnost linearity determinantu ($D3$):

$$\begin{aligned} det(\vec{a_1},...,\vec{a_k}+\alpha\cdot\vec{a_l},...,\vec{a_l},...,\vec{a_n}) &\overset{D3}{=} det(\vec{a_1},...,\vec{a_k},...,\vec{a_l},...,\vec{a_n})+\alpha\cdot det(\vec{a_1},...,\vec{a_l},...,\vec{a_l},...,\vec{a_n}) = \\ &\overset{D2}{=} det(\vec{a_1},...,\vec{a_k},...,\vec{a_l},...,\vec{a_n})+0 = det(\vec{a_1},...,\vec{a_k},...,\vec{a_l},...,\vec{a_n}) \end{aligned}$$

(spíše než $D2$ používáme důsledek $D2$: víme, že $det(\vec{a_1},...,\vec{a_l},...,\vec{a_l},...,\vec{a_n}) = 0$, jelikož se jedná o determinant matice se dvěma stejnými řádky) – důkaz je hotov.

Vlastnost $D4$ nám poskytuje dobrý nástroj pro výpočet determinantu: snažíme se k nějakému řádku přičíst násobek jiného řádku, abychom v matici tímto způsobem vytvářeli nuly – čím více nul, tím méně součinů je nenulových.

Definice 8 Schodový tvar matice A = *takové obsazení matice A čísly, že v každém dalším řádku matice je zleva více nul než v tom předchozím, nebo se už jedná o řádek samých nul.*

Ad příklad 2. Nyní se můžeme vrátit k příkladu 2 a pokusit se vypočítat determinanty $|A|, |A_1|, |A_2||A_3|, |A_4|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\cdot r_2 \\ +r_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +r_3 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-3)\cdot 2 = -6.$$

Důsledek vlastnosti $D4$**.** Pokud se nám pomocí $D1$ až $D4$ podaří upravit matici na schodový tvar, její determinant je roven pouze součinu prvků na hlavní diagonále (ve všech dalších součinech musíme vybrat alespoň jednu nulu pod diagonálou, tj. zbývajících 23 součinů je rovno 0).

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\cdot r_1 \\ +r_1 \\ +3\cdot r_3 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-3)\cdot\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\0&1&-1&1\\0&1&1&3\\0&0&9&4\end{vmatrix}\begin{matrix}\\\\-r_2\\\\\end{matrix} = 3\cdot\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\0&1&-1&1\\0&0&2&2\\0&0&9&4\end{vmatrix} = 3\cdot2\cdot\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\0&1&-1&1\\0&0&1&1\\0&0&9&4\end{vmatrix}\begin{matrix}\\\\\\-9\cdot r_3\end{matrix} =$$

$$= 6\cdot\begin{vmatrix}1&2&-1&2\\0&1&-1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&-5\end{vmatrix} = -30.$$

D5. Laplaceův rozvoj determinantu podle k-tého řádku nebo l-tého sloupce. Tento rozvoj převádí výpočet jednoho determinantu řádu n na výpočet n determinantů řádu $n-1$:

Rozvoj podle i-tého řádku (i se nemění, mění se pouze index j):

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$$

kde A_{ij} jsou matice vzniklé z A vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Rozvoj podle j-tého sloupce (j se nemění, mění se pouze index i):

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$$

kde A_{ij} jsou matice vzniklé z A vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Důkaz: Plyne z definice determinantu pouhým rozepsáním:
Např. pro řádkový rozvoj: a_{ij} se vyskytuje v $(n-1)!$ součinech; když $(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}$ z těchto součinů vytkneme, v závorce se objeví $|A_{ij}|$ jako součet součinů $n-1$ prvků, tj. determinant řádu o 1 menšího.

Ad příklad 2. Vypočtěme $|A_2|, |A_3|, |A_4|$ kombinací vlastností $D1$ až $D5$:

$$|A_2| = \begin{vmatrix}1&2&1&1\\1&1&-1&2\\1&-1&2&1\\1&3&3&1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\-r_1\\-r_1\\-r_1\end{matrix} = \begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-2&1\\\mathbf{0}&\mathbf{-3}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\0&1&2&0\end{vmatrix} =$$

Rozvineme např. podle řádku 3 (přitom $|A_{kj}|$ je determinant matice, která vznikne z A vynecháním i- tého řádku a j-tého sloupce matice A, tj. vynecháním právě toho řádku a sloupce, kde se vyskytuje prvek a_{ij})[3]:

$$= (-1)^{3+1}\cdot\mathbf{0}\cdot|A_{31}|+(-1)^{3+2}\cdot(-\mathbf{3})\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot\mathbf{1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{3+4}\cdot\mathbf{0}\cdot|A_{34}| =$$

$$= 3\cdot(0+0+0-2-0-0)+(0+0+0-1-0-0) = -7$$

Tedy Laplaceův rozvoj je výhodné použít pro ten řádek či sloupec, který obsahuje větší počet nul.

$$|A_3| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ -r_1\\ -r_1\\ -r_1\end{matrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix} =$$

Rozvoj podle 1. sloupce:

$$= 1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix} = 0+0-2+6-0-0 = 4.$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 3 & 3\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ -r_1\\ -r_1\\ -r_1\end{matrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & -2 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 2 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +2\cdot r_2\\ -2\cdot r_2\end{matrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 6 & 3\end{vmatrix} =$$

Rozvoj podle 2. sloupce:

$$= (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}0 & -2 & -1\\ 0 & -3 & -5\\ 0 & 6 & 3\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -5\\ 0 & 6 & 3\end{vmatrix}+0+0 = -0-9+0+0-(-30)-0-0 = 21$$

Můžeme psát odpověď:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-30}{-6} = 5; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-7}{-6} = \frac{7}{6}; x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}; x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{21}{-6} = \frac{-7}{2}.$$

Řešení je jediné, vektorovým zápisem jej lze vyjádřit nejlépe:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ \frac{7}{6}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{-7}{2}\end{pmatrix}.$$

[3]Například $a_{32} = -3$ se vyskytuje ve třetím řádku a v druhém sloupci naší matice řádu 4, tj. $|A_{32}|$ je determinant matice z ní vzniklé vynecháním třetího řádku a druhého sloupce. Číslo (-1) je umocněno na $(3+2)$, což je součet indexů (pozic v řádku a sloupci) prvku a_{32}.

D6. Pokud některý řádek, např. l-tý je lineární kombinací jiných řádků, např. $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$, tak $|A| = 0$.

Důkaz: Velmi podobný důkazu $D4$: Jestliže:

$$\vec{a_l} = \alpha_1 \cdot \vec{a_1} + \alpha_2 \cdot \vec{a_2} + ... + \alpha_k \cdot \vec{a_k}$$

pak:

$$det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}, ..., \alpha_1 \cdot \vec{a_1} + \alpha_2 \cdot \vec{a_2} + ... + \alpha_k \cdot \vec{a_k}, ..., \vec{a_n}) \overset{D3}{=}$$
$$\overset{D3}{=} \alpha_1 \cdot det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_1}, ..., \vec{a_n}) + \alpha_2 \cdot det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}) +$$
$$... + \alpha_k \cdot det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_n}) \overset{D2}{=} 0,$$

protože každý z těchto dílčích determinantů se rovná 0 díky dvěma stejným řádkům (důsledek vlastnosti $D2$).

(jiný způsob důkazu: pokud nějaký řádek je lineární kombinací ostatních řádků, odečtením této lineární kombinace provádíme úpravu D4, která determinant nezmění – a dostaneme řádek samých nul, tj. podle definice determinantu do každého součinu vybereme z tohoto nulového řádku určitě vždy jedno číslo 0, čili determinant je roven nule)

Pokud vyjde čas: Poznámka o vektorovém součinu vektorů v dimenzi 3 – výpočet pomocí determinantu.

Pokud vyjde čas nebo na začátku třetí přednášky: Využití Laplaceova rozvoje a linearity determinantu při výpočtu determinantů velkého řádu (otázka k ústní zkoušce číslo 4).

2.2 Cvičení 2: Analytická geometrie v rovině – prověrka

Napište prověrku z tématu analytická geometrie. Typové příklady najdete v IS v interaktivní osnově předmětu.

3 Týden 3

3.1 Přednáška 3: Vektorový prostor, souřadnice vektoru v dané bázi, Gaussova eliminační metoda

3.A) Definice vektorového prostoru:

Základní pojmem, kterým se v tomto předmětu budeme zabývat, je pojem vektoru. Vektor je zobecněním pojmu reálné číslo – reálné číslo je určené svou velikostí, vektor je určený velikostí a směrem[4].

Začněme dnes u této představy vektoru jako „orientované úsečky“, u které je důležitý její směr[5] a její délka[6], a pokusíme se tuto představu vektoru nějak matematicky popsat, čili zpřesnit. Vodítkem budou vlastnosti, které platí pro vektory v rovině, viz následující příklad.

Příklad 3 *Uvažujme množinu V všech orientovaných úseček v rovině. Dvě orientované úsečky o stejné velikosti a směru budeme považovat za tentýž vektor (v analytické geometrii takovému pojetí vektoru v rovině říkáme „volný vektor“ ... můžeme vektorem v rovině rovnoběžně posouvat – pokud zůstává zachován jeho směr a velikost, jedná se pořád o tentýž vektor).*

Na této množině V definujme operaci sčítání vektorů následovně: vektor $\vec{a}+\vec{b}$ určíme tak, že ke koncovému bodu vektoru $\vec{a}$ rovnoběžně posuneme počáteční bod vektoru $\vec{b}$, pak vektor $\vec{c} := \vec{a}+\vec{b}$ je takový, že jeho počáteční bod je stejný jako počáteční bod $\vec{a}$ a jeho koncový bod je roven koncovému bodu $\vec{b}$.

Podobně definujme násobení vektoru reálným číslem $r \in R$ takto: Pokud $r = 0$, je $r \cdot \vec{a}$ roven nulovému vektoru., tj. úsečce nulové délky a jakéhokoli směru. Pokud $r > 0$, tak směr vektoru $r \cdot \vec{a}$ je stejný jako směr $\vec{a}$ a jeho velikost je r-násobkem velikosti vektoru $\vec{a}$. Pokud $r < 0$, tak směr vektoru $r \cdot \vec{a}$ je opačný ke směru $\vec{a}$ (při zachování rovnoběžnosti) a jeho velikost je $|r|$-násobkem velikosti vektoru $\vec{a}$.

Takto definovaná množina vektorů společně s takto definovanými operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem (jehož výsledkem je vektor) tvoří strukturu, kterou budeme nazývat vektorovým prostorem. Vlastnosti vektorového prostoru odvodíme z vlastností uvedených dvou operací na množině vektorů v rovině z příkladu 3:

[4] Vektor jako „šipka“ charakteristická velikostí a směrem slouží k popisu například a) posunutí v rovině, b) síly působící na těleso, c) rychlosti a směru pohybu objektu v prostoru – zkrátka řady veličin známých z různých oborů; tyto veličiny označujeme jako vektorové veličiny.

[5] Pojem směru vektoru souvisí s pojmem rovnoběžnosti dvou vektorů, které lze vzhledem k následující definici vektorového prostoru definovat velmi jednoduše: Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou rovnoběžné, jestliže existuje skalár s takový, že $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$. Pojem směru je tedy v následující definici „schovaný“, kdekoli násobíme nenulový vektor nenulovým skalárem – výsledkem je vektor rovnoběžný, tedy ve stejném směru.

[6] Pojem velikosti (délky) vektoru se zatím v následující definici vektorového prostoru nevyskytuje – souvisí totiž až se skalárním součinem, o kterém bude řeč v kapitole 9.

Definice 9 *Množina* $(V,+)$ *se nazývá* **vektorový prostor nad tělesem**[7] **skalárů** $(T,+,\cdot)$ *(její prvky* $\vec{v} \in V$ *se nazývají* **vektory**, *prvky tělesa* T *se nazývají* **skaláry**), *jestliže*

a) *Struktura* $(V,+)$ *je komutativní grupa, tj.*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \ : \ \vec{u} + \vec{v} \in V$ *(uzavřenost operace + na V),*

2. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \ : \ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ *(asociativita operace +),*

3. $\exists \vec{o} \in V \ : \ \vec{u} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{u} \ \ \forall \vec{u} \in V$ *(existence neutrálního prvku),*

4. $\forall \vec{u} \in V \ \exists \, (-\vec{u} \in V \ : \ \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$ *(existence inverzí vzhledem k operaci +),*

5. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \ : \ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ *(komutativita operace + na V).*

b) *Zobrazení* $\cdot$ *množiny* $T \times V$ *do* V *(= násobení SKALÁR KRÁT VEKTOR) splňuje vlastnosti „příbuzné“*[8] *vlastnostem operace na monoidu:*

"1" $\forall \, t \in T, \ \vec{v} \in V \ : \ t \cdot \vec{v} \in V$ *(uzavřenost součinu skalár krát vektor),*

"2" $\forall \, s,t \in T, \ \vec{v} \in V \ : \ s \cdot (t \cdot \vec{v}) = (s \cdot t) \cdot \vec{v}$ *(pro jednoduchost označujeme součin mezi skaláry a součin skalár krát vektor stejným symbolem),*

"3" $\exists \, 1 \in T \ : \ 1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \ \ \forall \, v \in V$ *(existence jednotkového skaláru vzhledem k násobení skalár krát vektor).*

c) *Souhra operace + a operace skalár krát vektor splňuje vlastnosti*[9]*:*

"6a" $\forall \, s,t \in T, \ \vec{v} \in V \ : \ (s+t) \cdot \vec{v} = s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{v},$

"6b" $\forall \, t \in T, \ \vec{u}, \vec{v} \in V \ : \ t \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}.$

Poznámka. Jak si dobře zapamatovat druhých pět z deseti vlastností definice: v žádné z těchto vlastností se nevyskytuje součin dvou vektorů (skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se v definici vektorového prostoru nevyskytuje), pouze součin dvou skalárů nebo součin skalár krát vektor. Definici skalárního součinu vektorů (násobíme dva vektory, výsledkem je skalár) uvedeme v některé z následujících kapitol.

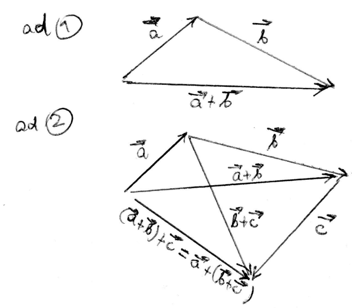
Ad příklad 3. V je množina volných vektorů v rovině nad tělesem R. Uvedených deset vlastností vektorů jsme vlastně z příkladu volných vektorů v rovině odvodili, tj. všechny vlastnosti lze dokázat-reprezentovat obrázky:

1. Vlastnosti 1 až 5 jsme už zkoumali v algebře 1 – tyto vlastnosti platí i pro operaci sčítání vektorů. Součtem dvou volných vektorů v rovině je také vektor (viz obr.).

[7] Těleso T je zde důležité proto, že pomocí něj za chvíli budeme vyjadřovat souřadnice vektorů. Např. Pokud $T = R$, souřadnicemi budou reálná čísla; pro $T = Q$ budou souřadnicemi racionální čísla.

[8] S tím rozdílem, že se nejedná o operaci na jedné množině, ale o součin prvků ze dvou různých množin – součin skaláru s vektorem.

[9] S trochou fantazie bychom je mohli nazvat "distributivní zákony" okruhu, ale uvozovky jsou důležité, protože se nejedná o dvě operace na stejné množině, ale o jednu operaci na množině a o zobrazení $T \times V \to V$ (což by bylo možné algebraicky nazvat jako akci tělesa na grupě: prvky z tělesa násobíme prvky grupy, a dostáváme jiné prvky grupy); a distributivní zákony v okruhu jsou sice dva, ale liší se jen díky nekomutativnímu násobení – zde u vektorového prostoru jsou "distributivní zákony" z jiných důvodů (v jednom zákonu sčítáme skaláry, ve druhém sčítáme vektory).



2. (viz obrázek) důkaz asociativity sčítání volných vektorů je proveden graficky.

3. Nulový vektor má nulovou velikost (a jeho směr je libovolný), proto jej na obrázku na následující straně nevidíte.

4. Opačný vektor (= inverzní vektor vzhledem k operaci sčítání) má stejnou velikost, ale opačný směr.

5. Sčítání volných vektorů splňuje komutativní zákon.

Právě uvedené vlastnosti 1 až 5 lze popsat (viz Algebra 1) tím, že V je vzhledem ke sčítání komutativní grupa. Ovšem Následujících pět vlastností je pro vektory specifických a ještě jsme se jimi v algebře nezabývali.

"1" Vlastnost "1" tvrdí, že s každým vektorem $\vec{u}$ obsahuje prostor volných vektorů i nekonečně[10] mnoho dalších vektorů, které vzniknou jako reálné násobky vektoru $\vec{u}$.

"2" Nezáleží na tom, zda nejdříve vynásobíme dva skaláry, a pak jimi vynásobíme vektor, nebo zda násobení vektoru provedeme postupně dvěma skaláry – výsledek je stejný.

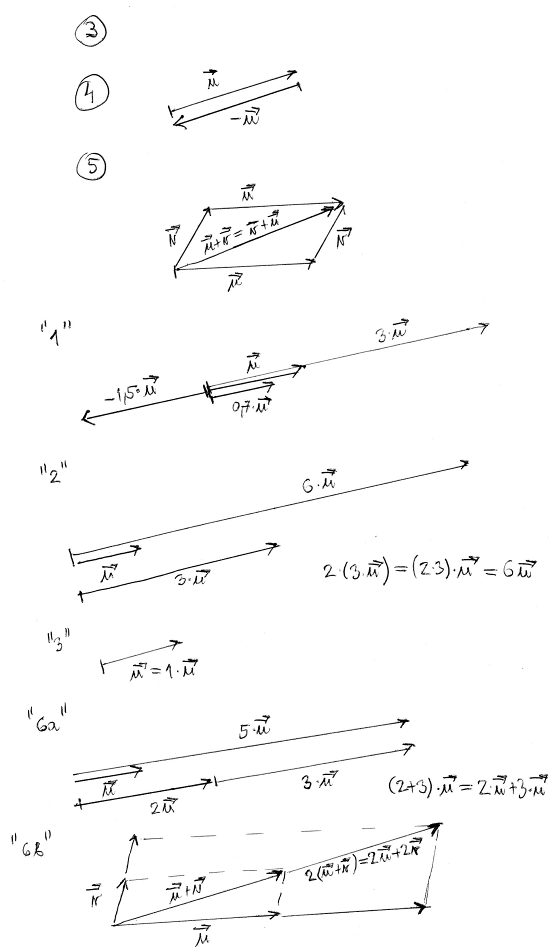
"3" Existuje jednotkový skalár – vynásobením volného vektoru $\vec{u}$ konstantou 1 se nezmění jeho velikost ani směr.

"6a" Nezáleží na tom, zda nejprve sečteme skaláry, a výsledkem vynásobíme vektor, nebo zda nejprve provedeme dvojí násobení skalár krát vektor, a výsledné vektory sečteme.

"6b" To, že nejprve sečteme vektory, a pak až vynásobíme skalárem je totéž, jako bychom oba vektory nejdříve vynásobili skalárem, a pak je sečetli.

Příklad 4 *Dalším příkladem prostoru vektorového je* $(R_3[x], +, \cdot)$ … *množina všech polynomů stupně nejvýše* 3 *nad tělesem* R*. Přesný důkaz bychom mohli provést pro obecně*

[10] To bude hrát roli u množiny generátorů vektorového prostoru, kterou budeme studovat podobně jako množiny generátorů grupy. Vzhledem k povaze (nekonečnosti) tělesa R jeden nenulový vektor generátor svými násobky skalárem vygeneruje nekonečně mnoho dalších vektorů.



označené skaláry s, t a obecně značené polynomy

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= u_3 \cdot x^3 + u_2 \cdot x^2 + u_1 \cdot x + u_0,\\
\vec{v} &= v_3 \cdot x^3 + v_2 \cdot x^2 + v_1 \cdot x + v_0,\\
\vec{w} &= w_3 \cdot x^3 + w_2 \cdot x^2 + w_1 \cdot x + w_0.
\end{aligned}$$

Ale zkusme místo důkazu tyto vlastnosti raději jen ilustrovat na třech konkrétních polynomech

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= 2x^3 + x^2 - 5x + 1,\\
\vec{v} &= 3x^3 + 5x^2 + x - 2,\\
\vec{w} &= 2x^3 + x^2 - 3x + 3.
\end{aligned}$$

1. $\vec{u} + \vec{v} = 5x^3 + 6x^2 - 4x - 1$ *je opět polynomem stupně nejvýše 3.*[11]

[11] Zde je důležité, že do množiny $R_3[x]$ patří i polynomy stupně nižšího, například i stupně 2, protože např. pro $\vec{u} = x^3 - 2x^2 + 5$ a $\vec{v} = -x^3 + 2x - 1$ je $\vec{u} + \vec{v} = -2x^2 + 2x + 4$ ... kdyby v množině $R_3[x]$ byly jen polynomy třetího stupně, nebyla by uzavřená na operaci součtu!!

2. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = 7x^3+7x^2-7x+1 = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

3. *Neutrálním polynomem je* $\vec{o} = 0$, *jeho přičtením k libovolnému polynomu se ten nezmění.*

4. *Opačným vektorem je* $-\vec{u} = -2x^3 - x^2 + 5x - 1$, $-\vec{v} = -3x^3 - 5x^2 - x + 2$, *atd.*

5. *Evidentně platí* $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$, *ať už pro naše dva zvolené vektory, nebo jakékoliv dva vektory.*

"1" *Násobení polynomu reálným skalárem se realizuje vynásobením každého koeficientu zvlášť, jak jsme zvyklí násobit polynom reálným číslem. Například*

$$2 \cdot \vec{u} = 4x^3 + 2x^2 - 10x + 2.$$

Důležité je, že násobením polynomu jakýmkoli reálným číslem se nezmění fakt, že výsledek je (kromě násobení nulou) polynom třetího stupně, tj. množina $(R_3[x], +)$ *je uzavřená na násobky reálnými čísly.*

"2" *Například* $(2 \cdot 3) \cdot \vec{u} = 2 \cdot (3 \cdot \vec{u}) = 12x^3 + 6x^2 - 30x + 6$.

"3" $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ *pro jakýkoli prvek* $\vec{u}$ *dané množiny.*

"6a" *Například* $(2+3) \cdot \vec{u} = 2 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{u} = 10x^3 + 5x^2 - 25x + 5$, *a je vidět, že rovnost platí pro libovolné prvky daných typů.*

"6b" *Například*

$$2 \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = 2 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} = 10x^3 + 12x^2 - 8x - 2,$$

a je snad vidět, že rovnost platí pro libovolné prvky daných typů.

Příklad 5 *Množina* $(C\langle a;b\rangle, +, \cdot)$ *spojitých reálných funkcí na intervalu* $\langle a;b\rangle$, *s přirozeně definovanými operacemi součtu funkcí a vynásobení funkce reálný skalárem, je vektorovým prostorem!! Tento příklad je důležitý, neboť vidíme, že pojem vektoru je jak zobecněním pojmu číslo, tak zobecněním pojmu spojitá funkce. Opět se zde objevují ambice algebry hledat společné či stejné vlastnosti mezi různými strukturami – řada vlastností, které známe hlavně u prvků aritmetického vektorového prostoru (což je vlastně příklad 1, ale ještě na prostoru volných vektorů v příkladu 1 musíme zavést souřadnice), je stejných jako vlastnosti funkcí spojitých na intervalu.*

1. *Definujeme součet funkcí* $\forall f(x), g(x) \in C\langle a;b\rangle$: $f(x)+g(x)$ *je opět spojitou funkcí na* $\langle a;b\rangle$.

2. $\forall f(x), g(x), h(x) \in C\langle a;b\rangle \ : \ (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) \ \ \forall x \in \langle a;b\rangle$, *což plyne z asociativity sčítání reálných čísel.*

3. *Neutrálním prvkem je funkce* $e(x) = 0 \ \ \forall x \in \langle a;b\rangle$, *protože* $f(x)+e(x) = f(x) \ \ \forall x \in \langle a;b\rangle$.

4. $\forall f(x) \in C\langle a;b\rangle \ \ \exists(-f(x)) \in C\langle a;b\rangle$: $f(x) + (-f(x)) = e(x) = 0$.

5. $\forall f(x), g(x) \in C\langle a;b\rangle: \quad f(x)+g(x) = g(x)+f(x).$

"1" $\forall s \in R, \quad f(x) \in C\langle a;b\rangle: \quad s \cdot f(x) \in C\langle a;b\rangle.$

"2" $\forall r,s \in R, \quad f(x) \in C\langle a;b\rangle: \quad (r\cdot s)\cdot f(x) = r\cdot(s\cdot f(x)).$

"3" $\exists\ 1 \in R: \quad 1\cdot f(x) = f(x) \ \ \forall f(x) \in C\langle a;b\rangle.$

"6a" $\forall r,s \in R, \quad f(x) \in C\langle a;b\rangle: \quad (r+s)\cdot f(x) = r\cdot f(x) + s\cdot f(x).$

"6b" $\forall r \in R, \quad f(x), g(x) \in C\langle a;b\rangle: \quad r\cdot(f(x)+g(x)) = r\cdot f(x) + r\cdot g(x).$

Příklad 6 $V = \{\vec{o}\}$ *… nejmenší možný vektorový prostor je prostor, který obsahuje pouze nulový vektor.*

3.B) Báze a dimenze vektorového prostoru, souřadnice vektoru v zadané bázi:

Klíčovou konstrukcí či výpočtem bude při naší práci s vektory zjišťování, zda je určitý vektor lineární kombinací (= součtem násobků) jiných vektorů.

Definice 10 a) *Definice lineární kombinace viz (definice7).*

b) *Posloupnost vektorů $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ je lineárně závislá, když některý z vektorů je lineární kombinací těch ostatních vektorů.*[12] *V opačném případě je posloupnost vektorů $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ lineárně nezávislá.*

Poznámka. U rovnosti a) v předchozí definici také říkáme, že vektor $\vec{a_k}$ je lineárně závislý na vektorech $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_{k-1}}$.

Podobně jako při studiu grup a okruhů, i u vektorových prostorů se budeme zabývat množinou vektorů, která generuje (= vytváří jistým přesně popsaným způsobem) celý vektorový prostor. Pokud uvážíme, že vynásobení vektoru skalárem vygeneruje nekonečně mnoho dalších vektorů různých délek, asi se často budeme setkávat se situací, kdy i pro nekonečnou množinu V bude množina generátorů (co do počtu prvků) celkem málo početná. Z těchto množin generátorů budeme ještě vybírat co nejmenší počet lineárně nezávislých vektorů, které vygenerují celý vektorový prostor – posloupnost těchto vektorů nazveme bází.

Definice 11 *Uvažujme vektorový prostor $(V,+)$ nad tělesem $(T,+,\cdot)$. Posloupnost vektorů $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k})$ nazveme* **bází vektorového prostoru** $(V,+)$*, pokud platí obě z podmínek*

[12] Alternativní definice lineární závislosti, kterou zkoušejí někteří kolegové: rovnice

$$\alpha_1 \cdot \vec{a_1} + \alpha_2 \cdot \vec{a_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{a_k} = \vec{o}$$

má i jiné než nulové řešení, tj. $\exists \alpha_i \neq 0$ takové, že rovnice platí. Tímto α_i bychom rovnici vydělili a vyjádřili z ní $\vec{a_i}$ jako lineární kombinaci vektorů ostatních, takže je vidět, že obě definice lineární závislosti vektorů jsou logicky ekvivalentní.

a) *tato posloupnost vektorů je lineárně nezávislá (žádný z vektorů nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních);*

b) *každý vektor $\vec{v} \in V$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci,*

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + \cdot + \alpha_k \cdot \vec{u_k},$$

tj. vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}$ generují celý prostor[13].

Dále **dimenze vektorového prostoru** $(V, +)$ *znamená počet vektorů nějaké jeho báze. A navíc, čísla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ z vyjádření vektoru $\vec{v}$ pomocí bázických vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}$ nazveme* **souřadnicemi vektoru $\vec{v}$ vzhledem k bázi** $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k})$.

Příklad 7 *Tři otázky pro vektory z aritmetického vektorového prostoru R^3 uspořádaných trojic reálných čísel.*

a) *Jsou vektory* $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *lineárně závislé?*

b) *Jsou vektory* $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *lineárně závislé?*

c) *Jsou vektory* $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *lineárně závislé?*

Řešení:

ad a) Ano, nulový vektor je vždy lineárně závislý na ostatních vektorech, protože je jejich 0-násobek: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ad b) Nejsou, protože neexistuje reálné číslo α, že $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ad c) Nejsou, protože (postupujeme krok za krokem) je lze seřadit do takové posloupnosti, že

- $\vec{u_1}$ je nenulový,
- $\vec{u_2}$ není reálným násobkem vektoru $\vec{u_1}$,

[13] Alternativní vyjádření obou podmínek: ad b) dané vektory generují celý prostor, ad a) a žádný z nich není nadbytečný v tom smyslu, že by byl lineární kombinací těch ostatních.

- a $\vec{u_3}$ není lineární kombinací vektorů $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ – protože neexistují reálná čísla α_1, α_2 tak, aby
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
(v rovnici $1 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0$ sestavené ze třetích souřadnic předchozí vektorové rovnice žádná vhodná reálná čísla α_1, α_2 jako její řešení nenajdeme).

Z řešení příkladu (7-c) plyne obecný postup při sestavování báze nějakého vektorového prostoru:

- $\vec{u_1}$ ... zvolíme jakýkoliv nenulový vektor z V;
- $\vec{u_2}$ ... zvolíme takový vektor z V, který není násobkem vektoru $\vec{u_1}$;
- $\vec{u_3}$ ... zvolíme takový vektor z V, který není lineární kombinací vektorů u_1, u_2.
- atd.

Příklad 8 **a)** *Bází prostoru R^3 je například posloupnost vektorů*

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(říkáme jí standardní báze – jedná se o bázi, kterou běžně volíme v Kartézské souřadné soustavě ve třídimenzionálním aritmetickém vektorovém prostoru R^3).

b) *Bází prostoru R^n je nějaká (jakákoli) posloupnost n nezávislých vektorů, dimenze R^n je rovna n.*

c) *Bází prostoru $(R_n[x], +, \cdot)$ všech polynomů stupně nejvýše n je například posloupnost polynomů $(1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n)$, tj. dimenze $R_n[x]$ je rovna $(n + 1)$.*

d) *Bází prostoru $(C\langle a; b\rangle, +, \cdot$ všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a; b\rangle$ je například nekonečná posloupnost funkcí $(1, x, x^2, x^3, \ldots)$, nebo nekonečná posloupnost $(1 \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots)$. Jinými slovy, dimenze $C\langle a; b\rangle = \infty$.*

Příklad 9 *Je posloupnost vektorů $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bází prostoru R^3?*

Ano, každý prostor má řadu různých bází, které mají stejný počet prvků – tato báze je bází stejného prostoru jako báze v příkladu (8-a).

Příklad 10 *Vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ v bázi*

a) $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Řešení: ad a) ve standardní bázi jsou už hodnoty 1,2,3 přímo souřadnicemi. ad b) řešení: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}_{\underline{u}}.$

V úlohách typu příkladu (10-b) při hledání souřadnic vektoru v nějaké bázi daného vektorového prostoru, zejména pokud je to aritmetický vektorový prostor (tedy prostor n-tic reálných čísel, s operacemi „sčítání po složkách“ a násobení každé složky skalárem), řešíme vlastně systém lineárních rovnic.

3.C) 2. metoda řešení SLR – Gaussova eliminace:

Po Cramerově pravidlu druhá metoda řešení SLR, kterou se budeme zabývat, je **Gaussova eliminační metoda**. Je to vlastně vylepšená (upravená) sčítací metoda ze ZŠ – pouze si ve sčítání rovnic vytvoříme určitý systém. Nejprve si ovšem řekněme, co to jsou elementární řádkové úpravy systému lineárních rovnic a jak souvisí s množinou řešení tohoto systému:

Definice 12 *Při řešení* **systému lineárních rovnic (SLR)**

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n &= b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n &= b_m, \end{aligned}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}$ jsou konstanty a $x_i \in \mathbb{R}$ jsou neznámé,
jsou následující úpravy označovány za **elementární řádkové úpravy***:*

a) *vynásobení některé rovnice nenulovým reálným číslem,*

b) *záměna pořadí dvou rovnic,*

c) *k dané rovnici přičteme lineární kombinaci jiných rovnic.*

Věta 3 *Elementární řádkové úpravy SLR nemění množinu řešení tohoto systému.*

Důkaz:

a) Jasné - rovnici lze vynásobit nenulovým reálným číslem, aniž se změní její řešení,

b) Jasné - na pořadí rovnic v systému nezáleží,

c) Jestliže v systému (který může mít i další rovnice, ty se ale nyní nemění)

$$\begin{aligned} a_{k1}\cdot x_1 + a_{k2}\cdot x_2 + \ldots + a_{kn}\cdot x_n &= b_k; \\ a_{l1}\cdot x_1 + a_{l2}\cdot x_2 + \ldots + a_{ln}\cdot x_n &= b_l / + \alpha_k \cdot r_k \end{aligned}$$

k-tou rovnici vynásobíme α_k a přičteme k l-té rovnici, dostaneme systém

$$\begin{aligned} a_{k1}\cdot x_1 + a_{k2}\cdot x_2 + \ldots + a_{kn}\cdot x_n &= b_k; \\ (a_{l1}\cdot x_1 + a_{l2}\cdot x_2 + \ldots + a_{ln}\cdot x_n) + \alpha_k \cdot (a_{k1}\cdot x_1 + a_{k2}\cdot x_2 + \ldots + a_{kn}\cdot x_n) &= b_l + \alpha_k \cdot b_k, \end{aligned}$$

u které je snad jasné, že jeho množina řešení je stejná jako množina řešení systému předchozího. Nyní jen pomocí přehození pořadí členů a vytknutí x_i pro všechna i ve druhé uvedené rovnici (což můžeme provést díky distributivitě operací sčítání a násobení v tělese reálných čísel) upravme na systém

$$\begin{aligned} a_{k1}\cdot x_1 + a_{k2}\cdot x_2 + \ldots + a_{kn}\cdot x_n &= b_k; \\ (a_{l1} + \alpha_k \cdot a_{k1})\cdot x_1 + \ldots + (a_{ln} + \alpha_k \cdot a_{kn})\cdot x_n &= b_l + \alpha_k \cdot b_k, \end{aligned}$$

jehož množina řešení je tatáž. Zdůvodnění je hotovo. $\square$

Nyní vysvětlíme Gaussovu eliminaci (vylepšenou sčítací metodu) na příkladu, ve kterém budeme dělat právě jen tři popsané elementární řádkové úpravy, jejichž použití nemění množinu řešení daného SLR:

Příklad 11 *Na množině reálných čísel řešte systém lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x - y + z &= 8 \\ 3x \qquad - z &= 3. \end{aligned}$$

Řešení: Tento systém lineárních rovnic si přepíšeme do naší staré známé **matice** (viz definice 1). Tuto matici pomocí tzv. **řádkových elementárních úprav** převedeme na tzv. schodový tvar (definice 8 – sice jsme se seznámili se schodovým tvarem už u determinantu, ale tento pojem nevyžaduje, aby matice A byla čtvercová; A je obecně typu $m \times n$).

Tento způsob řešení není až zas tak docela studentům neznámý, pravděpodobně jím řešili systém dvou rovnic tzv. sčítací metodou. Jediná novinka spočívá nyní v tom, že celý momentální stav sčítací metody máme neustále před očima v našem maticovém schématu.

Naší první úpravou schématu tří rovnic bude: a) první rovnici necháme beze změny; b) od druhé rovnice odečteme dvojnásobek první rovnice; c) od třetí rovnice odečteme trojnásobek první rovnice. Tímto způsobem eliminujeme z první i druhé rovnice neznámou x.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot r_1 \\ -3\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\left(\frac{-1}{5}\right) \\ \cdot\left(\frac{-1}{2}\right) \end{array} \sim$$

Druhou úpravou schématu bude jen jisté kosmetické zjednodušení: druhou rovnici vydělíme minus pěti (tj. vynásobíme číslem $\frac{-1}{5}$), druhou vydělíme minus dvěma (tj. vynásobíme číslem $\frac{-1}{2}$). Znak $\sim$ tedy představuje takovou úpravu systému rovnic, která nemění jeho množinu řešení.

Následující úprava systému rovnic bude spočívat v tom, že první dvě rovnice necháme beze změny a od třetí rovnice odečteme trojnásobek druhé rovnice – tím pádem se na druhé pozici třetího řádku objeví nula, neboli ze třetí rovnice eliminujeme proměnnou y:

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3\cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Dospěli jsme ke tvaru označovanému jako schodový tvar – v každém dalším řádku je více nul zleva než v tom předchozím. Nyní se opět vrátíme k významům řádků jako rovnic, tj. první sloupec odpovídá koeficientům u proměnné x, druhý sloupec koeficientům u proměnné y, třetí sloupec koeficientům u proměnné z.

Nasaďme při hledání řešení něco jako „zpětný chod“, tj. při výpočtu řešení začneme s posledním řádkem matice, který představuje nejjednodušší rovnici: $2z = 6$, odtud $z = 3$. Jdeme „o patro výš“, do rovnice $y + z = 2$ dosadíme právě vypočtené $z = 3$ a dostaneme $y = -1$. A nakonec obě dosud vypočtené proměnné dosaďme do první rovnice $x+2y+3z = 9$ a dostaneme $x = 2$. Řešení našeho systému lineárních rovnic (SLR) je jediné – $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.

Příklad 12 *Podívejme se na další příklad, ve kterém dojde k tomu, že možných řešení bude nekonečně mnoho. I tak se je budeme snažit matematicky popsat, tj. vypsat množinu všech možných řešení. Na množině reálných čísel řešte systém lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 5w &= 3, \\ 2x + 5y - z - 9w &= -3, \\ 2x + y - z + 3w &= -11, \\ x - 3y + 2z + 7w &= -5 \end{aligned}$$
.

Použijme opět na předchozím příkladu vyloženou Gaussovu eliminaci, tj. přepišme si koeficienty i pravé strany rovnic do matice a upravme ji, jako i v předchozím příkladu, na schodový tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ -2\cdot r_1 \\ -2\cdot r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & -5 & 13 & -17 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{array}\right) \cdot(-1) \text{ a výměna se 2. řádkem}$$

(vyměníme druhý a třetí řádek, protože na pozici 22, tj. na průsečíku druhého řádku a druhého sloupce, bude číslo 1, pomocí něhož lépe odečteme hodnoty 3 a -4 ve druhém sloupci, které se v dalším kroku snažíme vhodným přičtením násobku druhého řádku vynulovat)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 17 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ -3\cdot r_2 \\ +4\cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & -20 & 40 & -60 \\ 0 & 0 & 20 & -40 & 60 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ \cdot\frac{(-1)}{20} \\ +r_3 \end{array} \sim$$

a je vidět, že přičtením třetího řádku ke čtvrtému dostaneme ve schodovém tvaru řádek samých nul:

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nenulových řádků ve schodovém tvaru je méně než počet neznámých, řešení našeho **systému lineárních rovnic (SLR)** bude nekonečně mnoho. Výsledek bude obsahovat tzv. parametr nebo parametry (= proměnné, za které můžeme dosadit libovolné reálné číslo), jejich počet je roven

$$\begin{aligned} \textbf{počet parametrů} &= \textbf{počet neznámých MINUS počet nenul. řádků ve schodovém tvaru}, \\ 1 &= 4-3, \end{aligned}$$

řešení v našem příkladu bude obsahovat jeden parametr $p \in R$. Nasadíme nyní „zpětný chod“ dosazování do rovnic a pro poslední řádek schodového tvaru máme rovnici

$$z - 2w = 3.$$

Jednu z neznámých v této rovnici, například w, položíme rovnu parametru p, tj. $w = p$. Druhou vyjádříme: $z = 3 + 2p$. Obě takto vyjádřené neznámé w, z dosadíme do rovnice „o patro výš“ a dostaneme vyjádření pro y:

$$y + 5\cdot(3+2p) - 13p = 17 \quad\Rightarrow\quad y = 2 + 3p.$$

A konečně všechny dosud vyjádřené neznámé y, z, w dosadíme do rovnice v prvním řádku schodového tvaru a dostaneme vyjádření neznámé x:

$$x + (2+3p) + 2\cdot(3+20) - 5p = 3 \quad\Rightarrow\quad x = -5 - 2p.$$

Zbývá přehledně zapsat odpověď: daný systém lineárních rovnic (SLR) má nekonečně mnoho řešení tvaru

$$\begin{aligned} x &= -5 - 2p, \\ y &= 2 + 3p, \\ z &= 3 + 2p, \\ w &= p, \qquad\qquad \text{kde } p \in R \quad \text{je parametr.} \end{aligned}$$

Pokud bychom se už s předstihem pokusili o vektorový zápis, vidíme, že množinou řešení je přímka ve čtyřrozměrném prostoru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{pro} \quad p \in R.$$

(tato přímka prochází bodem $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ a má směrový vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Příklad 13 *V dalším našem příkladu se při zápisu řešení SLR bude vyskytovat více než jeden parametr*[14]*: Řešte v oboru reálných čísel systém lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad - 3x_4 + x_5 \qquad\quad &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 3x_4 + 2x_5 + x_6 &= 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 &= 9. \end{aligned}$$

Upravme náš systém čtyř rovnic o šesti neznámých na schodový tvar a dostaneme:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -3 \cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ -r_2 - r_3 \end{array} \sim$$

(po odečtení druhého a třetího řádku najednou od řádku čtvrtého se čtvrtý řádek vynuluje)

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

[14]Velmi důležitý příklad, ze kterého je vidět, kterým proměnným hodnoty parametrů vlastně přiřazujeme. Vděčím za něj svému bývalému kolegovi doc. Marinu Kovárovi (Kovár: Maticový a tenzorový počet, skriptum VUT Brno).

Podle stejného pohledu jako v předchozím příkladě vidíme, že

$$\begin{aligned} \textbf{počet parametrů} &= \textbf{počet neznámých MINUS počet nenul. řádků ve schodovém tvaru}, \\ 3 &= 6-3, \end{aligned}$$

budeme tedy potřebovat tři reálné proměnné r, s, t jako parametry. Nyní při zpětném chodu si ovšem musíme dát pozor, které neznámé zvolit jako proměnné. Například když začneme poslední nenulovou rovnicí zdola

$$x_5 + x_6 = 2,$$

nelze jako neznámý parametr volit obě tyto proměnné, ale pouze jednu ($x_6 = t$), protože druhou proměnnou x_5 právě v závislosti na proměnné x_6 z rovnice vyjádříme: $x_5 = 2 - t$.

„O patro výše“ máme rovnici

$$x_3 + 2x_6 = 1,$$

do které dosadíme vyjádření $x_6 = t$ a dostaneme vyjádření proměnné x_3. Vidíme, že $x_3 = 1 - 2t$.

A v nejvyšším patře, na prvním řádku matice, máme rovnici, do které dosadíme už vyjádřené neznámé x_3, x_5, x_6, a protože rovnice obsahuje ještě tři další proměnné, dvě z nich položíve rovny našim připraveným parametrům r, s (věděli jsme ze schodového tvaru, že ještě dva parametry využijeme)

$$x_1 + 2x_2 + 0 \cdot (1-2t) - 3x_4 + (2-t) + 0 \cdot t = 2.$$

Volíme například $x_2 = r$, $x_4 = s$ a dostaneme $x_1 = t - 2r + 3s$. Sestavíme přehledně odpověď našeho příkladu:

$$\begin{aligned} x_1 &= t - 2r + 3s, \\ x_2 &= r, \\ x_3 &= 1 - 2t, \\ x_4 &= s, \\ x_5 &= 2 - t, \\ x_6 &= t, \qquad \text{kde } r, s, t \in R \quad \text{jsou parametry.} \end{aligned}$$

Při vektorovém zápisu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pro} \quad r, s, t \in R.$$

vidíme, že množina řešení SLR je určena bodem a lineární kombinací tří vektorů, kterou přičítáme k danému bodu.

Příklad 14 *Ne vždy existuje řešení systému lineárních rovnic: Při řešení SLR*

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 5, \\ x + 3y + 5z + 7w &= 11, \\ x \qquad - z - 2w &= -6 \end{aligned}$$

dostaneme úpravou na schodový tvar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +2r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Poslední rovnice schodového tvaru je tedy

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot w = 1,$$

a tato rovnice, a tím ani celý SLR nemá řešení.

Poznámka k časté chybě u Gaussovy eliminace. Uvedené úpravy rovnic musí mít nějaká pravidla: snažíme se o takové úpravy řádků neboli rovnic, které jsou povoleny v tom smyslu, že nemění množinu řešení daného systému. Musíme si dát pozor, abychom neprovedli takovou úpravu, ve které by se ztratila informace uchovávaná v některé z rovnic. Například následující úprava systému rovnic není povolena:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_3 \\ -r_2 \end{array}$$

Právě uvedený systém dvou úprav je nesprávný v tom smyslu, že vlastně tutéž úpravu děláme dvakrát (až na znaménko) a napíšeme ji do dvou různých řádků. To vede na **nesprávný schodový tvar a nesprávný výpočet řešení**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{r} x_1 = 2 - p; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = p. \end{array}$$

Nejedná se o ekvivalentní úpravu, protože jsme ztratili informace obsažené v původní třetí rovnici, která není lineárně závislá na druhé rovnici. Ke správnému řešení vede kaskáda úprav

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ -2 \cdot r_1 \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \cdot(-1) \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{r} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{array}$$

nebo tzv. série úprav pomocí jednoho řádku, tzv. pivotového řádku (pivotový řádek je jediným řádkem, jehož násobky odečítáme od ostatních řádků v jednom kroku)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\cdot r_1 \\ -2\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ -2\cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{r} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{array}$$

Pozor tedy na „zacyklenou“ úpravu v úvodu této poznámky, kterou není povoleno provést v jednom kroku úprav dané matice.

3.D) Co lze říci o řešitelnosti systému lineárních rovnic:

Definice 13 Hodnost matice *A (typu m/n) = počet nenulových řádků ve schodovém tvaru, který vznikne z matice A elementárními řádkovými úpravami.*

Poznámka:

1) Na základě věty 7 (elementární řádkové úpravy nemění lineární závislost/nezávislost řádků) můžeme definici hodnosti matice A vyslovit i jinak: <u>hodnost matice A</u> = dimenze vektorového prostoru generovaného jejími řádky.

2) Protože z řádků matice A lze vybrat bázi podprostoru těmito řádky generovaného (tak, že vyřadíme řádky lineárně závislé na těch bázických), v příslušném schodovém tvaru budou nebázické řádky právě řádky samých nul.

Definice 14 *Uvažujme obecný SLR. Pak:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \textit{ se nazývá } \textbf{matice systému},$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \textit{ se nazývá } \textbf{rozšířená matice } \textit{SLR.}$$

Věta 4 *$h(A) = h(A^T)$...hodnost matice A je stejná jako hodnost matice transponované A^T.*

Důkaz: Důkaz nebudeme provádět, ale věta je tak zajímavá, že je dobré ji na tomto místě zmínit.

Poznámka. Věta 4 vlastně říká, že maximální počet lineárně nezávislých řádků matice A (tj. dimenze podprostoru generovaného řádky) je stejné číslo, jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice A (tj. dimenze podprostoru generovaného sloupci), a to bez ohledu na typ matice.

Např. pokud je A typu 3/7 a $h(A) = 2$, znamená to, že dimenze podprostoru generovaného sloupci je také 2, a při hledání báze podprostoru generovaného sloupci musíme 5 sloupců vyloučit.

Věta 5 Frobenius-Kronecker-Capelli: *SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení* $\Leftrightarrow h(A) = h(A|b)$. *Přitom*

a) *Nemá žádné řešení, pokud* $h(A) < h(A|b)$,

b) *Má právě jedno řešení, pokud* $h(A) = h(A|b) = n$,

c) *Má nekonečně mnoho řešení, pokud* $h(A) = h(A|b) < n$. *kde* n *je počet neznámých SLR.*

Důkaz: SLR má řešení $[t_1, t_2, ..., t_n]$ (ta n-tice je jen jedno řešení, nikoli n řešení). Pak:

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot t_1 + a_{12} \cdot t_2 + ... + a_{1n} \cdot t_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot t_1 + a_{22} \cdot t_2 + ... + a_{2n} \cdot t_n & = & b_2 \\ ... & & \\ a_{m1} \cdot t_1 + a_{m2} \cdot t_2 + ... + a_{mn} \cdot t_n & = & b_m \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot t_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot t_2 + ... + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot t_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

tj. sloupec béček je lineární kombinací sloupců áček (je tedy na nich lineárně závislý), tj. přidáním vektoru béček ke sloupcům áček se nezmění dimenze prostoru generovaného sloupci áček. A protože $h(A) = h(A^T)$ (věta 4), je sloupcová hodnost totéž co řádková hodnost. Tedy řešení $[t_1, t_2, ..., t_n]$ existuje právě tehdy, když vektor béček nemění sloupcovou-řádkovou hodnost matice A.

Zbytek důkazu viz příklady 11, 12, 13, 14. $\square$

3.2 Cvičení 3

- Výpočet determinantu pomocí Laplaceova rozvoje.
- Výpočet determinantu úpravou na schodový tvar.
- Využití linearity při Laplaceově rozvoji pro pátý a vyšší řád – viz ústní otázka 04 v kapitole 13.
- Vypočtěte determinant čtvercové matice, jakou metodou nebo kombinací metod považujete za vhodné.

Úloha 3.1 *Je dána matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Vypočítejte determinant matice A úpravami D1 až D4 na schodový tvar.

b) Jaké znaménko by měl při výpočtu determinantu z definice pro matici A součin $a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42}$, pokud byste použili vzorec z definice determinantu?

Úloha 3.2 *Vypočtěte hodnotu determinantu úpravami D1 až D4 na schodový tvar.*

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Úloha 3.3 a) *Pomocí Laplaceova rozvoje 5.řádku zjednodušte výpočet determinantu řádu 5 pomocí několika determinantů řádu 4.*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

b) *Dopočítejte část (a) Pomocí vlastnosti D3 (linearity) podobně jako v otázce 04, abyste několik determinantů řádu 4 sloučili dohromady (v každém krku proveďte jen jednu úpravu daného typu: vezměte první dva sčítané determinanty a využijte toho, že dané matice se liší pouze v jednom řádku).*

Úloha 3.4 a) *Pomocí Laplaceova rozvoje 2.sloupce zjednodušte výpočet determinantu řádu 5 pomocí několika determinantů řádu 4.*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

b) *Dopočítejte část (a) Pomocí vlastnosti D3 (linearity) podobně jako v otázce 4 týdne 2, abyste několik determinantů řádu 4 sloučili dohromady (v každém krku proveďte jen jednu úpravu daného typu: vezměte první dva sčítané determinanty a využijte toho, že dané matice se liší pouze v jednom řádku).*

Úloha 3.5 *Vypočtěte hodnotu následujících determinantů, jakým způsobem se Vám líbí (nápověda v případě* $|B|$*: přičtením všech řádků matice k prvnímu řádku (D4) vznikne řádek* $(6, 6, 6, 6)$*):*

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad |C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

4 Týden 4

4.1 Kapitola 4: Vektorový podprostor a jeho generátory, průnik a součet vektorových podprostorů

Zabývejme se nyní chvíli otázkou příbuznou otázce z teorie grup (viz Algebra 1): Co musí splňovat podmnožina S vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$, aby už $(S, +, \cdot)$ byl vektorový prostor? Dá se jednoduše uvážit, že vlastně stačí kontrolovat uzavřenost na operaci sčítání a uzavřenost na součin skalár krát vektor – a nebo ještě jednodušeji, obě podmínky lze spojit do jedné:

Definice 15 **Vektorový podprostor** *prostoru* $(V, +, \cdot)$ *nad tělesem* $(T, +, \cdot)$ *je taková podmnožina* S *tohoto prostoru, která je uzavřená vzhledem k operacím* $+$ *(sčítání vektorů) a* $\cdot$ *(násobení vektorů skalárem), tj. je uzavřená na lineární kombinace vektorů z* S*:*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in S, \forall \alpha, \beta \in T : \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in S \qquad (1 + "1")$$

Poznámka: Zbylé vlastnosti z definice vektorového prostoru plynou automaticky z toho, že $S \subseteq V$.

Zbývá ověřit, že S obsahuje neutrální prvek a obsahuje inverze vzhledem ke sčítání vektorů:

3. pro libovolné $\vec{u} \in S$: podle vlastnosti $(1 + "1")$:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \vec{u} &\in S \\ \vec{o} &\in S \end{aligned}$$

...platí vlastnost 3;

4. pro libovolné $\vec{u} \in S$: podle vlastnosti $(1 + "1")$:

$$\begin{aligned} (-1) \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{u} &\in S \\ -\vec{u} &\in S \end{aligned}$$

...platí vlastnost 4.

Příklad 15 *Podívejme se na některé příklady vektorových podprostorů v aritmetickém vektorovém prostoru* $V = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*:*

a) *Každý vektorový prostor* $(V, +, \cdot)$ *má dva triviální podprostory,*

- *prostor* $\{\vec{o}\}$*...nejmenší možný podprostor,*

- *celý prostor* V *je podprostorem.*

b) *Body na přímce* p *procházející počátkem* **tvoří** *vektorový podprostor prostoru* $V = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$,

- *body na přímce q neprocházející počátkem* **netvoří** *vektorový podprostor prostoru* $V = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *například proto, že neobsahují nulový vektor, resp. bod* $[0;0]$.

c) *Body v rovině α procházející počátkem* **tvoří** *vektorový podprostor prostoru* $\mathbb{R}^3$.

- *body v rovině α neprocházející počátkem* **netvoří** *vektorový podprostor prostoru* $\mathbb{R}^3$, *protože neobsahují nulový vektor, resp. bod* $[0;0;0]$.

Věta 6 a) *Průnik dvou podprostorů S_1, S_2 prostoru $(V, +, \cdot)$ je vektorovým podprostorem.*

Důkaz:

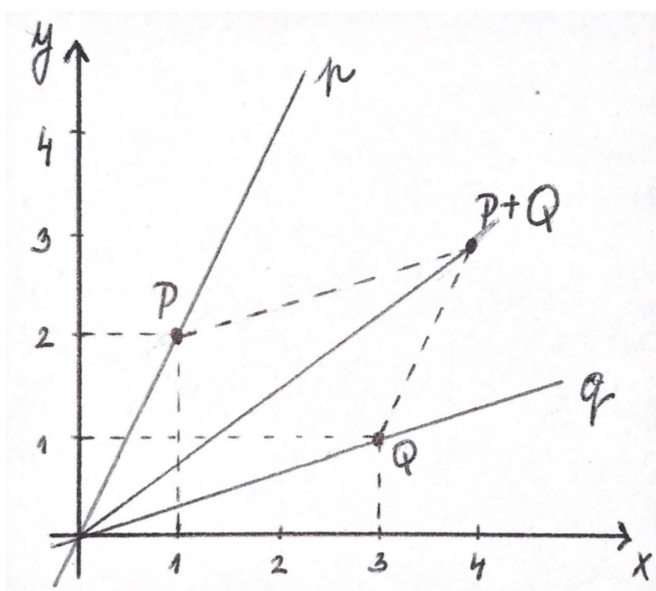
$$\vec{u}, \vec{v} \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow \begin{array}{lll} \vec{u}, \vec{v} \in S_1 & \Rightarrow & \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in S_1 \\ \vec{u}, \vec{v} \in S_2 & \Rightarrow & \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in S_2 \end{array} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in S_1 \cap S_2$$

Příklad 16 *Průnikem dvou rovin α, β, různoběžných a procházejících počátkem, je přímka p, která leží v jejich průniku (tato přímka tedy také prochází počátkem). Tato přímka je také vektorovým podprostorem prostoru* $\mathbb{R}^3$.

Věta 4 b) *Sjednocení dvou podprostorů S_1, S_2 nemusí být vektorovým podprostorem.*

Důkaz protipříkladem: viz následující příklad.

Příklad 17 *sčítání vektorů většinou není na sjednocení obou přímek uzavřenou operací: Např bod* $1 \cdot [1;2] + 1 \cdot [3;1] = [4;3] \notin p \cup q$, *tedy* $P + Q \notin p \cup q$ *– viz obrázek:*



Protože sjednocení vektorových podprostorů nemusí být vektorovým podprostorem, přidáme ke sjednocení nějaké další vektory, abychom vektorový podprostor „vyrobili“:

Definice 16 *$\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}$ je množina vektorů, ne nutně nezávislých, ve vektorovém prostoru $(V, +, \cdot)$.*

Lineární obal množiny *$\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}$ (značíme $L(\vec{v_1}, ..., \vec{v_k})$) definujeme jako:*

$$L(\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}) := \{\vec{u} \in V : \vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + ... + \alpha_k \cdot \vec{v_k}; \quad \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

($L(\vec{v_1}, ..., \vec{v_k})$ je tedy množina všech lineárních kombinací vektorů $\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}$). Alternativně mluvíme o **vektorovém podprostoru generovaném vektory** *$\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}$ a značíme pomocí množiny v ostrých závorkách, tj. $\langle\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}\rangle$.*

Lze snadno vidět, že dva pojmy v předchozí definici jsou jedno a totéž, neboli lineární obal množiny vektorů je stejný vektorový podprostor, jako podprostor generovaný stejnou množinou vektorů:

$$L(\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}) = \langle\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}\rangle.$$

Definice 17 **Součet podprostorů** *S_1, S_2 prostoru $(V, +, \cdot)$ je podprostor, který vznikne jako lineární obal jejich sjednocení. Značíme $S_1 + S_2$ a definujeme:*

$$S_1 + S_2 := L(S_1 \cup S_2) = \{\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}; \vec{u} \in S_1, \vec{v} \in S_2\}$$

Ad příklad 17. *$L(S_1 \cup S_2) = \mathbb{R}^2$...lineární obal bodů na obou přímkách je celá rovina. (Alternativní zápis: $\langle S_1 \cup S_2\rangle = \mathbb{R}^2$.)*

Jak souvisí pojem lineární nezávislosti vektorů s pojmem lineárního obalu či množiny generátorů, uvedeme v následující větě (část (b) je pouze zobecněním části (a) na větší počet vektorů než dva).

Věta 7 a) *Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lineárně nezávislé $\Leftrightarrow$ vektory $\vec{u}, \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, \beta \neq 0$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz: $\vec{u}, \vec{v}$ jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ oba jsou nenulové a $\vec{v}$ není násobkem vektoru $\vec{u}$:

$$\vec{u} \neq \vec{o}, \vec{v} \neq \vec{o} \quad \wedge \quad \vec{v} \neq k \cdot \vec{u}; \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{u} \neq \vec{o}, \vec{v} \neq \vec{o} \quad \wedge \quad \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \neq \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot k \cdot \vec{u} = (\alpha + \beta \cdot k) \cdot \vec{u}$$

$$\Updownarrow$$

$\vec{u}, \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ jsou lineárně nezávislé vektory, protože vektor $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ není násobkem vektoru $\vec{u}$.

Věta 5 b) *$\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}$ jsou lineárně nezávislé $\Leftrightarrow$*
$\Leftrightarrow \vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_{k-1}}, \vec{u_k} + \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + ... + \alpha_{k-1} \cdot \vec{u_{k-1}}$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}$ jsou lin. nezávislé $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u}_{k-1}$ jsou nezávislé a současně $\vec{o} \neq \vec{u_k} \neq l_1 \cdot \vec{u_1} + l_2 \cdot \vec{u_2} + ... + l_{k-1} \cdot \vec{u}_{k-1}$ (pro žádnou kombinaci $l_1, ..., l_{k-1}$).

To nastane právě tehdy, když $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u}_{k-1}$ jsou nezávislé a současně

$$\vec{u_k}+\alpha_1\cdot\vec{u_1}+\alpha_2\cdot\vec{u_2}+...+\alpha_{k-1}\cdot\vec{u}_{k-1} \neq l_1\cdot\vec{u_1}+...+l_{k-1}\cdot\vec{u}_{k-1}+\alpha_1\cdot\vec{u_1}+\alpha_2\cdot\vec{u_2}+...+\alpha_{k-1}\cdot\vec{u}_{k-1} =$$

$$= (l_1+\alpha_1)\cdot\vec{u_1} + \cdots + (i_{k-1}+\alpha_{k-1})\cdot\vec{u}_{k-1}$$

$$\Updownarrow$$

vektory $\vec{u_1}$, ..., $\vec{u}_{k-1}$, $\vec{u_k} + \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + ... + \alpha_{k-1} \cdot \vec{u}_{k-1}$ jsou lin. nezávislé.

Poznámka:

1) Nezávislost vektorů se nemění, podobně jako výsledek determinantu (vlastnost $D4$), když k jednomu vektoru přičteme lineární kombinaci vektorů ostatních.

Z toho plyne i postup, jak zjišťujeme, zda posloupnost vektorů je lineárně nezávislá: vložíme vektory jako řádky do matice a tu převedeme na schodový tvar pomocí úpravy $D4$.

Tím se nemění závislost/nezávislost těchto vektorů.

Když v průběhu úprav dostaneme z řádku $\vec{a_l}$ řádek samých nul ($\vec{a_l} + \alpha_1 \cdot \vec{a_1} + ... + \alpha_k \cdot \vec{a_k} = \vec{o}$), znamená to, že $\vec{a_l} = -\alpha_1 \cdot \vec{a_1} - ... - \alpha_k \cdot \vec{a_k}$, tj. $\vec{a_l}$ je lineární kombinací některých jiných řádků $\Leftrightarrow$ původní řádky matice byly lineárně závislé.

b) Víme dokonce víc: ten řádek, ze kterého pomocí úpravy $D4$ vyjde řádek samých nul, je lineárně závislý na ostatních řádcích, tj. když hledáme minimální množinu generátorů (=bázi) daného podprostoru, můžeme tento vektor vypustit.

Podívejme se nyní na několik příkladů, které souvisí s problematikou vektorových prostorů, hledání báze těchto podprostorů, zjišťování, zda určitý vektor je prvkem daného podprostoru vektorů, apod.

Příklad 18 *(Zlatoš 104, př. 45a)*

a) *Vyberte ze zadaných vektorů lineárně nezávislé vektory, které generují tentýž vektorový podprostor jako původní vektory:*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

b) *Zjistěte, zda vektor* $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ *patří do* $L(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Řešení:

ad a) Dejme vektory do řádků matice a upravme ji na schodový tvar pomocí úpravy $D4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2 \cdot r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{3} \cdot r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Třetí vektor lze vypustit, protože je závislý na prvních dvou vektorech:

$\rightarrow$ posloupnost $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ je bází vektorového podprostoru $L(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

ad b) $L(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$:

Hledejme α_1, α_2 : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, tj. rozepsáním do souřadnic řešíme systém lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 \\ 2 &= \alpha_1 + 3\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{3} \\ -1 &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = -1 \end{aligned}$$

Nemůže nastat, že α_2 se současně rovná dvěma různým reálným číslům – systém rovnic nemá řešení, tedy $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \notin L(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Příklad 19 *(Zlatoš 119, 5.3a) Doplňte vektory $g(x) = 1 + 2x + 7x^2, h(x) = 1 + x$ na bázi prostoru všech polynomů stupně nejvýš 2 s reálnými koeficienty (nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$).*

Řešení: Polynom stupně 2 má tři koeficienty, tj. $dim(\mathbb{R}^2[x], +, \cdot) = 3$. Zbývá doplnit bázi jedním vektorem:

$$g(x) \sim \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, h(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{,...např. } i(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ tj. } i(x) = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...příslušný schodový tvar neobsahuje nulový řádek, tedy žádný vektor není závislý na těch ostatních. Jedn8 se o množinu tří lineárně nezávislých polynomů, která generuje celý prostor polynomů stupně rovného nebo menšího dvěma – tedy o bázi.

Příklad 20 *(Zlatoš 099, př. 4.5.1) Zjistěte, zda patří vektory*

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

do lineárního obalu vektorů

$$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{x_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Řešení: A) Patří vektor $\vec{y}$ do množiny $\langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4} \rangle$?

1. způsob řešení: Abychom to zjistili, řešíme systém lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Rozepíšeme do souřadnic:

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 \qquad + 3\alpha_3, \\ 5 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \\ -2 &= -\alpha_1 \qquad - 3\alpha_3 + \alpha_4, \\ 1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 + 2\alpha_4. \end{aligned}$$

Systém lineárních rovnic má alespoň jedno řešení, tedy $\vec{y} \in \langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4} \rangle$.

2. způsob řešení: Vektory jen položíme do řádků matice a upravujeme na schodový tvar, na poslední řádek vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ... pokud se ve schodovém tvaru poslední řádek vynuluje, znamená to, že je vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ lineárně závislý na těch ostatních.

B) Patří vektor $\vec{z}$ do množiny $\langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4} \rangle$?

1. způsob řešení: Abychom to zjistili, řešíme systém lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-3\\-5\end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$

Rozepíšeme do souřadnic:

$$\begin{aligned}1 &= \alpha_1 + 3\alpha_3,\\ 1 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3,\\ 1 &= -\alpha_1 - 3\alpha_3 + \alpha_4,\\ 1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 + 2\alpha_4.\end{aligned}$$

Systém lineárních rovnic nemá řešení, tedy $\vec{z} \notin \langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4} \rangle$.

2. způsob řešení: Vektory jen položíme jako řádky matice a upravujeme na schodový tvar, na poslední řádek vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ ... pokud se ve schodovém tvaru poslední řádek NEvynuluje, znamená to, že je vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ lineárně NEzávislý na těch ostatních a není možné ho vyjádřit jako jejich lineární kombinaci.

Budeme se v dalším věnovat nalezení báze a dimenze součtu podprostorů a průniku vektorových podprostorů. Určitou orientaci v dimenzích těchto podprostorů nám poskytuje následující věta.

Věta 8 *(Zlatoš 111) Pokud S, T jsou konečněrozměrné podprostory (= s konečnou dimenzí) vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, tak platí:*

$$dim(S + T) = dimS + dimT - dim(S \cap T)$$

Důkaz: Označme

- $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$...nějaká báze prostoru $S \cap T$, pak označme $(dim(S \cap T) = k)$,
- $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_{m-k}}$...doplnění báze $S \cap T$ na bázi S $(dimS = m)$,
- $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}, \vec{w_1}, \vec{w_2}, ..., \vec{w_{n-k}}$...doplnění báze $S \cap T$ na bázi T $(dimT = n)$.

Nedá moc práce si uvědomit, že:

$$(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_{m-k}}, \vec{w_1}, \vec{w_2}, ..., \vec{w_{n-k}})$$

je bází $(S+T)$, a dále:

- $\vec{v_i}$ jsou nezávislé na $\vec{u_i}$...plyne z konstrukce báze S,
- $\vec{w_i}$ jsou nezávislé na $\vec{u_i}$...plyne z konstrukce báze T,
- $\vec{v_i}$ jsou nezávislé na $\vec{w_i}$ (pokud by některý vektor $\vec{v_i}$ byl lineární kombinací některých vektorů $\vec{w_i}$, ležel by v $S \cap T$, což je ve sporu s označením $\vec{v_i}$ ... jedná se o vektory, které totiž v průniku $S \cap T$ neleží).

Pak rovnost ve větě plyne z definice dimenze jako počtu vektorů báze daného prostoru. Důkaz je hotov.

Příklad 21 *Jsou zadány vektorové podprostory:*

$$U_1 = \langle \vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix}\rangle; U_2 = \langle \vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\2\end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\\-1\end{pmatrix}\rangle.$$

Určete bázi a dimenzi prostoru:

a) U_1,

b) U_2,

c) $U_1 + U_2$,

d) $U_1 \cap U_2$.

Řešení: můžeme řešit prakticky všechny úkoly v jednom – napišme do řádků matice po řadě vektory $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.

V dalším budeme upravovat tuto matici na schodový tvar elementárními řádkovými úpravami – z toho bude zřejmé, který řádek je závislý na těch ostatních a který ne.

$$\begin{array}{c} u_1\\u_2\\u_3\\v_1\\v_2\\v_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ -v_1\\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} u_1\\u_2\\u_3\\v_1\\v_2\\v_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2\\ 0 & -2 & -6 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ +2\cdot v_3\\ \\ \end{array} \sim$$

V první fázi vidíme z dílčího schodového tvaru prvních tří řádků, že vektory $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ tvoří bázi podprostoru U_1 (tedy a) $dim(U_1) = 3$). Ještě pro jistotu upravme na dílčí schodový tvar i řádky $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, abychom zjistili, zda některý z nich není v množině generátorů podprostoru U_2 zbytečně, když by byl závislý na těch ostatních.

$$\begin{array}{c} u_1\\ u_2\\ u_3\\ v_1\\ v_2\\ v_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1&1&0&1&2\\ 0&1&3&2&0\\ 0&0&1&2&0\\ 1&2&3&3&2\\ 0&0&0&-4&-2\\ 0&1&3&0&-1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ -u_1\\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} u_1\\ u_2\\ u_3\\ v_1\\ v_2\\ v_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1&1&0&1&2\\ 0&1&3&2&0\\ 0&0&1&2&0\\ 0&1&3&2&0\\ 0&0&0&-4&-2\\ 0&1&3&0&-1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ -u_2\\ \\ -u_2 \end{array} \sim$$

Z matice na levé straně posledního řádku úprav je vidět, že řádky odpovídající $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ také vytvářejí dílčí schodový tvar, kdybychom přehodili řádky $\vec{v}_2$ a $\vec{v}_3$ (tedy ad b) $dim(U_2) = 3$). Nebudeme to ovšem dělat, protože naším cílem je po ověření nezávislosti $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ pokračovat v úpravě všech šesti řádků na jeden společný schodový tvar.

$$\begin{array}{c} u_1\\ u_2\\ u_3\\ v_1\\ v_2\\ v_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1&1&0&1&2\\ 0&1&3&2&0\\ 0&0&1&2&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-4&-2\\ 0&0&0&-2&-1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ -2\cdot v_3\\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} u_1\\ u_2\\ u_3\\ v_1\\ v_2\\ v_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1&1&0&1&2\\ 0&1&3&2&0\\ 0&0&1&2&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-2&-1 \end{pmatrix}$$

Z výsledného tvaru je vidět, že $dim(U_1 + U_2) = 4$. Zbývá do báze vektorového podprostoru $U_1 + U_2$ vložit vektory $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{v}_3$, nebo ovšem i jinak: do báze $U_1 + U_2$ lze vložit právě i vektory, které zůstaly ve výsledném schodovém tvaru jako nenulové.

$d)$ řešíme jinak: dimenzi $U_1 \cap U_2$ lze určit pomocí $a), b), c)$ a věty 6. Protože $dim(U_1) = 3$, $dim(U_2) = 3$, $dim(U_1 + U_2) = 4$, tak podle věty 6 dostáváme, že dimenze $U_1 \cap U_2$ je rovna dvěma.

Bázi průniku $U_1 \cap U_2$ hledáme následujícím způsobem: Uvažujme obecně vektor $\vec{v} \in U_1 \cap U_2$. Pak je $\vec{v}$ lineární kombinací generátorů U_1 a současně lineární kombinací generátorů U_2:

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \beta_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\2\end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\\2\end{pmatrix} + \beta_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Napišme tento systém lineárních rovnic do matice, jen s tou úpravou, že vše převedeme na levou stranu rovnic a napravo zůstanou nuly:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&-1&-1&0&0\\ 1&1&0&-2&0&-1&0\\ 0&3&1&-3&3&-3&0\\ 1&2&2&-3&1&0&0\\ 2&0&0&-2&-2&1&0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ -r_1\\ \\ -r_1\\ -2\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&-1&-1&0&0\\ 0&1&0&-1&1&-1&0\\ 0&3&1&-3&3&-3&0\\ 0&2&2&-2&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ -3\cdot r_2\\ -2\cdot r_2\\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) -2\cdot r_3 \quad \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) -\tfrac{1}{2}\cdot r_4 \quad \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nyní si zjednodušené rovnice přepíšeme:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 &= 0 \Rightarrow \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 \\ \alpha_3 &= 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \\ 2\beta_3 &= 0 \Rightarrow \beta_3 = 0 \end{aligned}$$

Nyní si obecný vektor $\vec{v}$ z průniku přepíšeme jen pomocí první části, tj. pomocí α_i:

$$\vec{v} = (\beta_1+\beta_2)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix} + (\beta_1-\beta_2)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix} = \beta_1\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix}\right) + \beta_2\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix}\right) = \beta_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\2\end{pmatrix} + \beta_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ dimenze $U_1 \cap U_2 = 2$, báze $U_1 \cap U_2$ je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$. Jedná se vlastně o vektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ a mylně bychom se mohli domnívat, že řešení lze odečíst také z výsledné matice na str. 47 uprostřed. Ovšem to, že v bázi průniku $U_1 \cap U_2$ jsou zrovna vektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, je shoda okolností zaviněná zadáním příkladu – někdo by mohl říci, že ve výsledném schodovém tvaru na str. 47 by stejně dobře mohly být nulové řádky $\vec{v}_1$, $\vec{v}_3$ (stačilo od řádku $vecv_3$ v předchozím kroku odečíst půlnásobek řádku $\vec{v}_2$), ovšem rozhodnutí vytvořit bázi z vektorů $\vec{v}_1$, $\vec{v}_3$ by nebylo správné. Je potřeba provádět právě popsaný postup (d).

4.2 Cvičení 4

- Definice vektorového prostoru (jen stručně – odkažte na přednášku číslo 1). Dimenze a báze vektorového prostoru; souřadnice vektoru vzhledem k zadané bázi.
- Příklady vektorových prostorů: aritmetický vektorový prostor R^n, prostor polynomů $R_n[x]$ stupně nejvýše n, prostor spojitých reálných funkcí.
- Příklady na Gaussovu eliminaci. Motivace: vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi určené vektory $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$. Nebo: vyjádřete vektor $\vec{v}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$.

Úloha 4.1 a) *Gaussovou eliminační metodou vyřešte následující systém lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 5z &= 1; \\ y + 2z &= 3; \\ 4x + 2y - 12z &= -1. \end{aligned}$$

b) *Interpretujte zadání i výsledek z části (a) geometricky.*

Úloha 4.2 a) *Gaussovou eliminační metodou vyřešte následující systém lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z &= -3; \\ 3x + 2y + 5z &= 0; \\ 10y + z &= -6. \end{aligned}$$

b) *Interpretujte zadání i výsledek z části (a) geometricky.*

Úloha 4.3 *Je dán následující systém tří rovnic o třech neznámých:*

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array}$$

a) Vyřešte systém v oboru reálných čísel,

b) interpretujte zadání i výsledek z a) geometricky.

Úloha 4.4 *Je dán následující systém tří rovnic o čtyřech neznámých:*

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

Vyřešte systém v oboru reálných čísel pomocí Gaussovy eliminační metody.

5 Týden 5

5.1 Kapitola 5: Inverzní matice, maticová metoda a Gauss-Jordanova metoda řešení SLR, sčítání matic

Protože v páté přednášce zpravidla doháníme resty z předchozí přednášky, další výklad obsahuje jen maticovou metodu řešení SLR (po Cramerovy pravidlu a Gaussově metodě třetí metodu v pořadí) a Gauss-Jordanovu metodu (vlastně čtvrtá metoda řešení SLR – pouze viz cvičení, na přednášce na ni nebude čas), a v šesté přednášce pak celé téma představení maticových operací dokončíme, a dodáme problematiku homogenních SLR.

3. metoda řešení SLR – maticová metoda:

Kdybychom dokázali nějak definovat násobení matic či násobení matice krát vektor, lze SLR psát v maticovém zápisu: $m = n$...VRAŤME SE K SITUACI ČTVERCOVÉ MATICE:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \vec{b} / \cdot A^{-1} (\text{zleva}) \\ A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \\ E \cdot \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Jak víme z algebry 1, pokud by existovalo něco jako inverzní matice vzhledem k násobení, mohli bychom řešení $\vec{x}$ spočítat právě pomocí A^{-1}. Pak by se součin matice A a matice k ní inverzní A^{-1} rovnal jednotkové matici E, kterou bychom díky vlastnosti jednotkového (= neutrálního prvku) mohli z výpočtu zcela vypustit.

Popišme nejprve na příkladu tzv. Gaussovu-Jordanovu metodu výpočtu inverzní matice, a potom ve větách 11, 12 ukážeme, že tento postup je oprávněný a vede k cíli vždy, když A^{-1} existuje.

Příklad 22 *Pro* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *nalezněte inverzní matici* A^{-1} *tak, aby:*

$$A \cdot A^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; A^{-1} \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Řešení: Začneme tak, že napíšeme matici A, a za ní doprava matici E, tj $(A|E)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dále elementárními řádkovými úpravami upravíme tuto matici typu 3/6 na schodový tvar Gaussovou metodou:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\cdot r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +3\cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot\frac{1}{2} \end{array} \sim$$

Vynásobením řádků zajistíme, aby na hlavní diagonále byly hodnoty 1.
Zde by končila Gaussova metoda u systému rovnic.

My ovšem pokračujeme dále (tzv. Jordanovou metodou) a "vyrábíme"nuly také nad hlavní diagonálou tak, abychom neporušili nuly pod diagonálou – budeme pokračovat tak dlouho, až na levé straně vytvoříme (pomocí EŘÚ) jednotkovou matici.

Při úpravách r_2 použijeme násobek řádku r_3, který neporuší hodnoty $a_{21} = 0, a_{22} = 1$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\cdot r_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} -2\cdot r_2 - 3\cdot r_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

a v pravé části schématu jsme dostali matici $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$.

Lze provést zkoušku:

$$\begin{aligned} A\cdot A^{-1} &= E \\ A^{-1}\cdot A &= E \end{aligned}$$

Ad příklad 20. Vyřešme metodou A^{-1} systém lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \qquad + 3\alpha_3 \qquad\qquad &= 3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \qquad\qquad &= 5 \\ -\alpha_1 \qquad - 3\alpha_3 + \alpha_4 &= -2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 + 2\alpha_4 &= 1 \end{aligned}$$

Řešení: Přepišme si systém maticově:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} / \cdot A^{-1}(\text{zleva})$$

Najdeme matici A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ +r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Nyní vložíme čtvrtý řádek namísto druhého a druhý a třetí řádek posuneme níže. Dostaneme

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{4}) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +\frac{1}{2} \cdot r_4 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{r} -3 \cdot r_3 \\ +2 \cdot r_3 - 2 \cdot r_4 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Našli jsme inverzní matici, která má tvar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní zbývá vyřešit maticovou rovnici maticové metody:

$$\vec{\alpha} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A jsme hotovi, maticovou metodou jsme našli řešení SLR z příkladu 20. Přitom jsme násobení matice zprava vektorem $\vec{b}$ provedli tak, že první řádek matice jsme tímto vektorem vynásobili skalárně, a napsali výsledek jako první souřadnici 6; druhý řádek matice vynásobili vektorem b a napsali výsledek jako druhou souřadnici 0; třetí řádek matice vynásobili vektorem b a napsali výsledek jako třetí souřadnici -1; a konečně čtvrtý řádek matice vynásobili vektorem b a napsali výsledek jako čtvrtou souřadnici 0.

Další podrobnosti k násobení matic si řekneme příští týden.

4. metoda řešení SLR – Gaussova-Jordanova:

Namísto abychom Gauss-Jordanovou metodou hledali nverzní matici (v právě předvedené 3. metodě řešení SLR), lze touto metodou vlastně vyřešit i původní systém rovnic; bývá někde proto prezentována jako samostatná metoda. tzv. metoda Gaussova-Jordanova:

Ad příklad 20: První část algoritmu je zcela stejná jako Gaussova eliminace:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ +r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim$$

Nyní vložíme čtvrtý řádek namísto druhého a druhý a třetí řádek posuneme níže. Dostaneme

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{4}) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +\frac{1}{2} \cdot r_4 \\ \\ \end{array}$$

V této chvíli bychom u Gaussovy metody nasadili tzv. zpětný chod a dopočítávali neznámé z rovnic – namísto toho budeme pokračovat metodou Jordanovou a rovnice ještě více zjednodušujeme, abychom v matici výsledného tvaru úprav dostali nuly i nad hlavní diagonálou:

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} -3 \cdot r_3 \\ +2 \cdot r_3 - 2 \cdot r_4 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tedy namísto 3. metody a násobení vektoru pravých stran inverzní maticí ve 4. metodě, Gauss-Jordanově, nepočítáme inverzní matici, ale řešíme celý původní SLR včetně pravých stran stejným souborem úprav jako při výpočtu matice inverzní – až dostaneme tvar $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 1$, kde každá rovnice tohoto tvaru je vlastně už přímo zápisem řešení.

Poznámka. Gauss-Jordanovou metodou (4. metodou) se nemá říci, že metoda inverzní matice (3. metoda) není k ničemu – jen že pro řešení SLR pomocí úprav matice na jednotkovou je rychlejší metoda Gaussova-Jordanova (4. metoda) než metoda inverzní matice (3. metoda).

Na druhé straně, inverzní matice A^{-1}, pokud existuje, je z algebraického hlediska už zajímavá sama o sobě. Metoda inverzní matice je také dobrá pro počítač – tomu nevadí, že musí provést více úprav než při metodě Gauss-Jordanově. V dalším ovšem budeme inverzní matici potřebovat ještě z dalších důvodů – jedním z nich je ten, že pokud matice A představuje lineární zobrazení mezi vektorovými prostory (viz kapitola 7), tak zobrazení k němu inverzní (pokud existuje) lze vyjádřit maticí A^{-1}, kterou studenti musí být schopni najít.

Operace sčítání matic:

Definice 18 *Nechť jsou A, B matice typu m/n stejného typu. Pak <u>součet matic</u> $A + B$ definujeme jako matici, která vznikne sčítáním po složkách:*

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ ... \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Jaké vlastnosti bychom mohli u takto definovaného sčítání matic očekávat?

Věta 9 *$(M_{m\times n}, +)$ je komutativní grupa.*

Důkaz:

(1) Uzavřenost operace: výsledkem součtu je opět matice stejného typu m/n,

(2) Asociativita: $(A + B) + C = A + (B + C)$...plyne z asociativity sčítání reálných čísel,

(3) Neutrální prvek vzhledem ke sčítání je matice samých nul typu m/n,

(4) Inverzní k A vzhledem ke sčítání je matice $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & ... & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & ... & -a_{2n} \\ ... \\ -a_{m1} & -a_{m2} & ... & -a_{mn} \end{pmatrix}$. Této matici budeme říkat matice opačná, aby slovo „inverzní matice“ mohlo být rezervováno pro inverzi vzhledem k operaci násobení matic.

(5) Komutativita plyne z komutativity sčítání reálných čísel.

Na operaci násobení matic a její vlastnosti se podíváme asi až příští týden.

5.2 Cvičení 5

- Vektorový podprostor, součet a průnik vektorových podprostorů, vzájemná poloha vektorových podprostorů (úloha určení dimenze a báze součtu a průniku podprostorů).

Úloha 5.1 *Určete, zda W je vektorový podprostor aritmetického vektorového prostoru R^3: rovina W je zadaná rovnicí*

$$2x + y - 3z + 6 = 0.$$

Úloha 5.2 *Určete, zda W je vektorový podprostor aritmetického vektorového prostoru R^3: rovina W je zadaná rovnicí*

$$2x + y - z = 0.$$

Úloha 5.3 *Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.*

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}; \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{u_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5.4 *Jsou dány vektory* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Rozhodněte, zda generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$. Své rozhodnutí zdůvodněte výpočtem.*

Úloha 5.5 *Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány vektorové prostory $U = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ a $V = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, přičemž*

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi a bázi

a) součtu $U + V$ a

b) průniku $U \cap V$.

Úloha 5.6 *Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány vektorové prostory $U = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ a $V = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, přičemž*

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi a bázi

a) součtu $U + V$ a

b) průniku $U \cap V$.

6 Týden 6

6.1 Kapitola 6: násobení matic, SLR nehomogenní a homogenní, princip superpozice

Minulý týden jsme se začali zaobírat vlastnostmi operace sčítání matic z algebraického hlediska (věta 9). Pokračujme dále definicí a vlastnostmi operace násobení matic – toto násobení jsme sice už využili v maticové metodě v minulé přednášce, ale tam jsme násobili jen v jednom speciálním případě, a sice násobili jsme matici vektorem. Nyní se podíváme na vlastnosti násobení dvou matic obecně.

6.A) Operace násobení matic:

Definice 19 *Nechť A je matice typu m/k a B je matice typu k/n. Pak lze definovat součin matic $C = A \cdot B$ jako matici typu m/n, kterou získáme pomocí vzorce:*

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} \\ ... & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ik} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1j} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2j} & b_{2n} \\ ... & & & & \\ b_{k1} & b_{k2} & ... & b_{kj} & b_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + ... + a_{1k} \cdot b_{k1} & ... & a_{11} \cdot b_{1n} + a_{12} \cdot b_{2n} + ... + a_{1k} \cdot b_{kn} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + ... + a_{2k} \cdot b_{k1} & ... & a_{21} \cdot b_{1n} + a_{22} \cdot b_{2n} + ... + a_{2k} \cdot b_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + ... + a_{mk} \cdot b_{k1} & ... & a_{m1} \cdot b_{1n} + a_{m2} \cdot b_{2n} + ... + a_{mk} \cdot b_{kn} \end{pmatrix}$$

Poznámka: Pokud trochu předběhneme pojem skalárního součinu, na pozici (i, j) výsledné matice se vyskytuje skalární součin i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B, jak jej známe možná z analytické geometrie SŠ:

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ ... \\ b_{kj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

(Složky obou vektorů na odpovídajících pozicích vynásobíme, všechny tyto součiny sečteme). Z toho také plyne, že násobení matic lze provést jen tehdy, když počet sloupců matice první je roven počtu řádků matice druhé v daném pořadí (skalární součin aritmetických vektorů o různém počtu souřadnic totiž nemá smysl).

Příklad 23 *Pro matice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ -8 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ *typu 3/4,* $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ *typu 4/2 je součinem* $C = A \cdot B$ *matice typu 3/2, kde:*

$$C = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot(-4) + (-1)\cdot 1 + 0\cdot(-2) & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot(-3) \\ 0\cdot 3 + 1\cdot(-4) + (-1)\cdot 1 + (-7)\cdot(-2) & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + (-7)\cdot(-3) \\ -8\cdot 3 + 0\cdot(-4) + 0\cdot 1 + (-5)\cdot(-2) & -8\cdot 2 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-5)\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1;2;-1;0)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} & (1;2;-1;0)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\ (0;1;-1;-7)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} & (0;1;-1;-7)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \\ (-8;0;0;-5)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} & (-8;0;0;-5)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 9 & 22 \\ -14 & -1 \end{pmatrix}$$

Při násobení matic tedy podstatně záleží na jejich pořadí – počet sloupců první matice musí být stejný jako počet řádků druhé matice.

Věta 10 *Množina* $(M_{n\times n}, +, \cdot)$ *čtvercových matic řádu* n *je nekomutativní okruh, který obsahuje netriviální dělitele nuly.*

Důkaz: Už jsme dokázali ve větě 9, že $(M_{nn}, +)$ je komutativní grupa, zbývá tedy dokázat (ukázat) vlastnosti, které se týkají operace násobení, a pak vlastnosti týkající se souhry obou operací (viz definice okruhu z Algebry 1):

(1) Vynásobením dvou čtvercových matic řádu n vznikne čtvercová matice řádu n...to plyne z definice násobení matic,

(2) Násobení matic je asociativní: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$...důkaz rozepsáním součinu na každé pozici matic na obou stranách rovnosti,

(3) Vzhledem k násobení čtvercových matic $\exists$ neutrální prvek, tzv. jednotková matice:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

...jedničky má pouze na hlavní diagonále, jinak jsou všude nuly,

(4a) Inverzní matice A^{-1} k matici A – existuje jen někdy. Například pro $n = 3$ k matici $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ neexistuje inverze C^{-1} vzhledem k násobení, protože při násobení C libovolnou maticí X stejného řádu dostaneme

$$C \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tj. díky třetímu nulovému řádku matice C bude vždy nulový i třetí řádek matice $C \cdot X$, a tedy výsledkem součinu $C \cdot X$ nikdy nemůže být jednotková matice.

(4b) Množina obsahuje tzv. netriviální dělitele nuly, tj. nenulové matice, jejichž součinem je nulová matice – například pro $n = 3$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

...matice A, B jsou netriviální dělitelé nuly (nula = neutrální prvek vzhledem ke sčítání, nikoli k násobení – viz Algebra 1!!!).

(5) Násobení matic není obecně komutativní – buď v opačné pořadí matice vůbec nelze násobit, nebo u čtvercových matic dostáváme často různé výsledky.

Vezmeme-li například uvedené dělitele nuly pro $n = 3$ (tj. $A \cdot B = O$) a vynásobíme je v opačném pořadí, dostaneme:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ -1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tj. $A \cdot B \neq B \cdot A$. Co se týká operace násobení čtercových matic, $(M_{n\times n}, \cdot)$ je tedy nekomutativní monoid, protože (ještě bude na příkladech potvrzeno) inverze vzhledem k násobení existují jenom někdy.

(6) A zbývá ověřit vzájemnou souhru operací, tj. distributivní pravidla:

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (B + C) \cdot A &= B \cdot A + C \cdot A \end{aligned}$$

...lze dokázat rozepsáním výsledku pozice i, j v matici vzniklé na obou stranách rovnosti.

Tedy celkem, podtrženo a sečteno, $(M_{n\times n}, +, \cdot)$ je nekomutativní okruh (který není oborem integrity jednak díky nekomutativitě operace násobení, jednak díky existenci nenulových dělitelů nuly). Důkaz je hotov. $\square$

Definice 20 *Čtvercová matice A řádu n je:*

a) singulární, *jestliže k ní NEexistuje inverzní matice A^{-1} vezhledem k operaci násobení matic,*

b) regulární, *jestliže k ní existuje inverzní matice A^{-1} vzhledem k operaci násobení matic.*

Řešit SLR maticovou metodou lze jen tehdy, když A je čtvercová ($m = n$) a regulární ($h(A) = n$), tedy existuje pro ni inverzní matice A^{-1} vzhledem k násobení.

Poznámka. Bylo by asi škoda nezmínit, jak souvisí pojem regulární čtvercové matice s pojmy už použitými. Pojem regulární čtvercové matice lze pomocí nich definovat čtyřmi způsoby:

Čtvercová matice A řádu n je:

a) singulární právě tehdy, když, jestliže k ní NEExistuje inverzní matice A^{-1} vzhledem k operaci násobení matic;

to nastane právě tehdy, když $h(A) < n$ (tedy když některý řádek matice A je lineárně závislý na řádcích ostatních);

to nastane právě tehdy, když $|A| = 0$;

to nastane právě tehdy, když pro jakýkoli reálný vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ a vektor neznámých $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ nemá systém rovnic $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ žádné řešení nebo jich má nekonečně mnoho.

b) regulární, jestliže k ní Existuje inverzní matice A^{-1} vzhledem k operaci násobení matic;

to nastane právě tehdy, když $h(A) = n$ (tedy když řádky čtvercové matice A tvoří lineárně nezávislou množinu vektorů);

to nastane právě tehdy, když $|A| \neq 0$;

to nastane právě tehdy, když pro jakýkoli reálný vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ a vektor neznámých $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ má systém rovnic $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ jediné řešení.

6.B) Řádkové úpravy lze vyjádřit pomocí násobení matic:

Věta 11 *Každou EŘÚ matice A (přičtění násobku jiného řádku, vynásobení řádku nenulovým číslem, výměna dvou řádků) lze reprezentovat obnásobením matice A jistou regulární maticí zleva.*

Důkaz: Ukážeme na příkladu, ve kterém použijeme všechny typy elementárních řádkových úprav:

Ad příklad 22:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad -2 \cdot r_1 \text{ ... úprava } P_1$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=P_1}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\0&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-4\\0&1&2\end{pmatrix} \text{ ... úprava } P_2 = \text{ výměna } r_2, r_3$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}_{=P_2}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-4\\0&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&-3&-4\end{pmatrix} +3\cdot r_2 \text{ ... úprava } P_3$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}}_{=P_3}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&-3&-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix} \cdot\tfrac{1}{2} \text{ ... úprava } P_4$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{=P_4}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} -2\cdot r_3 \text{ ... úprava } P_5$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=P_5}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} -2\cdot r_2 - 3\cdot r_3 \text{ ... úprava } P_6$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=P_6}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Provedli jsme celkem výpočet $P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot A = E_3$. Každý z typů EŘÚ jsme realizovali vynásobením jistou maticí P_i. Všimněte si také, že všechny matice P_i jsou regulární, tj. jejich hodnost je maximální možná (nebo alternativně: žádný jejich řádek není lineární kombinací těch ostatních). □

Věta 12 Gaussova-Jordanova metoda: $(A|E) \sim$ *EŘÚ* $\sim (E|A^{-1})$ *najde vždy inverzní matici A^{-1}, pokud A^{-1} existuje.*

Důkaz: Ad důkaz věty 11 na příkladu 22: Jak je možné, že pomocí EŘÚ matice A lze spočítat A^{-1}, když tytéž EŘÚ použijeme na matici E_3?

To plyne z faktu, že EŘÚ představují vynásobení maticemi, při kterém dostaneme $(P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1) \cdot A = E_3$ podle vlastnosti pro inverzní prvky v každé grupě: pokud součin dvou matic je roven neutrálnímu prvku, pak tyto matice jsou si navzájem inverzní. Tedy matice $(P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1)$ je inverzí vzhledem k násobení k matici A.

A navíc lze psát:

$$P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot \quad = \quad P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot E_3,$$

kde E_3 je jednotková matice – neutrální prvek vzhledem k operaci násobení. Součin na pravé straně rovnosti znamená, že na jednotkovou matici E_3 (kterou při Jordanově metodě píšeme za svislou čáru vpravo od matice A) použijeme stejné EŘÚ, kterými jsme převáděli A na E_3.

(K celému důkazu věty 12 bychom potřebovali dokázat i vztah:

$$A \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 \cdot Q_5 \cdot Q_6 = E$$

kde $Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 \cdot Q_5 \cdot Q_6 = A^{-1}$, protože násobení je obecně nekomutativní.

Vynásobení matice A regulární maticí Q_i zprava představuje sloupcové úpravy matice A – a matici A^{-1} bychom získali tak, že bychom vytvořili matici typu $6/3$, $(\frac{A}{E})$ (jednotkovou matici bychom napsali pod matici A), a prováděli Gaussovu eliminaci pro sloupce, nikoli pro řádky. Tento odstavec není povinnou částí důkazu, doplňuje pouze celkový obraz: řádkové úpravy matic lze reprezentovat vynásobením jistou regulární maticí zleva, sloupcové úpravy matic lze reprezentovat vynásobením regulární maticí zprava.) $\square$

Poznámka: Také je z postupu pro výpočet A^{-1} při úpravách schématu $(A|E)$ jasné, proč tato inverze existuje jen někdy: pokud ve schodovém tvaru vzniklém z matice A pomocí EŘÚ je některý řádek v levé části schématu nulový (některý prvek na hlavní diagonále schodového tvaru je roven nule), tj. to znamená, že aspoň jeden řádek matice A je závislý na těch ostatních, tak potom žadnými EŘÚ nelze regulérně „vyrobit“ z tohoto řádku řádek nezávislý na těch ostatních, protože EŘÚ zachovávají závislost/nezávislost řádků matice A. Tedy v takovém případě pomocí EŘÚ nelze převést A na jednotkovou matici, ve které jsou všechny řádky lineárně nezávislé (v takovém případě A^{-1} neexistuje – říkáme, že matice A je singulární.)

6.C) Řešení a řešitelnost homogenního systému lineárních rovnic:

Zabývejme se nyní ještě chviličku tzv. homogenním SLR, protože ten má zajímavé vlastnosti z hlediska pojmu vektorový prostor:

$$\begin{aligned}
a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n &= 0 \\
a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n &= 0 \\
&... \\
a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n &= 0
\end{aligned}$$

Za prvé, podíváme-li se na charakter systému, vidíme, že n-tice $[0; 0; ...; 0]$ je vždy řešením SLR-hom., po dosazení je 0 na pravé i levé straně rovnic. Tedy nemůže nastat situace, že by homogenní SLR neměl žádné řešení!!! **Existují tedy zde dva rozdíly oproti nehomogennímu systému: 1) SLR-hom má řešení vždy, čili nemůže nastat situace, kdy řešení neexistuje; 2) jestliže SLR-hom má řešení jediné, tak je to právě řešení nulové (protože o tom víme, že je řešením SLR-hom vždy).**

Věta 13 *Množina řešení SLR-hom. tvoří vektorový prostor dimenze $n - h(A)$, kde n je počet neznámých a $h(A)$ hodnost příslušné matice systému.*

Důkaz: Proveď na přednášce, učiteli! Důkaz se děje nejlépe pomocí násobení matice vektorem zprava. $\square$

Příklad 24 *Najděte všechna řešení SLR-hom:*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \frac{1}{3}x_5 &= 0 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_5 &= 0 \\ x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení: Matice systému už je ve schodovém tvaru, tj. jen sestavíme množinu řešení.

Protože $h(A) < 5 = n$, víme, že řešení bude nekonečně mnoho. Dále víme, že počet parametrů, za které lze dosadit jakékoli reálné číslo, je $n - h(A) = 5 - 3 = 2$...dvě neznámé označíme jako parametry, například:

$x_5 = t$

x_4...nemůžeme volit jako parametr, protože ze třetí rovnice vyjádříme v závislosti na x_5:

$$x_4 = 2x_5 = 2t$$

x_3...nemůžeme volit jako parametr, protože ze druhé rovnice vyjádříme v závislosti na x_5:

$$x_3 = -\frac{1}{2}, x_5 = -\frac{1}{2}t$$

$x_2 = s$

x_1 vyjádříme z první rovnice:

$$x_1 = -2x_2 + \frac{1}{3}, x_5 = -2s + \frac{1}{3}t$$

Celkem množina řešení:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} -2s + \frac{1}{3}t \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

kde zápis (vyjadřující všechna řešení, s neurčenými parametry-koeficienty)

$$s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ je tzv. obecné řešení SLR-hom.}$$

Dále $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ je partikulární řešení SLR-hom, které dostaneme volbou parametrů $s = 1, t = 0$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ je partikulární řešení SLR-hom, které dostaneme volbou parametrů $s = 0, t = 1$.

Těmito dvěma volbami parametrů jsme dostali dva vektory řešení – pokud tyto vektory tvoří lineární nezávislou množinu vektorů (v našem případě právě tvoří), která je bází prostoru řešení SLR-hom, říkáme, že jsme získali tzv. **fundamentální množinu řešení** či fundamentální systém řešení.

6.D) 5. metoda řešení SLR – princip superpozice:

Definice 21 Obecné řešení SLR, SLR-hom...*řešení, ve kterém se vyskytují parametry.*

Partikulární řešení SLR, SLR-hom...*jedno řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametrů.*

Fundamentální systém řešení *SLR-hom je taková množina řešení, která tvoří bázi vektorového podprostoru řešení SLR-hom.*

Jaký je vztah mezi obecným řešením SLR a obecným řešením SLR-hom? Podívejme se na konkrétní příklad, a souvislost pak zapíšeme do věty 14.

Příklad 25 *Vyřeště SLR a SLR-hom pro stejnou matici A levých stran rovnic a prozkoumejte souvislosti mezi množinami řešení:*

$$(SLR): \begin{array}{rcl} x + y + 2z + 3w & = & 13 \\ x - 2y + z + w & = & 8 \\ 3x + y + z - w & = & 1 \end{array}$$

$$(SLR - hom): \begin{array}{rcl} x + y + 2z + 3w & = & 0 \\ x - 2y + z + w & = & 0 \\ 3x + y + z - w & = & 0 \end{array}$$

Řešení: Nejprve SLR – zapišme systém do matice a řešme Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ -r_1 \\ -3 \cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & -38 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \cdot 2 \\ \cdot(-3) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & -6 & -2 & -4 & -10 \\ 0 & 6 & 15 & 30 & 114 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ +r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & 104 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot\frac{1}{13} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Počet parametrů: $n - h(A) = 4 - 3 = 1$.
Zpětný chod:

$x_4 = t$...parametr

$x_3 = 8 - 2t$

$x_2 = \frac{1}{3} \cdot (5 - x_3 - 2x_4) = \frac{1}{3} \cdot (5 - 8 + 2t - 2t) = -1$

$x_1 = 13 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 13 + 1 - 16 + 4t - 3t = -2 + t$

$$\Rightarrow \underline{\text{Obecné řešení SLR-nehom}} : K = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(partikulární řešení SLR-nehom bychom dostali z obecného řešení SLR=nehom volbou parametru t. Například pro $t = 5$ dostaneme jedno partikulární řešení SLR-nehom jako:

$$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení příslušného SLR-hom: úpravy jsou stejné, jen sloupec pravých stran jsou nuly:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim ... \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Počet parametrů: $n - h(A) = 4 - 3 = 1$.
Zpětný chod:

$x_4 = t$...parametr

$x_3 = -2t$

$x_2 = \frac{1}{3} \cdot (-x_3 - 2x_4) = \frac{1}{3} \cdot (2t - 2t) = 0$

$x_1 = -x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4t - 3t = t$

$\Rightarrow$ Obecné řešení SLR-hom: $K_h = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Partikulární řešení SLR-hom bychom dostali z obecného řešení SLR-hom konkrétní volbou parametru t. Například pro $t = 5$ dostaneme partikulární řešení SLR-hom jako $\vec{x_1} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Věta 14 Princip superpozice: *Obecné řešení SLR = jedno partikulární řešení SLR + obecné řešení SLR-hom.*

Poznámka: Princip superpozice lze chápat jako samostatnou metodu řešení SLR v následujícím smyslu:

a) Nejprve vyřešíme daný SLR-hom, najdeme jeho obecné řešení $\vec{x}_{obec,hom}$.

b) Potom najdeme nějaké jedno partikulární řešení SLR-nehom, například uhodnutím neznámých, nebo některé neznámé si zvolíme jako nulové a další dopočítáme ... označme toto řešení jako $\vec{x}_{part,nehom}$.

c) A nyní sečtením obou řešení (každé pro jiný SLR) dostaneme obecné řešení SLR-nehom:

$$\vec{x}_{obec,nehom} = \vec{x}_{part,nehom} + \vec{x}_{obec,hom}.$$

Příklad 26 *Pomocí principu superpozice vyřešte systém lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Řešení: Následujme tři kroky navrženého postupu:

ad a) Najdeme obecné řešení SLR-hom:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right),$$

odtud volbou $x_3 = s$, $x_4 = t$ lze vyjádřit obecné řešení SLR-hom jako

$$\vec{x}_{obec,hom} = s \cdot \begin{pmatrix} \frac{-11}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ad b) Pokusíme se uhodnout nějaké jedno řešení SLR-nehom: protože neznámé máme čtyři a rovnice dvě, například x_1 a x_2 položme rovno 0 a systém přechází do tvaru

$$\begin{aligned} 3x_3 + x_4 &= 5, \\ 4x_3 - 2x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Nyní vynásobením první rovnice dvěma a přičtením ke druhé rovnici dostaneme $10x_3 = 9$, tedy $x_3 = 0{,}9$, a dosazením do první rovnice $3 \cdot 0{,}9 + x_4 = 5$ máme $x_4 = 2{,}3$. Tedy naše jedno získané řešení má tvar $x_1 = 0 = x_2$, $x_3 = 0{,}9$, $x_4 = 2{,}3$, neboli $\vec{x}_{part,nehom} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}9 \\ 2,3 \end{pmatrix}$.

ad c) Dohromady sečtením (a), (b) máme

$$\vec{x}_{obec,nehom} = \vec{x}_{part,nehom} + \vec{x}_{obec,hom} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}9 \\ 2,3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \frac{-11}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka k principu superpozice jako metodě: Asi by bylo dobré říci, že princip superpozice je zajímavý a užitečný jen v případě, že řešení SLR existuje nekonečně mnoho, tedy když $h(A) = h(A|b) < n$, kde n je počet neznámých. Když totiž řešení SLR existuje jediné ($h(A) = h(A|b) = n$), tak je to jediné řešení, které můžeme najít-uhodnout, a žádné jiné (a jediné řešení SLR-hom je nulový vektor, jehož přičtením k jedinému řešení SLR nezískáme nic jiného než stále to jediné řešení SRL).

6.2 Cvičení 6

- SLR homogenní a nehomogenní, princip superpozice, sčítání a násobení matic
-
-

Úloha 6.1 *Sečtěte a vynásobte matice různých rozměrů – kdy jsou tyto operace vůbec možné?*

Úloha 6.2 *Jaké vlastnosti splňuje operace sčítání matic stejného rozměru? Doplňte odpověď příklady.*

Jaké vlastnosti splňuje operace násobení na množině čtvercových matic? Zdůvodněte je a doplňte příklady.

Úloha 6.3 *Vyřešte pomocí inverzní matice*

- *SLR:* $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$*;*
- *maticovou rovnici:* $A \cdot X = B$*, všechny matice jsou řádu 2, matice* A*,* B *jsou dány, matici* X *máte nalézt.*

Úloha 6.4 *Pro zadanou matici* A *typu 3/3 najděte matici* P *typu 3/3, kterou když matici* A *vynásobíte zleva, dostanete matici* $P \cdot A$*, která se liší od matice* A *jen tím, že*

- *druhý a třetí řádek jsou přehozeny;*
- *třetí řádek je vynásoben čtyřmi;*
- *ke druhému řádku je přičtený pětinásobek prvního řádku.*

Úloha 6.5 *Najděte dvě matice typu 2/2, které jsou nenulovými děliteli nuly.*

Úloha 6.6 *Je násobení matic operace komutativní? Ukažte, že tomu tak není.*

Úloha 6.7 *Zkuste dokázat, že na množině matic typu 2/2 je operace násobení matic asociativní, tj. že platí*

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\right).$$

Úloha 6.8 *Nalezněte bázi a dimenzi vektorového prostoru řešení SLR-hom:*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Úloha 6.9 *Nalezněte bázi a dimenzi vektorového prostoru řešení SLR-hom:*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 &= 0, \\ 5x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 14x_2 - 1x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Úloha 6.10 *Vyřešte tento SLR pomocí principu superpozice:*

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3. \end{aligned}$$

Úloha 6.11 *Vyřešte tento SLR pomocí principu superpozice:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2. \end{aligned}$$

7 Týden 7

7.1 Kapitola 7: Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

V první polovině předmětu jsme se zabývali zejména řešením systému lineárních rovnic – ve druhé polovině se budeme zabývat zejména lineárním zobrazením mezi vektorovými prostory. Následující příklad ukazuje, že i součástí každého SLR je určité lineární zobrazení.

Připomeňme si jen nejdříve značení: na SLR lze nahlížet jako na m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + ... + a_{1n}\cdot x_n &= b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + ... + a_{2n}\cdot x_n &= b_2, \\ &... \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + ... + a_{mn}\cdot x_n &= b_m, \end{aligned}$$

nebo jako na jednu maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

(přitom matice A má rozměr m/n, vektor neznámých $\vec{x}$ má rozměr $n/1$ a vektor $\vec{b}$ jako výsledek jejich součinu má rozměr $m/1$).

Příklad 27 *Existuje tedy vztah mezi systémem lineárních rovnic s maticí A a lineárním zobrazením s maticí A:*

Např. řešit systém lineárních rovnic (příklad 11)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

znamená hledat vzor vektoru pravých stran $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ vzhledem k lineárnímu zobrazení φ zadanému maticí A. Otázka zní: Jakému vzoru $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ přiřazuje lineární zobrazení $\varphi : R^3 \to R^3$ obraz $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$? Odpověď zní: takovými vzory $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ jsou všechna řešení daného SLR.

Vyřešením SLR zjistíme (ad příklad 11), že hledaný vzor je jediný:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dále např. řešit systém rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -1 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

znamená hledat vzor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ pro obraz $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$ vzhledem k lineárnímu zobrazení $\varphi : R^4 \to R^4$ zadanému maticí A.

V příkladu 12 jsme zjistili, že těchto vzorů je nekonečně mnoho:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - 2p \\ 2 + 3p \\ 3 + 2p \\ 0 + p \end{pmatrix}.$$

A nakonec (třetí možnost odpovědi na naši otázku), řešit systém rovnic (ad př. 14)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

znamená hledat vzor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ k obrazu $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ vzhledem k zobrazení $\varphi : R^4 \to R^4$ zadanému maticí A.

Z př. 14 lze vidět, že žádný takový vzor neexistuje – to znamená, že $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \notin Im(\varphi)$.

Definice 22 *Nechť jsou* $(V, +, \cdot), (V', +, \cdot)$ *vektorové prostory nad stejný číselným tělesem* $(T, +, \cdot)$.

Lineární zobrazení $f : V \to V'$ *je takové zobrazení, pro které platí vlastnosti:*

a) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$*...podmínky zachování grupové operace,*

b) $\forall \vec{u} \in V, \alpha \in T : \varphi(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u})$*...podmínka zachování výsledku součinu (skalár krát vektor).*

Obě podmínky lze současně vyjádřit v jedné: slovně – Obrazem lineární kombinace je lineární kombinace obrazů dílčích vektorů; rovnicově algebraickým zápisem

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \alpha, \beta \in T : \varphi(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u}) + \beta \cdot \varphi(\vec{v}).$$

Poznámka: <u>Zadání lineárního zobrazení</u> – bude vysvětleno na příkladě (Horák, str. 85).

Budeme označovat $dimV = n$, báze $V = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n})$ a $dimV' = m$, báze $V' = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, ..., \vec{f_m})$. Vzhledem k těmto zvoleným bázím lze lineární zobrazení zadat:

a) Pomocí předpisu mezi souřadnicemi $\vec{v} \in V$ a $\varphi(\vec{v}) \in V'$,

b) Pomocí matice A typu $m/n : \varphi(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$...jedná se o další využití pojmu matice,

c) Pomocí obrazů $\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), ..., \varphi(\vec{e_n})$ bázových vektorů.

Příklad 28 *Uvažujme* $V = \mathbb{R}^3$ *s bází* $\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ *a* $V' = \mathbb{R}^2$ *s bází* $\vec{f_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ *lze zadat:*

ad a) *Vzorcem = předpisem:*

$$\varphi(\vec{v}) = \varphi \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2v_1 + v_3\\v_1 - v_2 - v_3\end{pmatrix}$$

ad b) *Maticí* A *zobrazení* φ *v zadaných bázích:*

$$\varphi(\vec{v}) = A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

(Matici A *vytvoříme na základě koeficientů u souřadnic* v_i *ze vzorce (a), naopak ze zadané matice* A *lze snadno vytvořit vzorec (a) pro* φ *doplněním neznámých, tj. roznásobením součinu* $A \cdot \vec{v}$*).*

Rozměr matice A *si lze pamatovat či zkontrolovat také z faktu, že:*

$$\varphi(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$$

...maticové násobení (v tomto případě násobení matice krát vektor) musí být proveditelné! Právě zde je důležité si pamatovat, že vektor $\vec{v}$ *musí být zadáván jako sloupcový vektor!!!!*

ad c) *Pomocí obrazů $\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \varphi(\vec{e_3})$ báze $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ prostoru V: například z maticového zadání (b) lze psát:*

$$\varphi(\vec{e_1}) = \varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{e_2}) = \varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{e_3}) = \varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Vidíme, že sloupce matice A jsou vytvořeny obrazy naší základní báze v přirozeném pořadí bázických vektorů a sloupců. Tedy jestliže máme celé lineární zobrazení zadáno pomocí obrazů základní báze

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\underline{e}} \to \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{\underline{f}};\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{\underline{e}} \to \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}_{\underline{f}};\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{\underline{e}} \to \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{\underline{f}},$$

můžeme uspořádáním těchto obrazů do sloupců jednoduše vytvořit matici A.

Příklad 29 *(Horák, str. 85)*

a) *Zobrazení $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definované jako:*

$$\psi\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2v_1+1\\v_1-v_2-v_3\end{pmatrix}$$

není lineární, protože např. pro $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}\psi(2\vec{u}+3\vec{v}) &= \psi\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}\\ 2\cdot\psi(\vec{u})+3\cdot\psi(\vec{v}) &= 2\cdot\begin{pmatrix}2\cdot1+1\\1-1-0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2\cdot1+1\\1-0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Tedy neplatí rovnost, kterou má lineární zobrazení splňovat:

$$\begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix} = \psi(2\vec{u}+3\vec{v}) \neq 2\cdot\psi(\vec{u})+3\cdot\psi(\vec{v}) = \begin{pmatrix}15\\6\end{pmatrix}$$

(mírným zkoumáním vzorce zobrazení bychom zjistili, že problematické je přičítání jedničky v první souřadnici – díky tomu se poruší podmínka linearity).

b) *Zobrazení $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definované jako:*

$$\delta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_2 \\ v_1 - v_2 - v_3 \end{pmatrix}$$

není lineární, protože např. pro $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$*:*

$$\begin{aligned} \delta(2\vec{u} + 3\vec{v}) &= \delta \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &\neq \\ 2 \cdot \delta(\vec{u}) + 3 \cdot \delta(\vec{v}) &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \\ 1 - 1 - 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 \\ 1 - 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ve vzorci je problematickým součin $v_1 \cdot v_2$ v první souřadnici obrazu).

Poznámka:

1, Z příkladu 29 plyne poučení, že ve vzorci lineárního zobrazení se nemůže vyskytovat ani samostatně přičítaná konstanta, ani nelinearita typu $v_1 \cdot v_2$ nebo v_1^2 apod.

Ve vzorci lineárního zobrazení se tedy mohou vyskytovat právě jen <u>lineární kombinace souřadnic zobrazovaného vektoru $\vec{v}$</u>.

2, Všimněme si vztahu mezi rozměry matice A (m/n) a dimenzemi obou prostorů $m = dim(V'), n = dim(V)$: Matice A definující celé zobrazení je typu m/n, ale m je dimenze prostoru obrazů V', kdežto n je dimenze prostoru vzorů V.

Lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:
Řada lineárních zobrazení v rovině je zobrazeními, na které jsme (snad) už zvyklí ze ZŠ/SŠ:

Příklad 30 *Velmi jednoduchá lineární zobrazení $R^2 \to R^2$:*

a) *Hezké zobrazení je <u>identita</u>, která nedělá nic: vektor $\vec{v}$ se zobrazí na sebe sama. Maticí tohoto zobrazení je:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Např. pro vzor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *je obrazem vektor* $A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) *Lineárním zobrazením je i projekce vektoru $\vec{v}$ na osu x. Maticí zobrazení je:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Např. pro vzor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *je obrazem vektor* $B \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$*...vektor ve směru osy x.*

c) *A podobně projekce vektoru na osu y má matici*

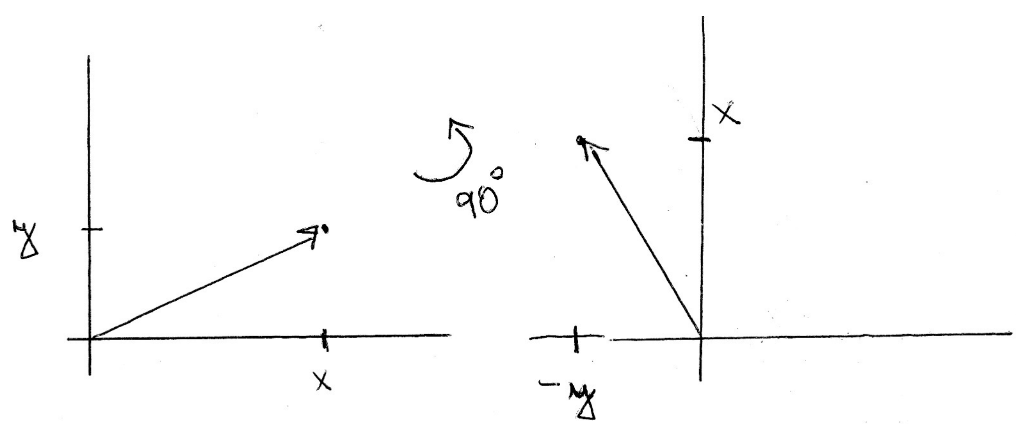
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Např. pro $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to C \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$*...vektor ve směru osy y.*

Příklad 31 *O něco náročnější je lineární zobrazení, které představuje otočení roviny o úhel φ_0 se středem otáčení v počátku. Odvodíme matici tohoto lin. zobrazení:*

a) *Najděte matici otáčení roviny o úhel $\frac{\pi}{2}$.*

Řešení: *Vektoru* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *je přiřazen vektor* $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ *– viz obrázek:*

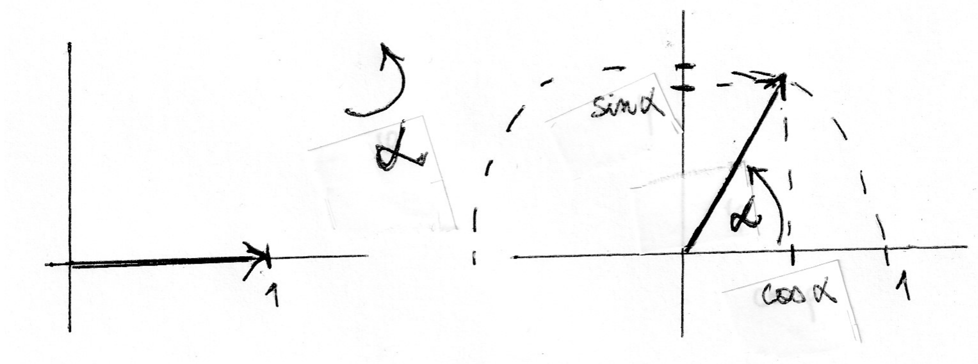


Máme tedy vzorec $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$*, do něhož můžeme dosadit například konkrétní bázické vektory a dostaneme* $\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*, pak* $\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$*. Odtud matice hledaného zobrazení je sestavena z daných obrazů vektorů základní báze napsaných jako sloupce:*

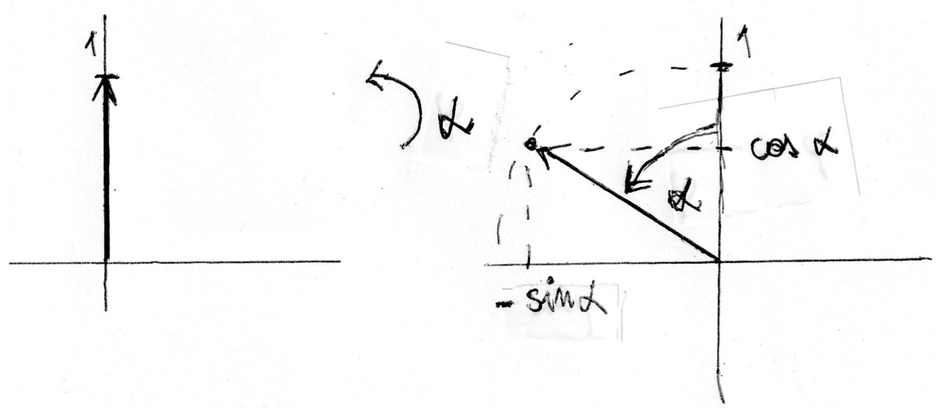
$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) *Najděte matici otáčení roviny ú úhel α*

Řešení: *Vytvořme zobrazení pomocí obrazů vektorů báze $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$:*



Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ se zobrazí na vektor $\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$.

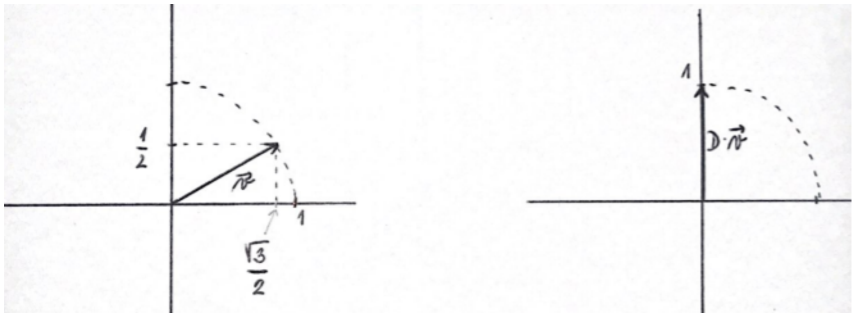


Vektor $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ se zobrazí na vektor $\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$. Když tyto dva obrazy napíšeme jako sloupce matice, získáme maticové vyjádření našeho otočení o úhel α:

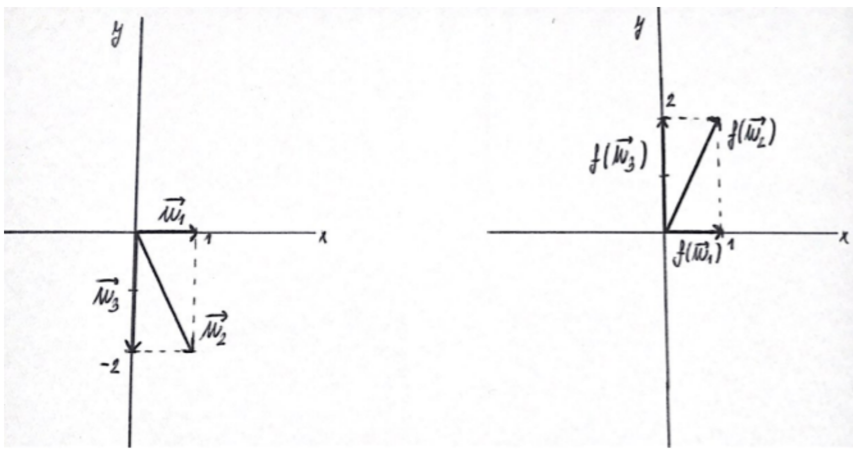
$$\varphi\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}.$$

c) *Například pro $\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ má matice z části (b) konkrétně tvar $\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac{\sqrt3}{2}\\ \frac{\sqrt3}{2} & \frac12\end{pmatrix}$ a v tomto pootočení se vektor $\vec v = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\ \frac12\end{pmatrix}$ zobrazí na vektor:*

$$\varphi(\vec v)=\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac{\sqrt3}{2}\\ \frac{\sqrt3}{2} & \frac12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}\\ \frac12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad \textit{(viz obrázek na násl. straně).}$$



Příklad 32 *Podívejme se na osovou souměrnost vzhledem k např. k ose x:*



- vektor $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se zobrazí na sebe sama, protože leží na ose souměrnosti: $f(\vec{u_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- vektor $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ se „překlopí“ vzhledem k ose x a zobrazí se osovou souměrností na vektor $f(\vec{u_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Najděme nyní matici tohoto zobrazení. **Řešení:** Pro vzor a obraz vybraných vektorů tedy platí:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pomocí zadání obrazů báze jsme schopni najít matici zobrazení – pokud oba ze vzorů nejsou jednotkové vektory ve standardní bázi, jako tomu bylo dosud, musíme navíc vyřešit dvě maticové rovnice:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1, c = 0$$

Dvě z neznámých máme už určeny: proto do následující maticové rovnice můžeme už hodnoty $a = 1$, $c = 0$ dosadit a určit zbylé dvě konstanty b, d:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1-2b &= 1 \\ 0-2d &= 2 \\ \Rightarrow b=0, d &= -1 \end{aligned}$$

a osová souměrnost je dána vztahem

$$f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Věta 15 *Základní vlastnosti lineárního zobrazení mezi vektorovými prostory (označení viz definice 22):*

a) $\varphi(\vec{o_V}) = \vec{o_{V'}}$,

b) $\varphi(-\vec{v}) = -\varphi(\vec{v})$,

c) *φ nemusí zachovat lineární nezávislost vektorů z V,*

d) *φ musí zachovat lineární závislost vektorů z V.*

Důkaz:

ad a), b) Protože φ je homomorfismus grup vzhledem k operaci + (na základě téže věty z algebry 1), zobrazení φ musí zobrazit nulový vektor na nulový vektor, a obraz inverze (= obraz opačného vektoru) je inverze k obrazu (= opačný vektor k obrazu),

ad c) Viz příklad 28: tři nezávislé vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ jsou zobrazeny na vektory:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

které jsou lineárně závislé, tedy dimenze $f(V)$ se může lineárním zobrazením zmenšit (ze 3 na 2). Dále také projekce (příklad 30 b,c) zmenšuje dimenzi 2 prostoru vzorů na dimenzi 1 prostoru daných projekcí.

ad d) Pokud $\vec{u_k} = \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + ... + \alpha_{k-1} \cdot \vec{u_{k-1}}$, tak lineární zobrazení právě zachovává „výsledek lineární kombinace“, tj. pouze využitím vlastnosti linearity (z definice 22) dostaneme:

$$\varphi(\vec{u_k}) = \alpha_1 \cdot \varphi(\vec{u_1}) + ... + \alpha_{k-1} \cdot \varphi(\vec{u_{k-1}})$$

$\varphi(\vec{u_k})$ je závislý na vektorech $\varphi(\vec{u_1}), \varphi(\vec{u_2}), ..., \varphi(\vec{u_{k-1}})$.

Při studiu lineárního zobrazení jsou důležité pojmy jádro a obor lineárního zobrazení:

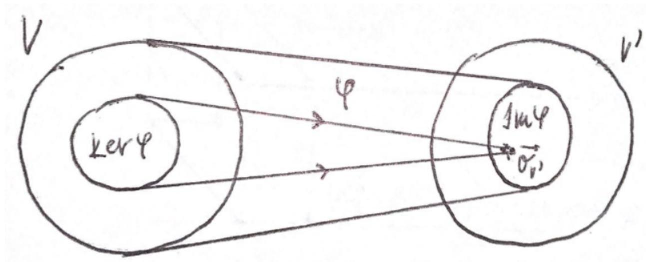
Definice 23 *Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory.*

Jádro $Ker\varphi$ **lineárního zobrazení** *je množina těch vektorů z V, které se zobrazí na nulový vektor:*

$$Ker\varphi := \{\vec{v} \in V : \varphi(\vec{v}) = \vec{o_{V'}}\}.$$

Obor hodnot $Im\varphi$ **lineárního zobrazení** *je množina těch vektorů z V', pro které existuje nějaký vzor:*

$$Im\varphi := \{\vec{w} \in V' : \exists \vec{v} \in V : \varphi(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$



$Ker\varphi$ a $Im\varphi$ celkem hodně vypovídají o každém lineárním zobrazení φ. Často bude užitečné $Ker\varphi$ a $Im\varphi$ najít. V první fázi se uvědomme, že se jedná o vektorové podprostory!

Věta 16 **a)** *$Ker\varphi$ je vektorový podprostor prostoru V,*

b) *$Im\varphi$ je vektorový podprostor prostoru V',*

c) *$dim(Ker\varphi) = n - h(A) = dim(V) - h(A)$, kde A je matice lineárního zobrazení φ,*

d) *$dim(Im\varphi) = h(A)$.*
tedy $n = dim(V) = dim(Ker\varphi) + dim(Im\varphi)$.

Důkaz je konstruktivní, tj. bude během něj vysvětlena konstrukce $Ker\varphi$ i konstrukce (nalezení) $Im\varphi$. Vysvětleme jej přímo na příkladu.

Ad př. 28:

a) $Ker(\varphi)$ je množina těch vektorů $\vec{v}$, které se zobrazí na nulový vektor:

$$A \cdot \vec{v} = \vec{o},$$

kde A je matice zobrazení φ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

...řešíme vlastně SLR-hom!

Řešení bude závislé na $n - h(A)$ parametrech $= dim(V) - h(A)$ parametrech, tedy $3 - 2 = 1$ parametr. Pouze vyměňme pořadí rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2 \cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} v_3 &= t \\ v_2 &= -\frac{3}{2}t \\ v_1 &= -\frac{3}{2}t + t = -\frac{1}{2}t \end{aligned}$$

$$Ker\varphi = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

...vektorový prostor dimenze 1. Opravdu, dokažme ještě pořádně, že pro $\vec{u}, \vec{v} \in Ker(\varphi)$ také platí $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in Ker(\varphi)$:

Pokud $\vec{u}, \vec{v} \in Ker\varphi$, tak:

$$\varphi(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}) \stackrel{linear}{=} \alpha\cdot\varphi(\vec{u})+\beta\cdot\varphi(\vec{v}) = \alpha\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy $Ker(\varphi)$ je uzavřené na lineární kombinace $\Rightarrow$ je to vektorový podprostor.

b) $Im\varphi$ je množina vektorů $\varphi(\vec{u}) \in V'$ pro všechny možné vektory $\vec{u} \in V$. Vezměme si obrazy jednotkové báze:

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vyberme z těchto obrazů $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bázi (do báze potřebujeme dva vektory ze tří, protože dimenze prostoru uspořádaných dvojic je rovna 2 – a nebo jen jeden vektor, kdyby ostatní dva vektory byly na tom prvním lineárně závislé, ale to snad není náš případ): Napíšeme si vektory do řádků matice a pomocí EŘÚ odstraníme ty, které jsou lineárně závislé na ostatních.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \cdot r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ +3 \cdot r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Např. $\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ je báze prostoru $Im\varphi$.

Tento postup lze vždy takto provést: Zobrazíme nějakou bázi V vzhledem k zobrazení φ, dostaneme množinu obrazů, která generuje podprostor $\varphi(V)$ – ovšem z těchto generátorů mohou některé být lineárně závislé na těch ostatních – ty musíme vyloučit a dostaneme bázi podprostoru $\varphi(V)$. Měli bychom ještě pořádně dokázat, že φ je množina uzavřená na lineární kombinaci vektorů – dokažme to:

Pro $\varphi(\vec{u}) \in \varphi(V), \varphi(\vec{v}) \in \varphi(V)$ – platí také pro $\alpha,\ \beta \in T$, že $\alpha\cdot\varphi(\vec{u})+\beta\cdot\varphi(\vec{v}) \in \varphi(V)$?

Platí, opravdu, uvažujte se mnou – použijme v našem zdůvodnění vlastnost lineárního zobrazení směrem „nazpátek“, tedy zprava doleva:

$$\alpha \cdot \varphi(\vec{u}) + \beta \cdot \varphi(\vec{v}) \stackrel{linear}{=} \varphi(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v})...$$

právě jsme našli díky vlastnosti linearity vzor $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in V$, který se zobrazí na vektor $\alpha \cdot \varphi(\vec{u}) + \beta \cdot \varphi(\vec{v})$. Tedy vektor $\alpha \cdot \varphi(\vec{u}) + \beta \cdot \varphi(\vec{v})$ náleží do $\varphi(V)$, protože jsme pro něj našli vzor!!!

Bude občas užitečné vědět, kdy zobrazení φ (samozřejmě lineární, o jiných se nebavíme) „zachovává dimenzi“, tj. $dim(V) = dim(\varphi(V))$. Poznáme to právě podle jádra $Ker\varphi$. Následující věta byla dokázána na jedné z prvních přednášek předmětu Základy matematiky!!! Jedná se o krásnou ukázku důkazu logické ekvivalence.

Věta 17 *Lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ je injektivní $\Leftrightarrow$ $Ker\varphi = \{\vec{o_V}\}$.*

Důkaz:

„$\Rightarrow$“ φ je injektivní $\Rightarrow$ dva různé vektory se nemohou zobrazit na stejný obraz $\vec{o_{V'}}$, tj. $Ker\varphi$ může obsahovat pouze jeden vektor, a sice $\vec{o_V}$.

„$\Leftarrow$“ $Ker\varphi = \{\vec{o_V}\}$ $\Rightarrow$ pokusme se dokázat injektivitu zobrazení φ:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{v}) \quad &\Rightarrow \quad \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}) = \vec{o_{V'}} \\ &\overset{linear}{\Rightarrow} \quad \varphi(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{o_V} \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in Ker\varphi \end{aligned}$$

(úprava výrazu $\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})$ na výraz $\varphi(\vec{u} - \vec{v})$ plyne z linearity zobrazení φ), ale v $Ker\varphi$ je pouze nulový vektor, tj $\vec{u} - \vec{v} = \vec{o_V}$, tedy $\vec{u} = \vec{v}$ to znamená, že φ je injektivní (dokázali jsme přímým důkazem implikaci

$$\varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{v}) \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \vec{v},$$

což je jedna z možných definic injektivity zobrazení). $\square$

Věta 17 nám může pomoci při zjištění, zda se zobrazením φ ztratí či neztratí nějaká dimenze podprostoru zobrazovaných vektorů: při injekci se žádná dimenze nemůže ztratit, tj. $\varphi(V)$ má stejnou dimenzi jako V.

Definice 24 *Složením dvou lineárních zobrazení vznikne opět lineární zobrazení: $\varphi : V \to V'$ (s maticí A), $\psi : V' \to V''$ (s maticí B) $\Rightarrow$* **složené zobrazení** *$\psi \circ \varphi : V \to V''$ (s maticí $B \cdot A$) je zobrazení:*

$$\psi \circ \varphi(\vec{v}) := \psi(\varphi(\vec{v})) \ \ (\ \textit{čteme: zobrazení } \psi \textit{ po } \varphi)$$

Nápověda: Násobení $B \cdot A$ matic dílčích zobrazení provádíme ve stejném pořadí, jako je napsáno pořadí zobrazení $\psi \circ \varphi$.

Příklad 33 *Mějme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ zadané maticí:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a zobrazení $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *zadané maticí:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ *Složené zobrazení* $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ *je zadané maticí:*

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Tedy složením přiřazení

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

dostaneme přiřazení

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

7.2 Cvičení 7

- cvičení na : ERU pomocí násobení maticí regulární, inverzní matice, maticová metoda řešení SLR, Gauss-Jordanova metoda řešení SLR.
-
-

8 Týden 8

8.1 Kapitola 8: Matice přechodu mezi bázemi, změna matice zobrazení při změně báze

Definice 25 *Označme* $\underline{e} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n})$, $\underline{f} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, ..., \vec{f_n})$ *dvě různé báze téhož vektorového prostoru* V *dimenze* n.
Protože se jedná o báze, lze vektory $\vec{e_j}$ *jednoznačně vyjádřit souřadnicemi v bázi* $\underline{f}$*:*

$$\vec{e_j} = \vec{f_1} \cdot p_{1j} + \vec{f_2} \cdot p_{2j} + ... + \vec{f_n} \cdot p_{nj}$$

...kde $p_{1j}, p_{2j}, ..., p_{nj}$ *jsou souřadnice vektoru* $\vec{e_j}$ *v bázi* $\underline{f}$*. Maticově pak:*

$$\underline{e} = \underline{f} \cdot P_{\underline{f} \to \underline{e}} \tag{8.1}$$

Matice P *se nazývá matice přechodu od báze f k bázi e (někdy též matice transformace báze* $\underline{f}$ *na bázi* $\underline{e}$*).*

Věta 18 **a)** *Matice přechodu* $P_{\underline{f} \to \underline{e}}$ *je regulární.*

b) *Jakákoli regulární matice* P *vytvoří z báze* $\underline{f}$ *„novou bázi“* $\underline{e}$*.*

c) *Vynásobením vztahu 8.1 maticí* P^{-1} *zprava dostáváme, že matice* P^{-1} *je také maticí přechodu, a sice v opačném směru! (od báze* $\underline{e}$ *k bázi* $\underline{f}$*):*

$$\underline{e} \cdot P^{-1}_{\underline{e} \to \underline{f}} = \underline{f} \tag{8.2}$$

Důkaz:

ad a) Pokud by řádky P byly lin. závislé, byly by závislé i řádky matice $\underline{e}$, tj. (protože hodnost matice se zachová transponováním – věta 4) byly by závislé i sloupce matice $\underline{e}$, a to nejsou – tvoří bázi.

ad b) Plyne ze vztahu 8.1 a z toho, že součin dvou regulárních matic je zase matice regulární[15].

ad c) Plyne z regulárnosti všech matic v rovnosti použitých a toho, že ve sloupcích matic $\underline{e}$, $\underline{f}$ jsou vektory bází.

Podívejme se nyní, jak se přepočítají souřadnice vektoru $\vec{x} \in V$ při změně báze:

Vektor $\vec{x}$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{e_j}$ (a koeficienty této kombinace jsou souřadnicemi $\vec{x}$ v bázi $\underline{e}$) a současně lze $\vec{x}$ jednoznačně vyjádřit jako lin. kombinaci vektorů $\vec{f_j}$ (a koeficienty této kombinace jsou souřadnicemi $\vec{x}$ v bázi $\underline{f}$):

$$\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{e_1} + \alpha_2 \cdot \vec{e_2} + ... + \alpha_n \cdot \vec{e_n} = \beta_1 \cdot \vec{f_1} + \beta_2 \cdot \vec{f_2} + ... + \beta_m \cdot \vec{f_m}$$

[15] Cauchyho věta: $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$. Důkaz této věty viz BP Danešová, str. 25. Občas se hodí použít důsledek této věty, a sice: ... pokud dílčí matice mají nenulový determinant, ani determinant jejich součinu se nemůže rovnat nule.

Dosadíme-li do právě uvedeného vztahu $\vec{e_j}$ pomocí vztahu 8.1 po sloupcích, dostaneme:

$$\alpha_1 \cdot \sum_k \vec{f_k} \cdot p_{k1} + \alpha_2 \cdot \sum_k \vec{f_k} \cdot p_{k2} + ... + \alpha_n \cdot \sum_k \vec{f_k} \cdot p_{kn} = \beta_1 \cdot \vec{f_1} + \beta_2 \cdot \vec{f_2} + ... + \beta_m \cdot \vec{f_m}$$

Porovnáním koeficientů u $\vec{f_j}$ na obou stranách dostaneme systém rovnic:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot p_{11} + \alpha_2 \cdot p_{12} + ... + \alpha_n \cdot p_{1n} &= \beta_1, \\ \alpha_1 \cdot p_{21} + \alpha_2 \cdot p_{22} + ... + \alpha_n \cdot p_{2n} &= \beta_2, \\ &... \\ \alpha_1 \cdot p_{n1} + \alpha_2 \cdot p_{n2} + ... + \alpha_n \cdot p_{nn} &= \beta_m; \end{aligned}$$

tedy dostali jsme SLR s neznámými $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Maticově:

$$P_{\underline{f} \to \underline{e}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\underline{f}} \quad / \cdot P^{-1} zleva \tag{8.3}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\underline{e}} = P^{-1}_{\underline{e} \to \underline{f}} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\underline{f}} \tag{8.4}$$

(označení v indexu matice P je pouze pomocné – jedná se o jednu matici P a její inverzi P^{-1}).

Věta 19 Převádění souřadnic vektorů při změně báze: *a) Pro vztah 8.1 mezi bázemi platí, že souřadnice vektorů přepočítáváme pomocí vztahu 8.3.*
b) naopak pro vztah 8.2 mezi bázemi souřadnice vektorů přepočítáváme pomocí vztahu 8.4.

Poznámka: Přepočítávání souřadnic vektoru lze chápat jako identické zobrazení téhož vektoru na sebe sama. Všimněte si prosím následující korespondence plynoucí z právě uvedené věty: **Při vyjádření souřadnic vektoru v jiné bázi potřebujeme matici přechodu v opačném směru!!!** Například vztah 8.3 vyjádří souřadnice vektoru v bázi $\underline{f}$, ale potřebuje k tomu matici přechodu $\underline{f} \to \underline{e}$, což je v dosavadním označení matice P – čili matice přechodu $\underline{f} \to \underline{e}$ je potřeba k vyjádření souřadnic vektoru v bázi $\underline{f}$!!!

Příklad 34 *(Horák, str. 54) Najděte matici přechodu od báze $\underline{f}$ k bázi $\underline{e}$ pro*

$$\underline{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \underline{f} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right),$$

protože potřebujete vyjádřit souřadnice vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{\underline{e}}$ *v bázi $\underline{f}$.*

Řešení: Hledáme matici P typu 3/3 tak, že pro přechod od báze $\underline{f}$ k bázi $\underline{e}$ platí vztah 8.1:

$$\begin{aligned} \underline{e} &= \underline{f} \cdot P_{\underline{f}\to\underline{e}}, \text{ tedy} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Přehoďme pouze obě strany této maticové rovnice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S využitím významu násobení matic a rozepsáním tohoto násobení po sloupcích vlastně současně řešíme tři systémy lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Každý ze systémů najde jeden sloupec matice P. Protože OVŠEM všechny tři systémy mají stejnou matici A, lze je řešit současně (řešení provedeme Gauss-Jordanovou metodou, tj. matici A upravíme pomocí EŘÚ na matici jednotkovou), vektory pravých stran napíšeme všechny tři za svislou čáru:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 9 & 12 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{3} \\ \cdot 2 - r_1 \\ \cdot(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +7 \cdot r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{r} -3 \cdot r_2 - r_3 \\ -r_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ve sloupcích matice P jsou souřadnice vektorů $\vec{e_j}$ v bázi $\underline{f}$. Díky nalezení matice přechodu $P_{\underline{f}\to\underline{e}}$ nyní můžeme přepočítávat (jak plyne z věty 19) v opačném směru.

Například vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{\underline{e}}$ pomocí 8.3 přepočteme do báze $\underline{f}$ takto:

$$P_{\underline{f}\to\underline{e}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}_{\underline{f}}.$$

Příklad 35 *Variace na příklad 34: Máte zadány tytéž báze $\underline{e}$, $\underline{f}$ jako v příkladu 34 a vektor $\begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$. Vypočtěte jeho souřadnice v bázi $\underline{e}$, pokud je zadána matice přechodu $P_{\underline{f}\to\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.*

1. způsob řešení, asi rychlejší: Mohli bychom si napsat převodní vztah 8.3 a doplnit do něj, co známe:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}_{\underline{f}}.$$

To je vlastně SLR, jehož vyřešením dostaneme

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{\underline{e}}.$$

2. způsob řešení: pomocí inverzní matice přechodu $P^{-1}_{\underline{e}\to\underline{f}}$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ +2\cdot r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +4\cdot r_2 + 3\cdot r_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow P^{-1}_{\underline{e}\to\underline{f}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{a proto}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{\underline{e}}$$

Příklad 36 *Podívejme se nyní na obecný příklad změny matice lineárního zobrazení při změně bází vstupního a cílového prostoru:*

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadané v běžných bázích:

$$\underline{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \underline{f} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, *tj.*

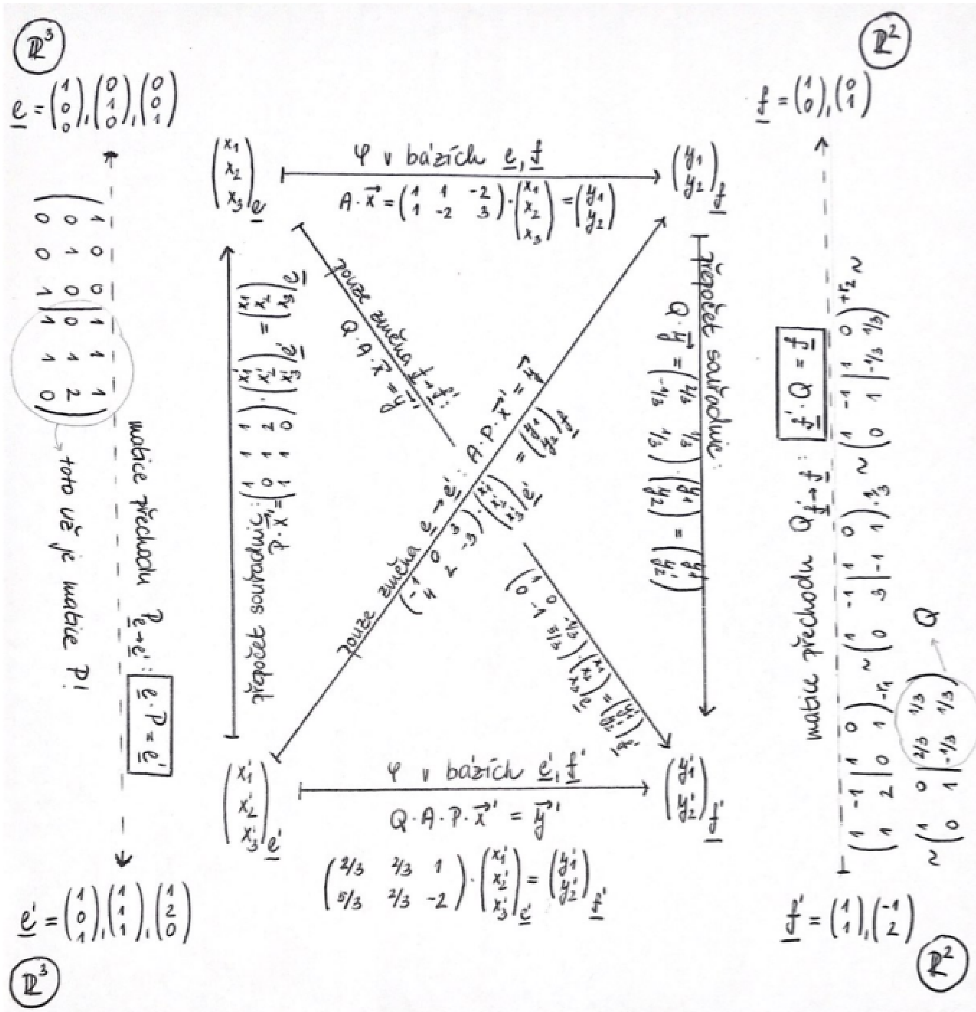
$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Jak se změní matice tohoto zobrazení, pokud báze $\underline{e}$ prostoru $\mathbb{R}^3$, $\underline{f}$ prostoru $\mathbb{R}^2$ změníme na báze $\underline{e'}$, $\underline{f'}$:

$$\underline{e'} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \underline{f'} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Řešení: Složíme tři lineární zobrazení:

- přepočet báze v prostoru $\mathbb{R}^3$,
- zobrazení φ,
- přepočet báze v prostoru $\mathbb{R}^2$.



Shrnutí příkladu: Obecně řečeno, při změně báze jednoho či obou prostorů dojde ke změně matice lineárního zobrazení φ – složí se s jedním či dvěma lineárními transformacemi vstupního či cílového prostoru způsobenými změnou báze:

- φ v bázích $\underline{e}, \underline{f}$...zadané maticí A, přepočet vektorů: $\vec{y_{\underline{f}}} = A \cdot \vec{x_{\underline{e}}}$,
- φ v bázích $\underline{e'}, \underline{f}$...zadané maticí $A \cdot P$, přepočet vektorů: $\vec{y_{\underline{f}}} = A \cdot P \cdot \vec{x_{\underline{e'}}}'$,
- φ v bázích $\underline{e}, \underline{f'}$...zadané maticí $Q \cdot A$, přepočet vektorů: $\vec{y_{\underline{f'}}} = Q \cdot A \cdot \vec{x_{\underline{e}}}$,
- φ v bázích $\underline{e'}, \underline{f'}$...zadané maticí $Q \cdot A \cdot P$, přepočet vektorů: $\vec{y_{\underline{f'}}}' = Q \cdot A \cdot P \cdot \vec{x_{\underline{e'}}}'$

Definice 26 *Lineární zobrazení $\psi : V \to V$ se nazývá lineární transformace (vstupní i cílový prostor je jeden a tentýž).*

Lineární zobrazení $\psi : V \to V$ se nazývá automorfismus (vektorového prostoru na sebe sama), je-li navíc bijektivní.

Příkladem automorfismu je právě přepočet souřadnic vektorů způsobený změnou báze (automorfismus – A je regulární a čtvercová).

Příklad 37 *Určete, jak se změní matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

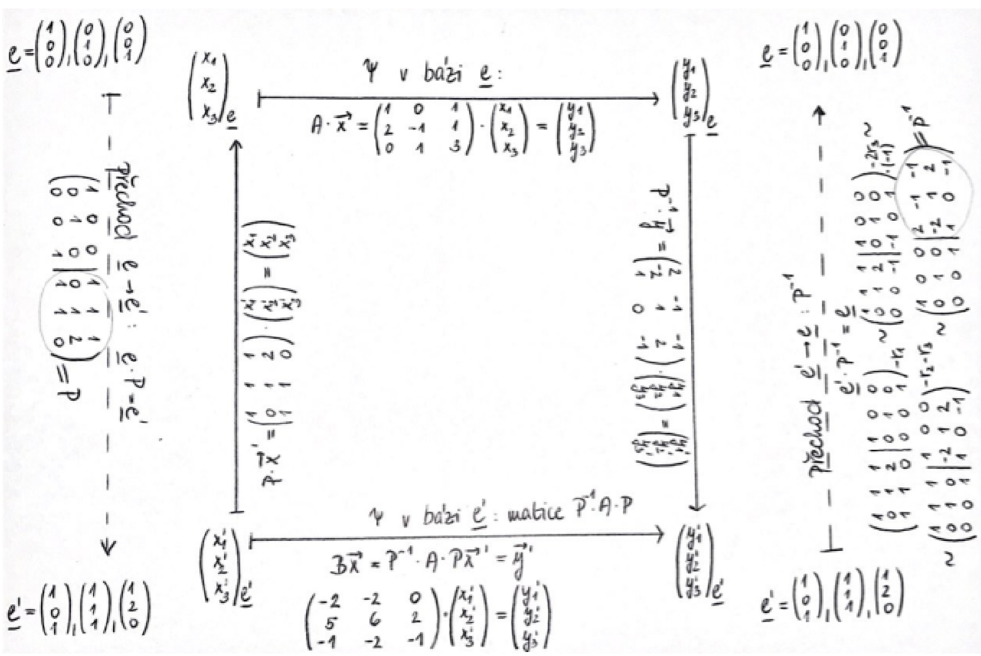
lineární transformace $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *při změně báze*

$$\underline{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

na bázi

$$\underline{e}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Řešení: Podobné příkladu 36 s tím rozdílem, že zpětný přepočet báze je zadán maticí inverzní ke vstupnímu přepočtu báze.



Definice 27 *Čtvercové matice* A, B *jsou podobné, když pro nějakou regulární* P *platí:*

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Poznámka: Podobnost je relace ekvivalence na množině čtvercových matic. Právě přepočtená matice B v příkladu 37 je podobná k zadané matici A lin. transformace. Tedy podobné matice A, B jsou matice téže lineární transformace – pouze se jedná o vyjádření této transformace v různých bázích.

8.2 Cvičení 8

- cvičení na lineární zobrazení a jeho jádro a obor hodnot
-
-

Úloha 8.1 *Lineární zobrazení* $\varphi : R^3 \rightarrow R^3$ *je zadáno obrazy vektorů:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Nalezněte vyjádření zobrazení* φ *pomocí matice* A.

b) *Nalezněte všechny vzory vektoru* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *vzhledem k zobrazení* φ.

Úloha 8.2 *Lineární zobrazení* $\psi : R^3 \rightarrow R^4$ *je zadáno maticí*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Nalezněte bázi a dimenzi jeho jádra* $Ker(\psi)$.

b) *Nalezněte bázi a dimenzi jeho obrazu* $Im(\psi)$.

Úloha 8.3 *Lineární zobrazení* $\varphi : R^3 \rightarrow R^3$ *je zadáno obrazy vektorů:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) *Nalezněte vyjádření zobrazení* φ *pomocí matice* A.

b) *Nalezněte všechny vzory vektoru* $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *vzhledem k zobrazení* φ.

Úloha 8.4 *Lineární zobrazení $\psi : R^4 \;\to\; R^3$ je zadáno maticí*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) *Nalezněte bázi a dimenzi jeho jádra $Ker(\psi)$.*

b) *Nalezněte bázi a dimenzi jeho obrazu $Im(\psi)$.*

Úloha 8.5 *Lineární zobrazení $\varphi : R^3 \;\to\; R^3$ je zadáno maticí $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.*

a) *Zjistěte, na jakou množinu bodů se při tomto zobrazení zobrazí přímka $p = \{[1+t, 2-t, 1-t],]; t \in R\}$.*

b) *Vyjádřete zobrazení φ pomocí obrazů tří vektorů.*

Úloha 8.6 *Pro lineární zobrazení $\psi : R^3 \;\to\; R^4$ je*

$$Ker(\psi) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad Im(\psi) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sestrojte matici zobrazení ψ. Pokud zjistíte, že takových zobrazení existuje více, stačí nalézt jedno z nich.

Úloha 8.7 *Lineární zobrazení $\varphi : R^3 \;\to\; R^3$ je zadáno maticí $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.*

a) *Napište vyjádření zobrazení φ pomocí vzorce.*

b) *Nalezněte všechny vzory vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vzhledem k zobrazení φ.*

Úloha 8.8 *Pro lineární zobrazení* $\psi : R^4 \rightarrow R^3$ *je*

$$Ker(\psi) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad Im(\psi) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Sestrojte matici zobrazení ψ. *Pokud zjistíte, že takových zobrazení existuje více, stačí nalézt jedno z nich.*

Úloha 8.9 *Lineární zobrazení* $\varphi : R^3 \rightarrow R^3$ *je zadáno maticí* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) *Zjistěte, na jakou množinu bodů se při tomto zobrazení zobrazí rovina* $\alpha : \; 2x - 3y + z + 1 = 0$.

b) *Vyjádřete zobrazení* φ *jednoznačně pomocí obrazů tří vektorů.*

Úloha 8.10 *Lineární zobrazení* $\varphi : R^3 \rightarrow R^3$ *je zadáno maticí*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda je toto zobrazení

a) *injektivní (pomocí báze a dimenze jeho jádra:* φ *je injektivní* $\Leftrightarrow \; Ker(\varphi) = \{\vec{o}\}$*).*

b) *surjektivní (pomocí jeho obrazu* $Im(\psi)$*).*

Úloha 8.11 *Lineární zobrazení* φ *je zadáno maticí*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte všechny vzory vektoru $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *vzhledem k tomuto zobrazení.*

Úloha 8.12 *Lineární zobrazení* $\varphi : R^3 \rightarrow R^2$ *má jádro*

$$Ker(\varphi) = \{p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \;\; p \in R\}.$$

Napište jeho konkrétní matici (stačí jednu z možností, pokud řešení existuje více) tak, aby zobrazení φ *bylo surjektivní.*

9 Týden 9

9.1 Kapitola 9: skalární součin vektorů, velikost vektoru, kosinová věta, odchylka vektorů, Schwarzova nerovnost

Nejdůležitějším pojmem tohoto semestru je pojem zobrazení:

a) Už při definici vektorového prostoru se objevuje násobení (skalár krát vektor), což je zobrazení $T \times V \to V$ s jistými třemi dalšími vlastnostmi (toto zobrazení bychom mohli nazvat jako **akce tělesa** T **na množině** V),

b) Každá reálná matice A typu m/n představuje **lineární zobrazení** $\varphi : V \to W$, kde $dim(V) = n, dim(W) = m$, toto zobrazení splňuje tzv. podmínky linearity:

$$\varphi(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u}) + \beta \cdot \varphi(\vec{v})$$

c) Na determinant $det(A)$ se lze dívat jako na zobrazení $det : V^n \to \mathbb{R}$, které přiřazuje n řádkům matice A reálné číslo $det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n})$,

- zobrazení, které přiřazuje n vektorům číslo se nazývá **forma**,
- platí D2:

$$det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_n}) = -det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_n})$$

  ...záměna pořadí dvou vektorů změní znaménko obrazu, této vlastnosti říkáme, že **forma je antisymetrická**,
- platí D3: každá souřadnice zobrazení det splňuje podmínku linearity:

$$det(\vec{a_1}, ..., \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, ..., \vec{a_n}) = \alpha \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{u}, ...\vec{a_n}) + \beta \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{v}, ...\vec{a_n})$$

  ...říkáme, že fotma det je **multilineární = lineární v každé složce**.

$\Rightarrow$ celkem $det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}) : V^n \to \mathbb{R}$ je **antisymetrická multilineární forma**.

d) V této kapitole se budeme zabývat zobrazením typu skalární součin – zobrazení $V^2 \to \mathbb{R}$, které přiřazuje dvěma vektorům skalár a splňuje jisté vlastnosti.

Definice 28 *Pozitivně definitní symetrická bilineární forma $V^2 \to \mathbb{R}$ se nazývá* **skalární součin***:*

a. $skal(\vec{u}, \vec{u}) > 0, \forall \vec{u} \in V$ *kromě nulového vektoru ($\vec{u} \neq 0$)...* **pozitivně definitní***,*

b. $skal(\vec{u}, \vec{v}) = skal(\vec{v}, \vec{u})$*...***symetrická***,*

c. *splňuje podmínky linearity v každé složce – je multilineární pro $n = 2$ čili* **je bilineární***:*

$$\begin{aligned} skal(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, \vec{w}) &= \alpha \cdot skal(\vec{u}, \vec{w}) + \beta \cdot skal(\vec{v}, \vec{w}) \\ skal(\vec{u}, \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}) &= \alpha \cdot skal(\vec{u}, \vec{v}) + \beta \cdot skal(\vec{u}, \vec{w}) \end{aligned}$$

...linearita vzhledem ke druhé složce (= druhá z rovností) už plyne ze symetrie a z linearity v první složce, takže by se nemusela v definici uvádět.

d. *a pro formu ještě dodejme, že skalární součin je reálná* **forma***, tj. přiřazuje dvěma vstupním vektorům reálné číslo (výsledkem skalárního součinu vektorů je skalár).*

Definice 29 *Prostor $(V;+;\cdot)$, na kterém je definován skalární součin, se nazývá* **Euklidovský vektorový prostor**.

Příklad 38 *Některé příklady vektorových prostorů a skalárního součinu vektorů:*

a) $V = C\langle a;b\rangle$*...prostor reálných spojitých funkcí na intervalu* $\langle a;b\rangle$.

Pro $f(x), g(x) \in C\langle a;b\rangle$ *lze definovat:*

$$skal(f(x), g(x)) := \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Takto definovaný skalární součin opravdu splňuje všechny čtyři požadované vlastnosti: ad d) výsledkem určitého integrálu je reálné číslo; ad c) linearita skalárního součinu plyne z linearity integrálu:

$$\int_a^b (\alpha\cdot f_1(x)+\beta\cdot f_2(x))\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\cdot\int_a^b f_1(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \beta\cdot\int_a^b f_2(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

ad b) integrál ze součinu funkcí f, g nezáleží na jejich pořadí, čili platí vlastnost symetrie; ad a) a platí též vlastnost pozitivní definitnosti:

$$skal(f(x), f(x)) = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

pro $f(x) \neq 0$.

b) *V* $\mathbb{R}^3$ *je skalární součin vektorů definován standardně:*

$$skal(\vec{u},\vec{v}) := u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3$$

tato bilineární forma opět splňuje všechny čtyři vlastnosti (pozitivní definitnost, symetrii, linearitu v každé složce, vlastnost formy = výsledek je reálé číslo).

Tento běžně užívaný skalární součin lze napsat i ve vektorovém/maticovém tvaru:

$$skal(\vec{u},\vec{v}) := \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3\end{pmatrix}\cdot E\cdot\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}.$$

V předchozím zápisu je důležité, že vektor $\vec{u}$ je napsán jako řádkový vektor a $\vec{v}$ jako sloupcový vektor, jinak by totiž nebylo možné jejich maticový-vektorový součin provést. Protože důsledně (aspoň od šesté přednášky důsledně, protože od té doby *provádíme maticové násobení), $\vec{u}$ vždy označuje vektor sloupcový, tj. v učebnici s přesným značením vždy uvidíte součin* $skal(\vec{u},\vec{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *vyjádřen jako* $skal(\vec{u},\vec{v}) := \vec{u}^T \cdot \vec{v}$ *(tj. vektor psaný do řádku označujeme jako vektor transponovaný).*

c) *Matice E v příkladu b) by mohla být nahrazena libovolnou symetrickou maticí A, jejíž všechny hlavní minory jsou kladné*[16]*, tj. platí:*

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, ..., |A| > 0.$$

...tj. klasicky definovaný skalární součin (b) není jediná možnost, (c) naznačuje i další možnosti. Každá bilineární forma definovaná vztahem

$$skal(\vec{u},\vec{v}) := (u_1, u_2, ..., u_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ \vec{v_n} \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

by mohla být vzata jako definice skalárního součinu, jestliže matice A je symetrická a pozitivně definitní matice. Úsporný vektorově-maticový zápis: $skal(\vec{u},\vec{v}) := \vec{u}^T \cdot A \cdot \vec{v}$.

Definice 30 *Čtvercová matice A řádu n je*

a) *symetrická, pokud $a_{ij} = a_{ji}$ (prvky souměrné vzhledem k hlavní diagonále jsou totožné, tj. platí $A = A^T$),*

b) *antisymetrická, pokud $a_{ij} = -a_{ji}$ (prvky souměrné vzhledem k hlavní diagonále se liší o znaménko).*

c) *pozitivně (kladně) definitní, když $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kromě nulového vektoru ($\vec{x} \neq \vec{o}$) platí:*

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} > 0 \tag{9.2}$$

(vektorově-maticově lze nerovnost psát $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} > 0$).

[16] Matice, jejíž všechny hlavní minory jsou kladné, představuje zobrazení, které je pozitivně definitní. Tato podmínka o hlavních minorech tedy zaručuje pozitivní definitnost takto definovaného skalárního součinu. Ještě to bude řečeno jednou ve větě 22.

Věta 20 *(Shilov, str. 209) Symetrická (čtvercová) matice A je pozitivně definitní $\Leftrightarrow$ všechny její hlavní minory jsou kladné, tj. platí:*

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, ..., |A| > 0.$$

Definice 31 *Nechť $(V; +; \cdot)$ je Euklidovský vektorový prostor (= vektorový prostor se skalárním součinem) a nechť $(\vec{u_1}, ..., \vec{u_k})$ je posloupnost vektorů.*

Pak **Grammova matice** *je matice všech možných skalárních součinů:*

$$G(\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}) = \Big(skal(\vec{u_i}, \vec{u_j})\Big)_{k \times k} = \begin{pmatrix} skal(\vec{u_1}, \vec{u_1}) & skal(\vec{u_1}, \vec{u_2}) & ... & skal(\vec{u_1}, \vec{u_k}) \\ skal(\vec{u_2}, \vec{u_1}) & skal(\vec{u_2}, \vec{u_2}) & ... & skal(\vec{u_2}, \vec{u_k}) \\ ... & & & \\ skal(\vec{u_k}, \vec{u_1}) & skal(\vec{u_k}, \vec{u_2}) & ... & skal(\vec{u_k}, \vec{u_k}) \end{pmatrix}$$

Grammův determinant *$detG(\vec{u_1}, ..., \vec{u_k})$ je determinant z Grammovy matice.*

Věta 21 *(samozřejmá) Ze symetrie skalárního součinu a definice Grammovy matice hned plyne, že Grammmova matice je symetrická matice.*

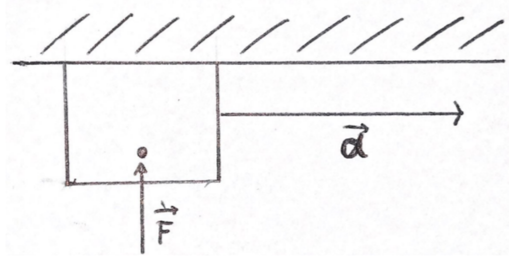
K čemu je Grammova matice dobrá? Je to matice, pomocí níž můžeme v mnoha případech definovat skalární součin vztahem 9.1, tj. v mnoha případech pro ni platí všechny vztahy a vlastnosti, které platí pro skalární součin. Ve kterých mnoha případech? V těch, kdy Grammova matice je matice pozitivně definitní, protože to je jenom někdy:

Věta 22 *(Zlatoš, str. 255) V Euklidovském vektorovém prostoru: Vektory $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$ jsou lineárně nezávislé $\Leftrightarrow$ jejich Grammova matice je pozitivně (kladně) definitní.*

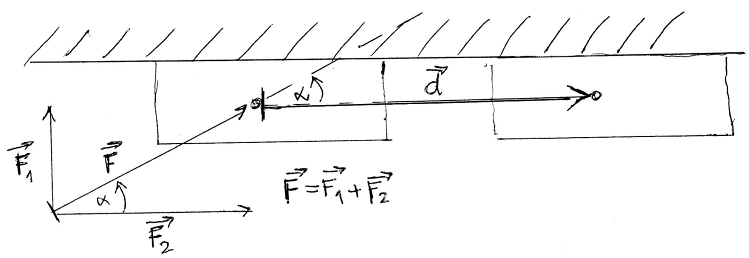
Čili pro každou uspořádanou k-tici lineárně nezávislých vektorů je $G(\vec{u_1}, ..., \vec{u_k})$ maticí, pomocí níž lze definovat skalární součin na k-rozměrném podprostoru $L(\vec{u_1}, ..., \vec{u_k})$ těmito vektory generovaném, vztahem $skal(\vec{x}, \vec{y}) := \vec{x}^T \cdot G(\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}) \cdot \vec{y}$, protože Grammova matice je symetrická a pozitivně definitní, a tedy tímto vztahem definuje pozitivně definitní (a) symetrickou (b) bilineární (c) formu (d) skalárního součinu.

Fyzikální význam skalárního součinu v aritmetickém vektorovém prostoru: pokud posunujeme skříň do vzdálenosti a směru $\vec{d}$ a tlačíme na ni kolmo na směr posunutí, nevykonáme žádnou práci, tj.:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 0$$



Tedy se zdá, že na práci vykonanou ve směru $\vec{d}$ bude mít vliv ta část síly $\vec{F}$, která bude působit ve stejném směru jako $\vec{d}$.



Když působíme na skříň v šikmém směru, sílu $\vec{F}$ lze rozložit na součet sil $\vec{F_1}, \vec{F_2}$.
Síla $\vec{F_1}$ nevykoná ve směru $\vec{d}$ žádnou práci (viz předchozí obrázek).
Na práci ve směru $\vec{d}$ má vliv jen síla $\vec{F_2}$. Z toho plyne poučení, že skalární součin vyjadřuje míru vlivu vektoru $\vec{F}$ ve směru $\vec{d}$ (míra vlivu $\vec{F}$ je vyjádřena průmětem kolmým $\vec{F}$ do směru $\vec{d}$).

$$\begin{aligned} ||\vec{F_2}|| &= ||\vec{F}|| \cdot \cos\varphi \\ W = \vec{F} \cdot \vec{d} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{d}|| \cdot \cos\varphi &= ||\vec{d}|| \cdot ||\vec{F}|| \cdot \cos\varphi = ||\vec{d}|| \cdot ||\vec{F_2}|| \end{aligned}$$

Práce vykonána při posunutí ve směru a délce $\vec{d}$ působením síly $\vec{F}$ je rovna skalárnímu součinu $\vec{d} \cdot \vec{F}$.
(Při skalárním součinu sestrojujeme průmět kolmý jednoho vektoru do směru druhého vektoru.)

Geometrický význam skalárního součinu: obsah obdélníku o stranách $||\vec{d}||$ a $(||\vec{F}|| \cdot \cos\varphi)$.

Poznámka. Rád bych upozornil studenty na jednu věc, která se může hodit při pamatování definice skalárního součinu a čtení celé této kapitoly: V definici skalárního součinu, část (a), a ve vztahu 9.2 se vyskytuje dvakrát tentýž vektor! Kdežto skalární součin, jak je vidět z definice, vlastností (b), (c), (d) a vztahu 9.1, zpracovává dva obecně různé vstupní vektory na číslo!! Tj. tři vlastnosti definice skalárního součinu (a celý skalární součin obecně) mají na vstupu dva vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ – pouze vlastnost (a) má jako vstup stejný vektor použitý dvakrát!!
Díky vlastnosti (a) ze skalárního součinu, aplikované na jediný vektor, ovšem právě můžeme dobře definovat velikost jednoho vektoru $\vec{u}$.

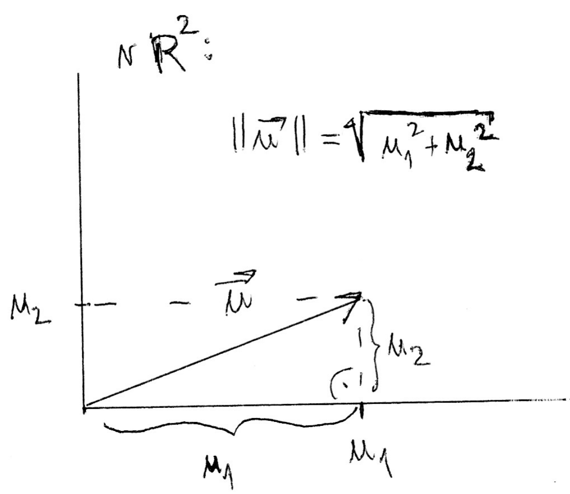
Definice 32 *Norma (= velikost) vektoru $\vec{u}$ na Euklidovském prostoru se definuje*

$$||\vec{u}|| := \sqrt{skal(\vec{u}, \vec{u})}.$$

Poznámka: Na pojmech skalární součin dvou vektorů a velikost jednoho vektoru je krásné to, že vypočtené reálné číslo nezávisí na bázi zvolené pro skalární součin (tj. pro Grammovu matici).

Tj. tyto pojmy jsou příkladem tzv. **invariantů** neboli veličin, které nezávisí na volbě báze v daném Euklidovském vektorovém prostoru.

Další, neméně důležitá poznámka, asi důležitější než předchozí: Velikost vektoru v aritmetickém vektorovém prostoru R^n není nic neobvyklého – pro $n = 2$ a grafické znázornění těchto vektorů v rovině vlastně velikost vektoru vypočteme z Pythagorovy věty, viz obrázek:



Nicméně předchozí definice umožňuje definovat velikost na jakémkoli vektorovém prostoru se skalárním součinem (tedy zjednodušeně řečeno, vztah pro velikost vektoru je zobecněním Pythagorovy věty), a sice pomocí vlastnosti (a) skalárního součinu, která přiřadí jakémukoli vektoru $\vec{u} \in V$ kladné číslo pro $\vec{u} \neq \vec{o}$ a nulu pro $\vec{u} = \vec{o}$.

Ad příklad 5: I na prostoru spojitých funkcí na intervalu, jehož dimenze je nekonečná, lze docela dobře definovat velikost vektoru (funkce) pomocí skalárního součinu:

$$||f(x)|| := \sqrt{skal(f(x), f(x))} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

(pozitivní definitnost skalárního součinu zaručuje, že pod odmocninou bude nezáporné číslo, výsledkem odmocnění je tedy vždy číslo reálné).

Věta 23 *Vlastnosti normy (= velikosti) vektoru: pro $||\vec{v}||$ na Euklidovském vektorovém prostoru platí:*

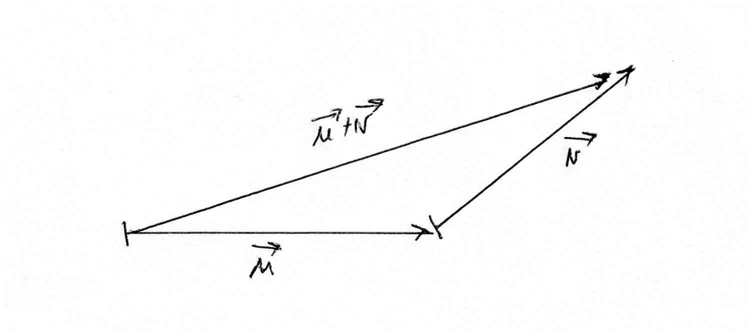
a) $||\vec{u}|| \geq 0$, *přičemž* $||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}$ *(pozitivní definitnost),*

b) $||\alpha \cdot \vec{u}|| = |\alpha| \cdot ||\vec{u}||$ *(homogenita),*

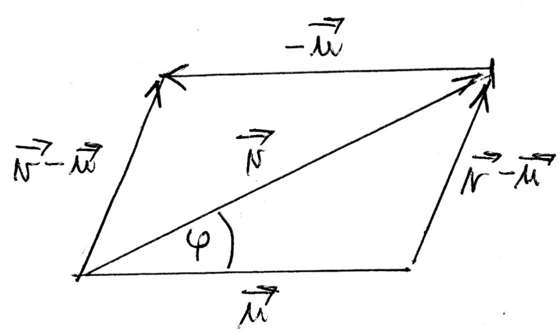
c) $||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ *(trojúhelníková nerovnost),*

d) *pro $\vec{u} \neq \vec{o}$ lze vektor $\vec{u}$ tzv. normovat = „prodloužit či zkrátit“ na velikost 1 následovně: Jestliže $\vec{u}$ je vektor obecné nenulové velikosti, tak vektor $\frac{1}{||\vec{u}||} \cdot \vec{u}$ je vektorem s velikostí rovnou* 1.

Poznámka ad (c). Trojúhelníková nerovnost je jakýmsi zobecněním klasické trojúhelníkové nerovnosti v rovině, viz obrázek s označením stan trojúhelníka pomocí vektorů, jejichž velikosti v nerovnosti vystupují:



Posledním pojmem, který ještě má dobrý smysl zobecnit, je odchylka vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ – u volných vektorů v rovině (ad příklad 3) je to úhel, který vektory svírají, jestliže jeden rovnoběžně posuneme tak, aby počáteční bod obou vektorů byl stejný:



V R^n lze odchylku vektorů vyjádřit pomocí kosinové věty:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha$$

přechází v našem označení do tvaru

$$\|\vec{v}-\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos\varphi.$$

Levou stranu této rovnosti lze psát

$$skal(\vec{v}-\vec{u}, \vec{v}-\vec{u}) = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos\varphi$$

a upravit na

$$\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2 \cdot skal(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos\varphi,$$

ještě zjednodušme na tvar

$$-2 \cdot skal(\vec{u}, \vec{v}) = -2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi, \quad \text{respektive} \quad skal(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi.$$

Odtud plynou dvě věci: a) vyjádřením

$$\cos\varphi = \frac{skal(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \tag{9.3}$$

dostáváme vzorec pro odchylku dvou vektorů ve smyslu orientovaných úseček; b) protože $\cos\varphi \leq 1$, lze rovnost $skal(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi$ zprava doplnit nerovností

$$skal(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|,$$

což je známo jako Schwarzova nerovnost $skal(\vec{u}, \vec{v}) \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ vektorů ve smyslu orientovaných úseček (a dokonce víme, že rovnost nastává pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Lze nějak obecně definovat odchylku vektorů a dokázat Schwarzovu nerovnost i pro ty vektorové prostory, kde je skalární součin definován jinak než v R^n? Ano, většinou tak, že dokážeme Schwarzovu nerovnost pro obecné vektory (z obecné definice našeho předmětu) a odvodíme z ní vzorec pro odchylku obecných vektorů:

Věta 24 (Schwarzova nerovnost) *Na euklidovském vektorovém prostoru V platí $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$:*

$$|skal(\vec{u}, \vec{v})| \quad \leq \quad ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \tag{9.4}$$

(a rovnost nastává, když oba vektory jsou lineárně závislé, tj. $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$).

Důkaz: Není složitý, ale vyžaduje pojem ortogonální projekce vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$, takže ji dokážeme až v následující kapitole. $\square$.

Poznámka. Stále v obecném případě nemáme úhel φ – k němu dospějeme takto: 9.4 upravme vydělením[17] na tvar

$$\frac{|skal(\vec{u}, \vec{v})|}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} \quad \leq \quad 1.$$

Při odstranění absolutní hodnoty v čitateli zlomku dostaneme

$$-1 \leq \frac{skal(\vec{u}, \vec{v})}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} \quad \leq \quad 1,$$

a nyní si uvědomíme, že hodnota zlomku $\frac{skal(\vec{u}, \vec{v})}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$ leží v intervalu $\langle -1; 1 \rangle$, stejně jako definiční obor funkce $\arccos x$, a tedy každé hodnotě zlomku $\frac{skal(\vec{u}, \vec{v})}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$ lze přiřadit hodnotu $\cos\varphi$ a dostáváme stejný vzorec 9.3 nyní v jakémkoli obecném vektorovém prostoru.

[17] Předtím musíme předpokládat, že $\vec{u} \neq \vec{o}$ a $\vec{v} \neq \vec{o}$ ... ale tuto situaci lze vyřešit třeba tak, že odchylku vektorů, z nichž alespoň jeden je nulový, lze definovat jako 0.

Definice 33 *Pro nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ z Euklidovského prostoru lze definovat jednoznačně odchylku φ vztahem:*

$$\cos\varphi := \frac{skal(\vec{u}, \vec{v})}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||},$$

tj. pro hodnotu zlomku z intervalu $< -1; 1 >$ přiřadí funkce arccos(x) úhel φ interval $< 0; \pi >$ jednoznačně, tj. na $< 0; \pi >$ existuje právě jedno φ splňující daný vztah.

Poznámka: Známe-li odchylku, můžeme vyjádřit hodnotu skalárního součinu obou vektorů:

$$skal(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\varphi.$$

Ad příklad (38-a): $V = C\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ je prostor reálných spojitých funkcí na intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$.

Když vezmeme $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, jaká je odchylka těchto dvou vektorů v obecném smyslu? Potřebujeme tři věci:

$$skal(f(x), g(x)) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{1}{2},$$

$$\|f(x)\| = \|\sin x\| = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x} = \cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\|g(x)\| = \|\cos x\| = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x} = \cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

a dosazením do vzorce pro $\cos\varphi$ dostaneme

$$\cos\varphi = \frac{skal(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{2}{\pi},$$

odtud $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{2}{\pi} \doteq 0{,}5669$ rad, což je asi $11,5^\circ$.

9.2 Cvičení 9

- matice přechodu, změna matice zobrazení při změně báze

Úloha 9.1 *Přepište zobrazení $\varphi : R^3 \to R^3$ z příkladu číslo 8.1 zadané vzhledem ke standardní bázi na vstupu i na výstupu do tvaru zadaného na vstupu i na výstupu vzhledem k bázi*

$$\underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Úloha 9.2

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\alpha} \quad \textit{pro bázi } \underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right);$$

vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{v}$ *vzhledem k bázi*

$$\underline{\beta} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Úloha 9.3

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\alpha} \quad \textit{pro bázi } \underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right);$$

vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{v}$ *vzhledem k bázi*

$$\underline{\beta} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Úloha 9.4

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\alpha} \quad \textit{pro bázi } \underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right);$$

vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{v}$ *vzhledem k bázi*

$$\underline{\beta} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Úloha 9.5 *Přepište zobrazení* $\psi : R^2 \to R^2$ *zadané vzhledem ke standardní bázi na vstupu i na výstupu maticí* $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ *do tvaru zadaného na vstupu i na výstupu vzhledem k bázi*

$$\underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Úloha 9.6 *Přepište zobrazení* $\psi : R^2 \to R^2$ *zadané vzhledem ke standardní bázi na vstupu i na výstupu maticí* $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *do tvaru zadaného na vstupu i na výstupu vzhledem k bázi*

$$\underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

10 Týden 10

10.1 Kapitola 10: Ortogonalita vektorů a její využití

V příkladu fyzikálního významu skalárního součinu byla řeč o kolmém průmětu – musíme se tedy chvíli věnovat pojmu kolmost.

Definice 34 a) *Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ v Euklidovském prostoru jsou ortogonální, když platí:*

$$skal(\vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

Poznámka: Někdy se zaměňují pojmy ortogonálnost a kolmost. Kolmost definujeme v $\mathbb{R}^n$ pro vektory $\vec{u}, \vec{v}$, které jsou nenulové. Ortogonálnost připouští, aby některý z vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ (nebo oba) byl nulový, je to tedy obecnější pojem než kolmost.

Často je při práci s bázemi vektorových podprostorů vhodné, aby v nich byly vektory, které jsou navzájem ortogonální.

Definice 45 b) *Báze podprostoru, nebo libovolná posloupnost nezávislých vektorů je:*

a) *ortogonální, jestliže každé dva vektory z této posloupnosti jsou ortogonální,*

b) *ortonormální, jestliže je ortogonální a velikost všech vektorů je normovaná (= 1).*

Poznámka: Grammova matice ortogonální báze vektorů je diagonální, grammova matice ortonormální báze je jednotková.

Pokud už máme ortogonální matici, lze definovat i ortogonální matici a ortogonální zobrazení. Ortogonální zobrazení pak bude přirozeně reprezentováno ortogonální maticí.

Definice 45 c) *Čtvercová matice A je ortogonální, jestliže její sloupce jsou navzájem ortogonální.*

Lineární zobrazení $\varphi : V \to W$ je ortogonální zobrazení, jestliže zachovává výsledek skalárního součinu, tj.:

$$skal(\vec{u}, \vec{v}) = skal(\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}))$$

Poznámka: Protože norma vektoru se definuje pomocí skalárního součinu, ortogonální zobrazení zachovává i normu = velikost vektorů. Tedy ortogonální zobrazení zachovává i odchylky vektorů, protože odchylka se definuje pomocí skalárního součinu a normy.

Pojďme nyní k otázce nalezení ortonormální/ortogonální báze jistého vektorového podprostoru, když je nám známa jeho báze $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$, která ortogonální není. Obecně následující věta platí i pro vektory lineárně závislé – její důkaz je konstruktivní a bude vysvětlen na příkladu.

Věta 25 *Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces: Nechť $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$ jsou vektory euklidovského prostoru $\Rightarrow$ existují po dvou ortogonální vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_l}$ tak, že platí*

$$L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}) = L(\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_k}).$$

Poznámka: V rámci předchozí věty lze říci, že vlastně nalezené vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_k}$ tvoří množinu ortogonálních generátorů vektorového prostoru $L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k})$. Jestliže některé z vektorů $\vec{e_i}$ jsou nulovými vektory, jejich vypuštěním dostaneme ortogonální bázi $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_l}$ vektorového prostoru $L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k})$, kde $l \leq k$. Tedy celou předchozí větu lze formulovat i následovně:

Jestliže $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$ jsou vektory euklidovského prostoru, pak existují po dvou ortogonální **nenulové** vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_l}$ tak, že $l \leq k$ a platí

$$L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}) = L(\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_l}).$$

Příklad 39 *Nalezněte ortogonální bázi podprostoru $U = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$:*

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Mohli bychom nejprve vyřadit některý z vektorů, pokud je závislý na těch ostatních; když se tomu vyhneme, podívejme se na to, jak si s tím následující algoritmus poradí:

a) $\vec{e_1} := \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$...první z konstruovaných vektorů necháme být,

b) Hledáme

$$\vec{e_2} := p_1 \cdot \vec{e_1} + \vec{u_2} / \cdot \vec{e_1}$$

...musíme určit neznámou konstantu p_1, využijeme ortogonality $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ tedy toho, že platí $skal(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = 0$:

$$0 = p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + skal(\vec{e_1}, \vec{u_2}) \Rightarrow p_1 = \frac{-skal(\vec{e_1}, \vec{u_2})}{skal(\vec{e_1}, \vec{e_1})} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Našli jsme tedy vektor:

$$\vec{e_2} = -\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

c) Hledáme

$$\vec{e_3} := p_1 \cdot \vec{e_1} + p_2 \cdot \vec{e_2} + \vec{u_3} / \cdot \vec{e_1}$$

$$\vec{e_3} := p_1 \cdot \vec{e_1} + p_2 \cdot \vec{e_2} + \vec{u_3} / \cdot \vec{e_2}$$

... při určení neznámých konstant p_1, p_2 vynásobíme zvlášť tutéž definiční rovnici už zkonstruovanými vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ – zatím sice $\vec{e_3}$ neznáme, ale protože $skal(\vec{e_1}, \vec{e_3}) = 0$, $skal(\vec{e_2}, \vec{e_3}) = 0$, tak $\vec{e_3}$ z rovnic vypadne a dostaneme 2 rovnice pro 2 neznámé konstanty p_1, p_2:

$$\begin{aligned} 0 &= p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + p_2 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_2}) + skal(\vec{e_1}, \vec{u_3}) \\ 0 &= p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_2}) + p_2 \cdot skal(\vec{e_2}, \vec{e_2}) + skal(\vec{e_2}, \vec{u_3}) \\ \Rightarrow 0 = p_1 \cdot 6 + 0 + 2 \quad \Rightarrow \quad & p_1 = -\frac{1}{3} \\ 0 = 0 + p_2 \cdot \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad & p_2 = 1 \end{aligned}$$

Našli jsme vektor:

$$\vec{e_3} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pokud jsme nevyloučili $\vec{u_3}$ závislý na vektorech $\vec{u_1}, \vec{u_2}$, tak Grammův-Schmidtův proces najde $\vec{e_3} = 0$, a ten do báze nebereme, i když je ortogonální k $\vec{e_1}$ i k $\vec{e_2}$.

Odpověď: $L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ je vektorový podprostor dimenze 2 a jeho ortogonální báze je např.:

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(Atd., při větším počtu vektorů hledáme $e_4 := p_1 \cdot \vec{e_1} + p_2 \cdot \vec{e_2} + p_3 \cdot \vec{e_3} + \vec{u_4}$ a když tuto definiční rovnost vynásobíme zvlášť vektory $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, dostaneme tři rovnice pro tři neznámé p_1, p_2, p_3.)

Definice 35 *Množiny vektorů A, B jsou ortogonální, když:*

$$\forall \vec{a} \in A, \vec{b} \in B : \textit{vektory } \vec{a}, \vec{b} \textit{ jsou ortogonální.}$$

(Značíme $A \perp B$.)

Z linearity skalárního součinu plyne, že množiny A, B jsou ortogonální právě tehdy, když jsou ortogonální i vektorové podprostory $\langle A \rangle, \langle B \rangle$ jimi generované. Proto má smysl následující definice:

Definice 36 *Když U je vektorový podprostor euklidovského prostoru V, tak ortogonální doplněk $U^\perp$ podprostoru U v prostoru V se definuje jako množina všech vektorů ortogonálních k U:*

$$U^\perp = \{\vec{x} \in V : skal(\vec{x}, \vec{u}) = 0 \ \forall \vec{u} \in U\}$$

Věta 26 **a)** *Ortogonální doplněk $U^\perp$ je vektorový podprostor,*

b) $V = U + U^\perp$ *(tzn. přímý součet, tj. $U \cap U^\perp = \vec{o}$, $dim(V) = dim(U) + dim(U^\perp)$),*

c) $(U^\perp)^\perp = U$,

d) $(U + S)^\perp = U^\perp \cap S^\perp$,

e) $(U \cap S)^\perp = U^\perp + S^\perp$.
...(d,e je vlastně jakousi analogii de Morganových pravidel (viz Základy matematiky, kap. 4) pro vektorové podprostory U, S euklidovského prostoru V.

Příklad 40 *V prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor*

$$U = \langle \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

Najděte ortonormální bázi podprostoru $U^\perp$.

Řešení: Nejprve z vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ eventuálně vyloučíme vektor závislý na těch ostatních; pokud bychom na to zapomněli, algoritmus si s tím stejně poradí. Dále zapíšeme do rovnic kolmost vektoru $\vec{x}$ na každý z vektorů $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$:

Pro $\vec{x} \in U^\perp$ platí:

$$\begin{aligned} skal(\vec{x}, \vec{u_1}) &= 0 \\ skal(\vec{x}, \vec{u_2}) &= 0 \\ skal(\vec{x}, \vec{u_3}) &= 0 \end{aligned}$$

To je SLR:

$$\begin{array}{rcll} x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 &=& 0 & \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &=& 0 & -r_1 \\ 2x_1 + x_2 + \qquad 2x_4 &=& 0 & -2\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\cdot r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 &=& s - 2t \\ x_2 &=& 2t - 2s \\ x_3 &=& s \\ x_4 &=& t \end{array}$$

Tedy řešením SLR jsme našli vektory z $U^\perp$:

$$\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

...lineární kombinace bázických vektorů, zortogonalizujeme Gr.-Schm. procesem:

$$\begin{aligned}\vec{e_1} &= \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{e_2} := p_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\\0\\1\end{pmatrix} / \cdot \vec{e_1}\\ \Rightarrow 0 &= 6p_1 - 6 \Rightarrow p_1 = 1 \Rightarrow \vec{e_2} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vektory znormalizujeme a připravili jsme bázi prostoru $U^\perp$:

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\0\end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Příklad 41 *Nalezněte bázi podprostoru $W^\perp$, je-li W zadán jako podprostor řešení homogenní soustavy:*

$$\begin{aligned}3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 0\\ 3x_1 \qquad - 2x_3 - 9x_4 &= 0\\ x_3 + x_4 &= 0\end{aligned}$$

Řešení: W je množina všech vektorů $\vec{x}$, pro které platí:

$$skal\left(\begin{pmatrix}3\\3\\2\\7\end{pmatrix}, \vec{x}\right) = 0, skal\left(\begin{pmatrix}3\\0\\-2\\-9\end{pmatrix}, \vec{x}\right) = 0, skal\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{x}\right) = 0,$$

...tedy $W^\perp$ je právě podprostor generovaný vektory $\begin{pmatrix}3\\3\\2\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-2\\-9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Ověříme pouze, zda tyto vektory jsou lineárně nezávislé:

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & -9\\3 & 3 & 2 & 7\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} -r_1 \quad \sim \quad \begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & -9\\0 & 3 & 4 & 16\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow W^\perp = \left(\begin{pmatrix}3\\3\\2\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-2\\-9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Poznámka: Poslední dobrůtka, kterou nyní potřebujeme použít u pojmu ortogonalita, je tzv. ortogonální projekce vektoru do podprostoru. K čemu to potřebujeme?

a) Pokud chceme např. určit odchylku vektoru od podprostoru, promítneme tento (nenulový) vektor kolmo do daného podprostoru, a určíme odchylku vektoru a jeho průmětu,

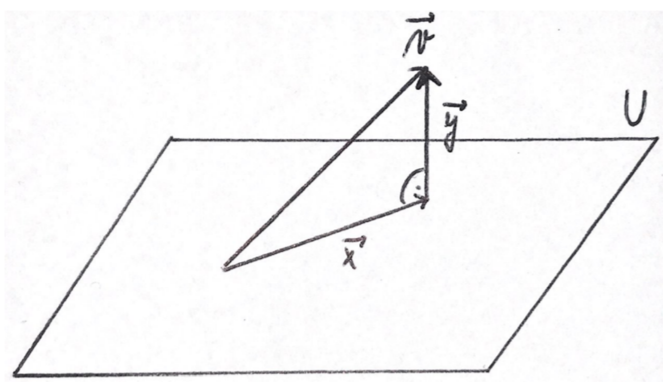
b) Ortogonální projekci budeme potřebovat při konstrukci n-rozměrného objemu,

c) Při výpočtu skalárního či vektorového součinu pracujeme s kolmými průměty vektoru do směru druhého vektoru (u skalárního součinu) a do směru kolmého na druhý vektor (u vektorového součinu). Rozklad vektoru na součet dvou vektorů, které jsou na sebe kolmé, lze tedy spočítat s využitím kolmého průmětu.

Definice 37 *Ortogonální projekce nenulového vektoru $\vec{v}$ do podprostoru U je vektor $\vec{x}$ takový, že:*

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{v}$$

kde $\vec{x} \in U, \vec{y} \in U^{\perp}$.



(Vše se odehrává v euklidovském prostoru, protože bez skalárního součinu není umožněn pojem kolmosti.)

Konstrukce ortogonální projekce bude vysvětlena na příkladu.

Příklad 42 *Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ do podprostoru generovaného vektory:*

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Podívejme se, zda $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ jsou lineárně nezávislé, a vybereme z nich bázi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ +r_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{báze } U = \left(\vec{w_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{w_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-2\end{pmatrix}\right).$$

Protože projekce $\vec{x} \in U$, lze $\vec{x}$ vyjádřit jako lineární kombinaci $\vec{w_1}, \vec{w_2}$:

$\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{w_1} + \alpha_2 \cdot \vec{w_2} \Rightarrow \vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$, kde $skal(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Dosazením za $\vec{x}$ do vyjádření vektoru $\vec{v}$ máme

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{w_1} + \alpha_2 \cdot \vec{w_2} + \vec{y}.$$

Nyní vynásobením této rovnosti zvlášť vektory $\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$ dostaneme dvě rovnice, ze kterých vypadne $\vec{y}$, protože $\vec{y} \perp U = L(\vec{w_1}, \vec{w_2})$:

$$\begin{aligned} skal(\vec{v}, \vec{w_1}) &= \alpha_1 \cdot skal(\vec{w_1}, \vec{w_1}) + \alpha_2 \cdot skal(\vec{w_1}, \vec{w_2}) + 0 \\ skal(\vec{v}, \vec{w_2}) &= \alpha_1 \cdot skal(\vec{w_1}, \vec{w_2}) + \alpha_2 \cdot skal(\vec{w_2}, \vec{w_2}) + 0 \end{aligned}$$

...dvě rovnice o dvou neznámých α_1, α_2.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-3\\4\end{pmatrix}, \vec{w_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{w_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-2\end{pmatrix} \implies \left.\begin{aligned} 4 &= \alpha_1 \cdot 4 + \alpha_2 \cdot 0 \\ -12 &= \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2$$

$$\Rightarrow \vec{x} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\5\end{pmatrix}$$

Poznámka: Vektor $\vec{y}$ lze nyní už snadno vyjádřit:

$$\vec{y} = \vec{v} - \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Příklad je hotov. $\square$

Projekce vektoru $\vec{v}$ do směru jednoho vektoru $\vec{u}$: toto je speciální případ předchozího příkladu, který najde vzorec projekce do jednorozměrného prostoru. Ve skriptech není odvozeno, ale odvození je na videu 09, v době 1:17:30 až 1:22:30. Získáváme vzorec

$$p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u}. \tag{10.1}$$

Důkaz Schwarzovy nerovnosti (věty 24): viz video 10, čas 1:32:00 až 1:44:00, s využitím předchozího vzorce 10.1 pro projekci vektoru $\vec{v}$ do směru vektoru $\vec{u}$.

10.2 Cvičení 10: Ortogonální doplněk, ortogonalizace, ortogonální projekce

-
-

11 Týden 11

11.1 Kapitola 11: Vlastní čísla a vlastní vektory lineárního zobrazení; konstrukce matice zobrazení pomocí vlastních vektorů

Zde je možná užitečné zmínit jeden další pojem: vektor, který se zobrazí na sebe sama nebo na svůj vlastní násobek, se nazývá **vlastní vektor**; a daná násobená hodnota se nazývá **vlastní hodnota**.

Definice 38 *Vlastní vektor lineární transformace $\varphi : V \to V$ je takový NENULOVÝ vektor $\vec{v}$, který se zobrazí na svůj vlastní násobek, tj.*

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}.$$

Číslo λ z právě uvedené rovnosti nazýváme vlastní hodnotou náležející k vektoru $\vec{v}$ vzhledem k zobrazení φ.

Tedy vektor $\vec{u_1}$ je vzhledem k osové souměrnosti f vlastním vektorem, příslušný násobek 1 je jeho vlastní hodnota:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Nebo vektor $\vec{u_3} = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ je vlastním vektorem, protože se zobrazí na svůj (-1)-násobek:

$$\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} \to f\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

Z definice vlastního vektoru plyne i postup, jak tyto vlastní vektory a vlastní hodnoty nalézt.

Příklad 43 Vlastní čísla osové souměrnosti nalezena z geometrického názoru: *viz video 11, doba 8:00 až 16:00.*

Věta 27 a) *$\vec{v_1}, ...\vec{v_k}$ jsou vlastní vektory reálné matice A, každý s jiným vlastním číslem $\Rightarrow$ jsou lineárně nezávislé.*

b) *Vlastní vektory odpovídající jedné vlastní hodnotě tvoří vektorový podprostor.*

Důkaz:

ad a) Dokažme indukcí: za prvé: $m = 1$...vektor $\vec{v}$ je lineárně nezávislý, protože je nenulový;

za druhé – dokažme indukční krok:

$$\text{tvrzení platí pro } m-1 \text{ vlastních vektorů matice } A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{tvrzení platí pro } m \text{ vlastních vektorů matice } A.$$

Předpokládejme sporem, že nenulový vektor $\vec{v}_m$ je závislý na vektorech $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_{m-1}$, tj.

$$\vec{v_m} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + ... + \alpha_{m-1} \cdot \vec{v}_{m-1}$$

a současně některé $\alpha_i \neq 0$.
Vynásobme danou rovnost maticí A a využijeme převodu pomocí $A \cdot \vec{v_i} = \lambda_i \cdot \vec{v_i}$:

$$\lambda_m \cdot \vec{v_m} = \alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{v_2} + ... + \alpha_{m-1} \cdot \lambda_{m-1} \cdot \vec{v_{m-1}}.$$

Pokud od této rovnice odečteme λ_m-násobek rovnice

$$\vec{v_m} = \alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + ... + \alpha_{m-1} \cdot \vec{v}_{m-1},$$

dostaneme:

$$\vec{o} = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) \cdot \vec{v_1} + ... + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) \cdot \vec{v}_{m-1}.$$

Na základě indukčního předpokladu nyní musí být všechny koeficienty rovny 0, protože $\vec{v_1}, ..., \vec{v_{m-1}}$ jsou lineárně nezávislé $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_m$...spor s tím, že všechny λ_i jsou různé.

ad b) Prostor vlastních vektorů pro jedno stejné λ je uzavřen na lineární kombinace:

$$\left.\begin{array}{rcl} A \cdot \vec{v_1} & = & \lambda \cdot \vec{v_1} \\ A \cdot \vec{v_2} & = & \lambda \cdot \vec{v_2} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cdot (\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2}) = \alpha_1 \cdot A \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot A \cdot \vec{v_2} = \lambda(\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2})$$

...$\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2}$ je vlastní vektor pro totéž λ. Důkaz je hotov.

Nalezení vlastních směrů a hodnot matice A (čtvercové) zadávající lineární trasformaci vektorového prostoru V: Vyjdeme z definičního vztahu

$$\begin{array}{rcl} A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} & = & \lambda \cdot E \cdot \vec{v} \\ (A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{v} & = & \vec{o} \end{array}$$

...vložením jednotkové matice E se pravá strana rovnosti nezmění, ale nám se tím pádem podaří na obou stranách rovnosti matice stejného rozměru, které můžeme od sebe odečíst.

Převodem pravé strany na levou a vytknutím $\vec{v}$ vidíme, že vektor $\vec{v}$ leží v jádru zobrazení $A - \lambda \cdot E$, protože se tímto zobrazením zobrazí na nulový vektor!!!

V jádru $Ker(A - \lambda \cdot E)$ vždy leží vektor $\vec{v} = \vec{o}$, ale ten nás nezajímá, protože nulový vektor se nepovažuje za vlastní vektor.

Vlastní vektory v jádru $Ker(A - \lambda \cdot E)$ leží tehdy, když systém $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{v} = \vec{o}$ má nekonečně mnoho řešení. Tj. nalézt vlastní vektory u čtvercové matice A je totéž jako nalézt nenulové vektory jádra $Ker(A-\lambda\cdot E)$, tj. nalézt nenulová řešení systému $(A-\lambda\cdot E)\cdot\vec{v}=\vec{o}$.

Aby tedy nenulová řešení systému $(A-\lambda\cdot E)\cdot\vec{v}=\vec{o}$ vůbec existovala, musí tento systém mít více než jedno (nulové) řešení – tj. podle Frobeniovy věty musí mít tento SLR řešení nekonečně mnoho, tedy příslušný schodový tvar matice musí mít aspoň jeden nulový řádek, čili matice $(A-\lambda\cdot E)$ je singulární, některý řádek je závislý na těch ostatních, tj. determinant této matice je roven nule.

Odtud plyne následujíc ALGEBRAICKÝ postup nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů:

krok 1 : Nejprve najdeme vlastní čísla: Řešíme rovnici $det(A-\lambda\cdot E)=0$... jediná rovnice s jedinou neznámou λ ... najdeme tím všechna vlastní čísla.

krok 2 : Do systému $(A-\lambda\cdot E)\cdot\vec{v}=\vec{o}$ dosadíme konkrétní číslo λ a příslušné vlastní vektory nalezneme jako nenulová řešení tohoto SLR.

Příklad 44 *Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory lin. zobrazení* $A=\begin{pmatrix}5&3\\3&5\end{pmatrix}$ *zadaného v bázi* $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

(zobrazení $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$*je transformací roviny).*

Řešení: viz přednáška. Postup je velmi podobný postupu v následujícím příkladu, jen se jedná o jednodušší příklad než ten následující, protože je zde o dimenzi méně.

Příklad 45 *Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory lin. zobrazení* $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&-2&0\\-2&0&3\end{pmatrix}$ *zadaného v bázi* $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(zobrazení $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$*je transformací trojrozměrného prostoru).*

Řešení: První krok – najdeme všechna vlastní čísla vyřešením rovnice pro neznámou λ:

$$\begin{aligned}
det(A-\lambda\cdot E) &= 0\\
det\begin{pmatrix}0-\lambda&0&-2\\0&-2-\lambda&0\\-2&0&3-\lambda\end{pmatrix} &= 0\\
(3-\lambda)\cdot(\lambda^2+2\lambda)+4\cdot(\lambda+2) &= 0\\
(\lambda+2)\cdot(3\lambda-\lambda^2+4) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_1 &= -2 \\ \lambda_{2,3} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4 \end{aligned}$$

Druhý krok: Najdeme vlastní vektor příslušný ke každému vlastnímu číslu:

$\lambda_1 = -2$: řešíme SLR:

$$(A-(-2)\cdot E)\cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow v_{11} = 0, v_{12} = t, v_{13} = 0; t \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{vlastní směr: } t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = -1$: řešíme SLR:

$$(A-(-1)\cdot E)\cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ +2\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow v_{21} = 2t, v_{22} = 0, v_{23} = t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{vlastní směr: } t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Tedy } \Rightarrow \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

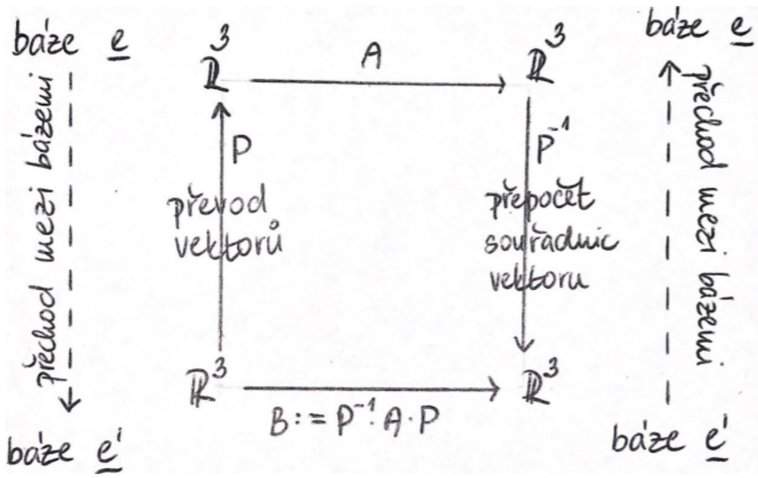
$\lambda_3 = 4$: řešíme SLR:

$$(A-4\cdot E)\cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow v_{31} = -\frac{t}{2}, v_{32} = 0, v_{33} = t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ vlastní směr: $t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vektor $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ je příslušným vlastním vektorem. Vlastní vektory i vlastní čísla jsou nalezeny.

Dříve než se pustíme do dalších věcí, dokončíme nyní zkoumání vlastních čísel a vlastních vektorů vzhledem k ortogonalitě (teorie + následující příklad viz Kovár, str. 122-128):

Vraťme se k situaci nějaké lineární transformace $\varphi : V \to V'$ zadané ve dvou různých bázích: maticí A v bázi $\underline{e}$ a maticí $P^{-1} \cdot A \cdot P$ v bázi $\underline{e'}$, viz kapitola 8:



(A, B...podobné matice = matice stejné lineární transformace v různých bázích.)

Bez důkazu uvedeme několik vět a jeden příklad, ke kterému směřujeme.

Věta 28 *Podobné matice A, B (tedy takové matice, že existuje regulární matice P, že $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$) mají stejné vlastní hodnoty.*

Tj. vlastní hodnoty lineární transformace jsou invarianty – nemění se se změnou báze.

Věta 29 *Reálná čtvercová symetrická matice má právě n navzájem různých vlastních hodnot a vlastní vektory příslušející různým vlastním hodnotám jsou navzájem ortogonální.*

A vrcholem bude následující věta, která ve svém tvrzení uvádí i návod na řešení následujícího příkladu.

Věta 30 *Pro každou symetrickou reálnou matici A, která reprezentuje lineární transformaci $\varphi : V \to V$ existuje ortonormální báze složená z vlastních vektorů matice A, ve které má transformace φ diagonální matici D složenou z vlastních čísel na své hlavní diagonále.*

Navíc matice přechodu H je ortogonální a její inverzi získáme pouhým transponováním $H^{-1} = H^T$.

$$D = H^T \cdot A \cdot H$$

Ad příklad 45: *Najděte diagonální reprezentaci D lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadané symetrickou maticí*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Nalezněte také ortonormální bázi, vzhledem k níž je φ diagonální, a ověřte, že platí $D = H^T \cdot A \cdot H$.

Řešení: Matice D se skládá z vlastních čísel, které jsme našli v příkladu 45: Vlastní hodnotě $\lambda_1 = -2$ odpovídá vlastní vektor $\vec{v_1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

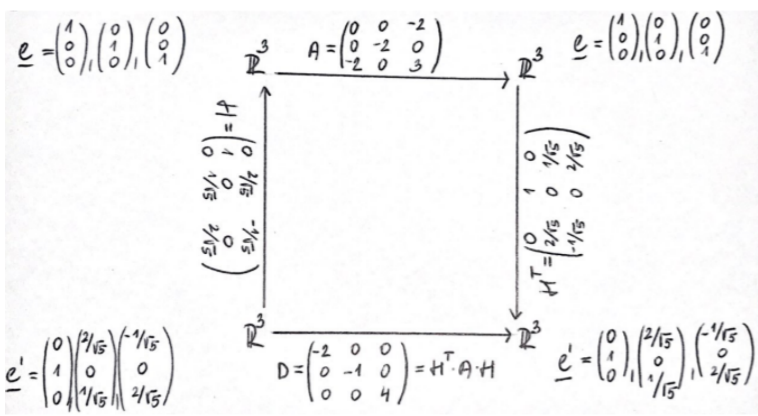
Vlastní hodnotě $\lambda_2 = -1$ odpovídá vlastní vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, který ještě normujeme, protože jej budeme chtít použít do ortonormální báze:

$$|| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} || = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =: \vec{v_2}$$

A konečně, vlastní hodnotě $\lambda_3 = 4$ odpovídá vlastní vektor $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, který ještě normujeme:

$$|| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} || = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \vec{v_3} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =: \vec{v_3}.$$

Sestavení konstrukce předchozí věty: Na diagonále matice D jsou vlastní čísla λ_i ve stejném pořadí, v jakém jsme dali do báze $\underline{e'}$ jejich normované vlastní vektory:



Proč platí $H^{-1} = H^T$? Protože

$$H^T \cdot H = (skal(\vec{v_i}, \vec{v_j}))_{i,j=1,2,3} = E.$$

(Vysvětlení: $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ jsou navzájem ortogonální, a přitom jejich velikost $= 1$. Proto

$$\left.\begin{array}{r} i \neq j : skal(\vec{v_i}, \vec{v_j}) = 0 \\ i = j : skal(\vec{v_i}, \vec{v_j}) = ||\vec{v_i}||^2 = 1^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow H^T \cdot H = E$$

(Z jednoznačnosti inverze u regulární matice – algebra 1, větička 4 – dostaneme, že $H^{-1} = H^T$.)

Poznámka: Ne každé lineární zobrazení $V \to V$ je diagonalizovatelné; uvedeným postupem dokážeme najít D, pokud je A symetrická.

Příklad 46 *Pokud je ještě čas, můžeme se pustit do celkového příkladu, kdy matici osové souměrnosti vzhledem k ose $y = \frac{x}{2}$ sestavíme z vlastních čísel a pomocí báze vlastních vektorů a matice přechodu získáme matici této souměrnosti vzhledem ke standardní bázi. Viz otázka číslo 23 v kapitole 13.*

11.2 Cvičení 11: Vlastní čísla a vlastní vektory lineárního zobrazení

-
-
-

Úloha 11.1 *Lineární transformace na vektorovém prostoru je zadána vztahem*

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_1 + 9x_2 \\ -6x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte všechny její vlastní hodnoty a pro každou vlastní hodnotu najděte také aspoň jeden vlastní vektor.

Úloha 11.2 *Lineární transformace $\varphi : R^2 \rightarrow R^2$ je zadána maticí*

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) *Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) této transformace.*

b) *Ilustrujte na konkrétním vektoru, co to znamená, že je vlastním vektorem, a na jiném konkrétním vektoru, co to znamená, že není vlastní vektorem vzhledem k zobrazení φ.*

Úloha 11.3 *Lineární transformace $\varphi : R^2 \rightarrow R^2$ je zadána maticí*

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) *Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) této transformace.*

b) *Ilustrujte na konkrétním vektoru, co to znamená, že je vlastním vektorem, a na jiném konkrétním vektoru, co to znamená, že není vlastní vektorem vzhledem k zobrazení φ.*

Úloha 11.4 *Lineární transformace $\varphi : R^2 \rightarrow R^2$ je zadána maticí*

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) této transformace.

Úloha 11.5 *Lineární transformace* $\varphi : R^2 \to R^2$ *je zadána maticí*

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) této transformace.

Úloha 11.6 *Lineární transformace* $\varphi : R^3 \to R^3$ *je zadána maticí*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) této transformace.

Úloha 11.7 a) *Je zadán vlastní vektor* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *lineární transformace zadané maticí*

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Najděte k němu příslušnou vlastní hodnotu.

b) *Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) osové souměrnosti v rovině s osou souměrnosti* $y = \frac{x}{2}$. *Nápověda: Nemusíte hledat matici zobrazení ani nic počítat, stačí jen využít*

- *geometrických vlastností dané osové souměrnosti;*
- *definice vlastního vektoru (a geometrický význam této definice).*

12 Týden 12

12.1 Kapitola 12: Vlastní čísla podruhé; Grammova matice podruhé; vektorový součin vektorů

Zde chybí několik věcí o tom, co se stane, když hledáme vlastní čísla a vlastní vektory u matice, která není symetrická – tam totiž není zaručeno, že ke každému vlastnímu číslu má prostor vlastních vektorů dimenzi 1 – neboli jinými slovy, u matice A řádu n nemusí existovat n navzájem různých vlastních čísel, ale méně, a pak prostor vlastnímu číslu odpovídajících vlastích vektorů má dimenzi větší než 1. Příklad a vysvětlení viz Zlatoš, str. 413-418 (Zlatoš, Algebra, najdete velké pdf na internetu). Jinými slovy, ne vždy lze matici lineární tramsformace diagonalizovat. Jestliže A je symetrická, tak ano, ale v případě obecné matice A se nám někdy nepodaří najít dostatečný počet vlastních vektorů, aby vytvořily bázi, ve které je matice transformace diagonální. Tzv. Kanonický Jordanův tvar matice A nemusí tedy vždy být diagonální matice.

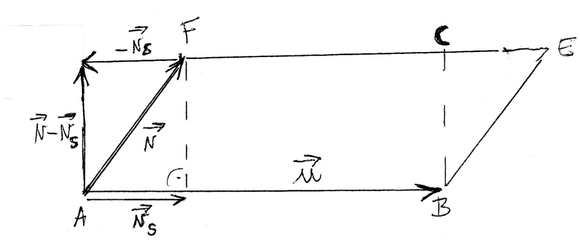
Definice 39 NEORIENTOVANÝ OBJEM v euklidovském vektorovém prostoru:

- *Uvažujeme jednorozměrný objem jako délku vektoru $\vec{u}$:*

$$vol_1(\vec{u}) = ||\vec{u}||$$

- *Dále dvojrozměrný objem $vol_2(\vec{u}, \vec{v})$ bude vyjadřovat obsah rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$ – tento obsah je stejný jako obsah obdélníka $ABCD$, tj.:*

$$vol_2(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v} - \vec{v_S}||$$

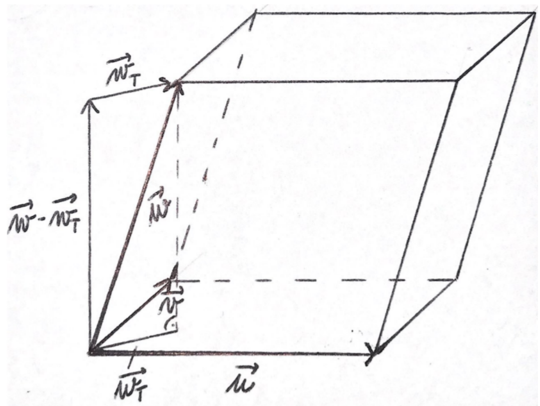


kde $\vec{v_S}$ je ortogonální projekce vektoru $\vec{v}$ do podprostoru $S = L(\vec{u})$, tedy $vol_2(\vec{u}, \vec{v}) = vol_1(\vec{u}) \cdot ||\vec{v} - \vec{v_S}||$.

- *Podobně trojrozměrný objem $vol_3(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ vyjadřuje objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ a vypočteme jej jako:*

$$vol_3(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = vol_2(\vec{u}, \vec{v}) \cdot ||\vec{w} - \vec{w_T}||$$

kde $vol_2(\vec{u}, \vec{v})$ je obsah rovnoběžníku, který je základnou rovnoběžnostěnu, a $||\vec{w} - \vec{w_T}||$ je výška rovnoběžnostěnu, určená velikostí vektoru $\vec{w} - \vec{w_T}$, kde $\vec{w_T}$ je kolmý průmět vektoru $\vec{w}$ do podprostoru $T = L(\vec{u}, \vec{v})$.



- *Podle tohoto schématu pokračujeme do vyšších dimenzí a definujeme (rekurentním vztahem) k-rozměrný objem rovnoběžnostěnu jako funkci:*

$$vol_k : V^k \to \mathbb{R}$$

která vektorům $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_{k-1}}, \vec{u_k} \in V$ přiřadí reálné číslo:

$$vol_k(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}) = vol_{k-1}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_{k-1}}) \cdot ||\vec{u_k} - \vec{u_U}||$$

kde $\vec{u_U}$ je ortogonální projekce (= kolmý průmět) vektoru $\vec{u_k}$ do podprostoru $U = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_{k-1}})$.

Poznámka: Z geometrické názornosti takto definovaného objemu plyne, že v naší terminologii k-rozměrný objem je symetrická (objem nezávisí na pořadí vektorů), k-lineární (multilineární = lineární v každé složce) forma. Dále z konstrukce objemu plyne následující věta:

Věta 31 *(Zlatoš, str. 301) V je vektorový prostor se skalárním součinem (= euklidovský vekt. prostor), $k \geq 1$. Pro libovolné vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k} \in V$ platí:*

a) *$vol_k(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}) \geq 0$, přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$ jsou lineárně závislé,*

b) *$\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$ jsou ortogonální $\Leftrightarrow vol_k(\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}) = ||\vec{u_1}|| \cdot ||\vec{u_2}|| \cdot ... \cdot ||\vec{u_k}||$,*

c) *Pokud $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$ jsou lineárně nezávislé, tak lze Gr.-Schm. procesem získat ortogonální vektory $\vec{v_1}, ...\vec{v_k}$ tak, aby*

$$vol_k(\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}) = vol_k(\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}) = ||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}|| \cdot ... \cdot ||\vec{v_k}||.$$

Poznámka ad a) Například jestliže vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ jsou lineárně závislé, tj. leží v jedné rovině, rovnoběžnostěn jimi určený je degenerovaný – jeho objem vol_3 v prostorových jednotkách je roven 0.

Definice 40 *Elementární úpravy matice bilineární formy:*
Bilineární forma $\varphi : V^2 \to \mathbb{R}$ je zadána maticí řádu n tak, že:

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = (u_1, u_2, ..., u_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{pmatrix}$$

Elementární úpravy matice bilineární formy (budeme jim říkat EŘÚ/ESÚ úpravy = řádkové i sloupcové úpravy) jsou takové úpravy, které změní matici A na matici B stejné bilineární formy φ, ovšem vyjádřené v jiné bázi (tj. při tranformaci souřadnic vektorů $\vec{u}, \vec{v}$) a platí:

$$B = P^T \cdot A \cdot P$$

pro nějakou regulární matici P.

Protože do vzorce bilineární formy vstupují dva vektory současně (řádkový i sloupcový), na rozdíl od Gaussovy eliminace každá elementární úprava zde bude spočívat v tom, že s řádkovou úpravou se hned následně provede i sloupcová úprava stejné povahy.

EŘÚ+ESÚ matice bilineární formy*:*

a) *Přehodíme i-tý řádek s j-tým řádkem, a hned poté i-tý sloupec s j-tým sloupcem,*

b) *i-tý řádek vynásobíme nenulovou konstantou c, a hned poté i-tý sloupec vynásobíme c,*

c) *K j-tému řádku přičteme c-násobek i-tého řádku, a hned poté k j-tému sloupci přičteme c-násobek i-tého sloupce.*

Věta 32 *Matice B získaná z matice A elementárními EŘÚ+ESÚ úpravami ($B = P^T \cdot A \cdot P$ pro nějakou regulární P) je maticí téže bilineární formy, pouze vzhledem k jiné bázi daného prostoru.*

Příklad 47 *Převeďte matici A dané symetrické bilineární formy φ vzhledem ke standardní bázi $\underline{e}$ na jinou matici vzhledem k jiné bázi $\underline{e}'$:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: Všimněme si nejprve, jak bilineární forma φ pracuje vzhledem k bázi

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

Např. pro vektory $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ máme:

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = (1, 2, 3, -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -11,5$$

Pokusme se matici A zjednodušit elementárními EŘÚ+ESÚ úpravami:
Strategie: Vezmeme první nenulový prvek a_{ii} a pomocí něj vynulujeme prvky pod ním a napravo od něj – první nenulový na hlavní diagonále je $a_{22} = -2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} +\frac{1}{2} \cdot r_2 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim$$

... a hned provedeme analogickou sloupcovou úpravu – ke 3. sloupci matice přičteme $+\frac{1}{2} \cdot s_2$ (kde s_2 je druhý sloupec matice):

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} +3 \cdot r_3 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \sim$$

...a hned provedeme analogickou sloupcovou úpravu – ke 4. sloupci přičteme $+3 \cdot s_3$:

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} = B$$

...je zachována symetrie matice B a matice B je maticí téže bilineární formy vzhledem k jiné bázi (s úpravami matice B bychom mohli pokračovat).

Vraťme se nyní k výpočtu k-rozměrného objemu, který souvisí s Grammovou maticí z kapitoly 9 :

Věta 33 *(Zlatoš, str. 255, 13.2.1.a) Nechť $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$ jsou libovolné vektory v Euklidovském prostoru. Pak Grammova matice $G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k})$ je semidefinitní symetrická matice, tj.*

$$\forall \vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_k) \in \mathbb{R}^k : (c_1, c_2, ..., c_k) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_k \end{pmatrix} \geq 0$$

(a přitom rovnost nastává právě tehdy, když jsou $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$ lineárně závislé).

Právě vyslovená větička je zajímavá z té pozice zkoumání bilineárních forem – že totiž když u bilineární formu dáme na vstupu namísto dvou různých vektorů jeden stejný vektor dvakrát, dostáváme výsledek vždy nezáporný (a nulový je právě tehdy, když jsou vektory $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$, ze kterých se Grammova matice vytváří poocí všech možných skalárních součinů dvojic, lineárně závislé).

A nejen to – následující věta vlastně tvrdí, že determinant Grammovy matice je vždy nezáporný, tj. jeho odmocnina může právě vyjádřit hodnotu objemu.

Věta 34 *Na euklidovském vektorovém prostoru nad tělesem $\mathbb{R}$ platí pro libovolné vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$:*

$$vol_k(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}) = \sqrt{det\big(G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k})\big)}.$$

Poznámka: Z předchozí věty plyne návod pro výpočet objemu: Vytvoříme Grammovu matici $G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k})$, a protože se jedná o matici symetrické bilineární formy, upravujeme ji symetrickými EŘÚ+ESÚ úpravami na diagonální tvar. Když se nám to podaří, tento diagonální tvar je:

$$\begin{pmatrix} ||\vec{u_1}||^2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ||\vec{u_2}||^2 & 0 & ... & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & ... & 0 & ... & ||\vec{u_k}||^2 \end{pmatrix}$$

a tedy:

$$vol_k(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}) = \sqrt{||\vec{u_1}||^2 \cdot ||\vec{u_2}||^2 \cdot ... \cdot ||\vec{u_k}||^2}$$

Pokud matici na diagonální tvar upravit nelze ($a_{ii} = 0$), znamená to, že:

$$vol_k(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}) = 0$$

Definice 41 *Dvě báze vektorového prostoru jsou souhlasně orientované, pokud matice přechodu mezi nimi má kladný determinant;*

Dvě báze vektorového prostoru jsou nesouhlasně orientované, pokud matice přechodu mezi nimi má záporný determinant.

Poznámka: Relace souhlasné orientace mezi dvěma bázemi (tj. binární relace na množině čtvercových matic daného řádu!) je relací ekvivalence, protože:

- každá báze je souhlasně orientovaná sama se sebou:

$$detE = 1$$

- $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$...relace je symetrická (opět využíváme v tichosti pominutou Cauchyho větu, že determinant součinu matic je roven součinu dílčích determinantů):

$$detP \cdot detP^{-1} = detE = 1 \implies detP > 0 \Leftrightarrow detP^{-1} > 0$$

- $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$...relace je tranzitivní:

$$P_{\alpha\to\beta} \cdot P_{\beta\to\gamma} = P_{\alpha\to\gamma}$$

...vztah mezi maticemi přechodu:

$$detP_{\alpha\to\beta} \cdot detP_{\beta\to\gamma} = detP_{\alpha\to\gamma}$$

a výsledek součinu kladných čísel je opět kladný.

Strategie kladné orientace: Vybereme jednu hezkou bázi (zpravidla standardní) a prohlásíme ji za kladně orientovanou. Pak všechny báze s ní orientované souhlasně mají též kladnou orientaci.

Příklad 48 a) *Kladně orientovaná báze v prostoru jedné dimenze $L(\vec{u})$: báze $\vec{v}$ má stejný směr jako vektor $\vec{u}$,*

b) *Kladně orientovaná báze v prostoru dimenze 2, tj. $L(\vec{u_1}, \vec{u_2})$: otáčíme $\vec{u_1}$ do směru $\vec{u_2}$ proti směru pohybu hodinových ručiček,*

c) *Kladně orientované báze v prostoru dimenze 3, tj. $L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$: pravidlo pravé ruky: když otáčíme $\vec{u_1}$ do směru $\vec{u_2}$ proti směru ručiček, tj. ve směru prstů pravé ruky, vidíme toto otáčení jako proti směru ručiček z vrcholku vektoru $\vec{u_3}$ (= palec ukazuje ve směru vektoru $\vec{u_3}$).*

Definice 42 *Orientovaný k-rozměrný objem: $(V; +; \cdot)$ je k-rozměrný euklidovský prostor a $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$ je jeho kladně orientovaná báze, která je navíc ortonormální.*

Pak orientovaný k-rozměrný objem pro libovolnou posloupnost vektorů $(\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_k})$ definujeme jako determinant:

$$\vec{vol}_k(\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_k}) = det \begin{pmatrix} skal(\vec{x_1}, \vec{u_1}) & skal(\vec{x_2}, \vec{u_1}) & ... & skal(\vec{x_k}, \vec{u_1}) \\ skal(\vec{x_1}, \vec{u_2}) & skal(\vec{x_2}, \vec{u_2}) & ... & skal(\vec{x_k}, \vec{u_2}) \\ ... & & & \\ skal(\vec{x_1}, \vec{u_k}) & skal(\vec{x_2}, \vec{u_k}) & ... & skal(\vec{x_k}, \vec{u_k}) \end{pmatrix}$$

...šipka $\vec{vol}_k$ značí orientaci.

Poznámka:

1) V předchozích příkladech jsme mluvili o (neorientovaném) objemu jako o odmocnině z determinantu – pokud ovšem na diagonále jsou velikosti vektorů z ortonormálního systému, jejich velikost je rovna jedné, a tedy velikost = odmocnině z velikosti, tj. pro $\vec{x_1} = \vec{u_1}, ..., \vec{x_k} = \vec{u_k}$ se jedná u ortonormálního systému o jedno a totéž, objem je roven danému determinantu!

2) Orientovaný objem je tedy definován jako jistý determinant v každém případě; **jednotkou tohoto objemu je objem k-rozměrné krychle vytvořené vektory $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$ kladně orientované ortonormální báze**[18] – sloupce matice, z níž determinant počítáme, jsou tvořeny souřadnicemi vektorů $\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}$ v bázi $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$.

Příklad 49 *Pokud*

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \vec{u_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

tak: $\forall A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ *platí:*

$$det(A) = \vec{vol}(s_1(A), s_2(A), ..., s_k(A)),$$

tj. $det(A)$ *je roven* k*-rozměrnému ORIENTOVANÉMU objemu určenému sloupci této matice.*

Poznámka: Definice 42 nám ukazuje na jiný způsob k pojetí determinantu: pokud se „pohybujeme“ v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ (prostor n-tic reálných čísel je euklidovský), tak $det(A)$ **lze chápat jako orientovaný n-rozměrný objem rovnoběžnostěnu vytvořeného sloupci matice** A.

Věta 35 **a)** *Orientovaný objem vektorů* $\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}$ *je invariant – nezávisí na volbě kladně orientované ortonormální báze,*

b) *V orientovaném* k*-rozměrném euklidovském prostoru* V *je mezi neorientovaným objeme (def. 39) a orientovaným objemem (def. 42) souvislost, kterou bychom očekávali:*

$$vol_k(\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}) = |\vec{vol}_k(\vec{x_1}, ..., \vec{x_k})|$$

Přitom $\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}$ *tvoří kladně orientovanou bázi* V *právě tehdy, když* $\vec{vol}_k(\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}) > 0$.

c) *Důsledek části (b):* $\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}$ *jsou lineárně nezávislé* $\Leftrightarrow \vec{vol}_k(\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}) \neq 0$

Poznámka: Orientovaný k-rozměrný objem se někdy nazývá vnější součin. Pomocí vnějšího součinu se pak obecně definuje pojem vektorového součinu vektorů:

Definice 43 *Mějme kladně orientovanou ortonormální bázi* $\alpha = (\vec{u_1}, ..., \vec{u_n})$, $n \geq 2$, *orientovaného euklidovského prostoru* V.

Pevně zvolené vektory $\vec{x_1}, ..., \vec{x_{n-1}}$ *definují lineární formu* $\psi : V \to \mathbb{R}$*:*

$$\psi(\vec{y}) = \vec{vol}_n(\vec{x_1}, ..., \vec{x_{n-1}}, \vec{y}) =: (\vec{x_1}\vec{x_2}...\vec{x_{n-1}}\vec{y})$$

[18] Odsud až do konce kapitoly je toto předpokládáno: že vektory $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$ vytvářejí kladně orientovanou ortonormální bázi prostoru.

...vektoru $\vec{y}$ je přiřazen vnější součin $(\vec{x_1}\vec{x_2}...\vec{x_{n-1}}\vec{y})$ (označujeme v kulaté závorce bez jakéhokoli znaménka operace) a podle teorie lineárních forem na vektorovém prostoru (podrobněji viz Zlatoš, str. 307):

$$\exists!\vec{v} \in V : \forall \vec{y} \in V : \psi(\vec{y}) = \vec{vol}_n(\vec{x_1}, ..., \vec{x_{n-1}}, \vec{y}) = (\vec{x_1}\vec{x_2}...\vec{x_{n-1}}\vec{y}) = skal(\vec{v}, \vec{y}).$$

Tento jednoznačně určený vektor $\vec{v}$ se nazývá **vektorový součin vektorů** *$\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}}$ (také ortokomplement = ortodoplněk vektorů $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}}$).*
Značíme $\vec{x_1} \times \vec{x_2} \times ... \times \vec{x_{n-1}} =: \vec{v}$.

Poznámka: Podívejme se na to jak náročná definice 43 funguje zejména pro $n = 2$ a $n = 3$:

Pro n=2 : Pro pevně zvolený vektor $\vec{x} \in V$, který doplňuje lineární formu $\psi : V \to \mathbb{R}$, při níž $\psi(\vec{y}) = \vec{vol}_2(\vec{x}, \vec{y}) = skal(\vec{v}, \vec{y})$, tj. přiřazujeme $\vec{y} \mapsto skal(\vec{v}, \vec{y})$, dostaneme:

$$det \begin{pmatrix} skal(\vec{x}, \vec{u_1}) & skal(\vec{y}, \vec{u_1}) \\ skal(\vec{x}, \vec{u_2}) & skal(\vec{y}, \vec{u_2}) \end{pmatrix} = skal(\vec{v}, \vec{y}).$$

Protože tento vztah platí $\forall \vec{y} \in V$, dosaďme za $\vec{y}$ postupně $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ a vypočteme determinant na levé straně rovnosti:

$$\begin{aligned} \vec{y} = \vec{u_1} : det \begin{pmatrix} skal(\vec{x}, \vec{u_1}) & 1 \\ skal(\vec{x}, \vec{u_2}) & 0 \end{pmatrix} &= skal(\vec{v}, \vec{u_1}) \\ -x_2 = -skal(\vec{x}, \vec{u_2}) &= skal(\vec{v}, \vec{u_1}) \\ \vec{y} = \vec{u_2} : det \begin{pmatrix} skal(\vec{x}, \vec{u_1}) & 0 \\ skal(\vec{x}, \vec{u_2}) & 1 \end{pmatrix} &= skal(\vec{v}, \vec{u_2}) \\ x_1 = skal(\vec{x}, \vec{u_1}) &= skal(\vec{v}, \vec{u_2}) \\ \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_\alpha \Rightarrow \vec{v} &= \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \vec{x}^\perp, \end{aligned}$$

tj. vektorovým součinem přiřazeným jednomu vektoru $\vec{x}$ je vektor $\vec{x}^\perp$ naň kolmý:

$$\vec{x}^\perp := \vec{v} = -x_2 \cdot \vec{u_1} + x_1 \cdot \vec{u_2} = \begin{vmatrix} x_1 & \vec{u_1} \\ x_2 & \vec{u_2} \end{vmatrix} =: det(\vec{x}, \alpha^T)$$

...FORMÁLNĚ NAPSANÝ (PROTOŽE VÝSLEDKEM DETERMINANTU JE VEKTOR, NIKOLI JEN REÁLNÉ ČÍSLO) Laplaceův rozvoj determinantu podle 2. sloupce, ve kterém jsou vektory z báze $\underline{\alpha} = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$.

Obecně pro $n > 2$: Označme $x_{ij} := skal(\vec{x_j}, \vec{u_i})$ pro $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1$:

$$X := (x_{ij})$$

...matice typu $n \times (n-1)$, jejíž sloupce tvoří souřadnice vektorů (pevně zvolených) $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x}_{n-1}$ v bázi $\alpha = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_n})$.

Tyto pevně zvolené vektory $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x}_{n-1}$ definují lineární formu $\psi : V \to \mathbb{R}$, při níž:

$$\psi(\vec{y}) = \vec{vol}_n(\vec{x_1}, ..., \vec{x_{n-1}}, \vec{y}) = skal(\vec{v}, \vec{y})$$

...vektor $\vec{v}$ lze označit jako $\vec{x_1} \times \vec{x_2} \times ... \times \vec{x_{n-1}}$.

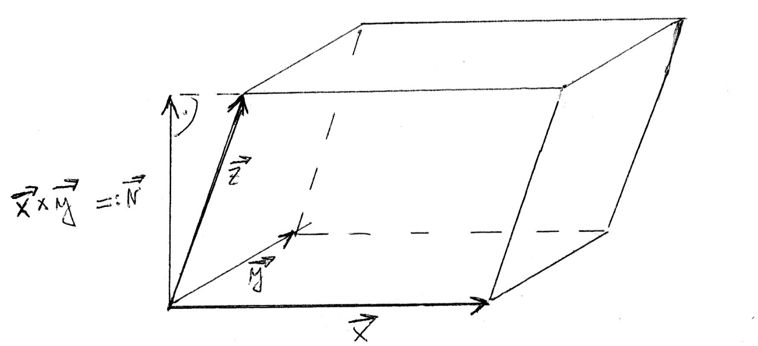
Protože tento vztah platí $\forall \vec{y} \in V$, dosaďme za $\vec{y}$ postupně vektory $\vec{u_1}, ..., \vec{u_n}$. Volbou $\vec{y} = \vec{u_i}$ získáme:

$$skal(\vec{v}, \vec{u_i}) = skal(\vec{x_1} \times ... \times \vec{x_{n-1}}, \vec{u_i}) = det(X, \vec{e_i}) = (-1)^{u+i} \cdot detX_i$$

...kde $\vec{e_i}$ je jednotkový vektor (na pozici i má 1, jinak nuly) a X_i je matice X, které chybí i-tý řádek. Jedná se o FORMÁLNÍ Laplaceův rozvoj determinantu podle posledního sloupce. Vektor $\vec{v}$ lze formálně zapsat jako

$$\vec{v} = \vec{x_1} \times \vec{x_2} \times ... \times \vec{x_{n-1}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \cdot detX_i = \begin{vmatrix} x_{11} & ... & x_{1,n-1} & \vec{u_1} \\ ... & & & \\ x_{n-1,1} & ... & x_{n-1,n-1} & \vec{u}_{n-1} \\ x_{n,1} & ... & x_{n,n-1} & \vec{u_n} \end{vmatrix} =: det(X, \alpha^T)$$

Pro $n = 3$ tedy: Pro pevně dané vektory $\vec{x}, \vec{y}$ existuje jediný vektor $\vec{v}$, označme $\vec{v} := \vec{x} \times \vec{y}$.



$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \vec{i} \\ x_2 & y_2 & \vec{j} \\ x_3 & y_3 & \vec{k} \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2; x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ je ortogonální na prostor $L(\vec{x}, \vec{y})$, tj. $\vec{x} \times \vec{y} \in [L(\vec{x}, \vec{y})]^{\perp}$.

Pro $\vec{x}, \vec{y}$ lineárně nezávislé tvoří vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$ kladně orientovanou bázi $\mathbb{R}^3$.

Při záměně pořadí vektorů $\vec{x}, \vec{y}$ se změní orientace báze $\alpha = (\vec{x}, \vec{y})$, tj. vektorový součin jako součást orientovaného objemu změní znaménko, tj. vektorový součin je antisymetrické zobrazení:

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$$

Věta 36 *Vlastnosti vektorového součinu $\vec{x_1} \times \vec{x_2} \times ... \times \vec{x_{n-1}}$ v orientovaném euklidovském prostoru $V, dim(V) = n$ (Zlatoš 310-311), nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel:*

a) *Vektorový součin $\vec{x_1} \times \vec{x_2} \times ... \times \vec{x_{n-1}}$ je multilineární ((n-1)-lineární) antisymetrické zobrazení:*

$$V^{n-1} \to V$$

b) *Vektory $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}}$ jsou lineárně závislé $\Leftrightarrow \vec{x_1} \times \vec{x_2} \times ... \times \vec{x_{n-1}} = \vec{o}$,*

c) *Pokud $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}}$ jsou lineárně nezávislé, tak $\vec{v} = \vec{x_1} \times \vec{x_2} \times ... \times \vec{x_{n-1}}$ je normálový vektor nadroviny $L(\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}})$, a vektory $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}}, \vec{v}$ tvoří kladně orientovanou bázi,*

d) *V dvojrozměrném orientovaném euklidovském prostoru platí:*

$$||\vec{x}^{\perp}|| = ||\vec{x}||$$

...vektorový součin je unární operace: $\vec{x} \to \vec{x}^{\perp}$,

e) *V trojrozměrném orientovaném euklidovském prostoru platí pro nenulové vektory $\vec{x}, \vec{y}$:*

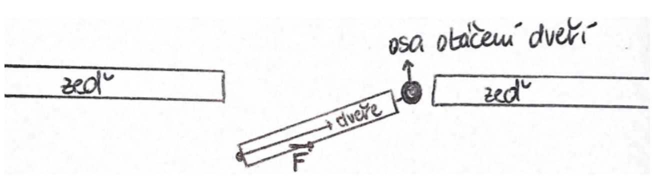
$$||\vec{x} \times \vec{y}|| = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \sin \alpha(\vec{x}, \vec{y})$$

f) *Pro $n \geq 2$ v n-rozměrném orientovaném euklidovském prostoru V platí $\forall \vec{x_1}, ..., \vec{x_{n-1}} \in V$:*

$$||\vec{x_1} \times ... \times \vec{x_{n-1}}|| = vol_{n-1}(\vec{x_1}, ..., \vec{x_{n-1}}) = \sqrt{detG(\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}})}$$

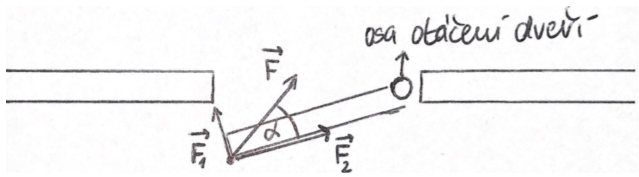
(tedy neorientovaný objem vektorů $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}}$ spočte velikost jejich vektorového součinu).

Fyzikální vlastnosti vektorového součinu: Otáčivý moment $\vec{M}$ tělesa kolem pevné osy při působení síly $\vec{F}$:



Tímto způsobem dveře nepootočíme ani o centimetr. Pomocník snažící se dveře otevřít nebo zavřít svou sílu vynakládá zbytečně, otáčivý moment této síly vzhledem k ose otáčení je nulový vektor.

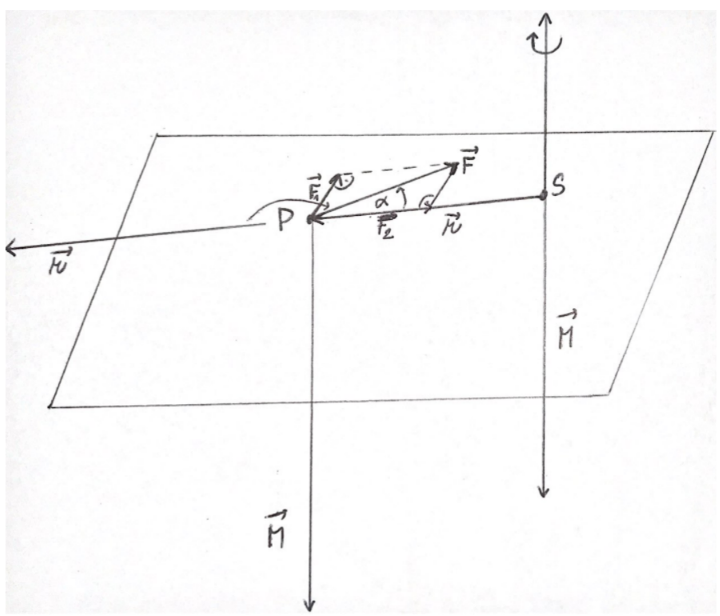
Když síla $\vec{F}$ bude působit šikmo a nikoli rovnoběžně se stěnou dveří, lze ji rozdělit na součet dvou dílčích sil $\vec{F_1}, \vec{F_2}$:



Síla $\vec{F_2}$ představuje působení neefektivního pomocníka, síla $\vec{F_1}$ naopak působí ve směru kolmém na osu otáčení, tj. $\vec{F_1}$ je ta „část“ síly $\vec{F}$, která ovlivňuje otáčivý moment tělesa.

Pokračujme dále k definici <u>momentu síly vzhledem k ose otáčení</u>:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ ||\vec{M}|| &= ||\vec{r}|| \cdot ||\vec{F}|| \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$



- Otáčivý moment $\vec{M}$ působí ve směru osy otáčení – v tom směru, který určíme podle pravidla pravé ruky: když prvky směřují ve směru otáčení osy, palec ukazuje ve směru vektoru $\vec{M}$,

- Velikost momentu závisí na vzdálenosti $||\vec{r}||$ působiště P od osy otáčení, a dále na průmětu $\vec{F_1}$ síly $\vec{F}$ do směru kolmého na působiště $\vec{r}$ (tj. na velikosti průmětu $||\vec{F}|| \cdot \sin\alpha$):
$$||\vec{M}|| = ||\vec{r}|| \cdot ||\vec{F}|| \cdot \sin\alpha = ||\vec{r}|| \cdot ||\vec{F_1}||$$

> Tedy orientace $\vec{M}$ je taková, aby vektory $\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}$ v daném pořadí tvořily kladně orientovanou bázi prostoru (otáčení prvního vektoru směrem ke druhému vektoru vidíme lépe, když posuneme $\vec{r}$ do bodu P, aby vektory $\vec{r}$, $\vec{F}$ měly stejný počáteční bod).

Na moment $\vec{M}$ má tedy vliv jen složka $\vec{F_1}$ kolmá na průvodič bodu působení síly – tj. při vektorovém součinu využíváme „informace“, které vzniknou kolmým průmětem jednoho vektoru do směru kolmého na druhý vektor.

Zobrazení $\vec{r} \times \vec{F}$ je multilineární (bilineární):

$$(\alpha \cdot \vec{r_1} + \beta \cdot \vec{r_2}) \times \vec{F} = \alpha \cdot \vec{r_1} \times \vec{F} + \beta \cdot \vec{r_2} \times \vec{F}.$$

Zobrazení $\vec{r} \times \vec{F}$ je antisymetrické:

$$\vec{r} \times \vec{F} = -\vec{F} \times \vec{r}.$$

12.2 Cvičení 12: hlavní prověrka tohoto předmětu

Na základě pokynů cvičícího.

13 Otázky k ústní části

Dvanáct otázek má vyšší důležitost a měli byste je znát velmi dobře – jsou to otázky číslo 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 16, 17, 21, 23; bez jejich znalosti nebude většinou možné na zkoušce existovat (jsou to otázky zkoušené u bakalářských závěrečných zkoušek). Ostatní otázky také bystě měli znát a případně ztratíte-získáte body, ale některé výpočetní otázky už byly zdůrazněny na cvičení, takže nejsou zařazeny mezi top dvanáct.

Otázka 01: Cramerovo pravidlo pro řešení SLR

- (10 bodů) totální vzorec pro řešení SLR – odvození pro systém dvou rovnic o dvou neznámých;
- (5 bodů) Příklad: pomocí Cramerova pravidla vypočtěte řešení SLR:

$$\begin{aligned} x \qquad - z &= 0, \\ 3x + y \qquad &= 1, \\ -x + y + z &= 4. \end{aligned}$$

- (5 bodů) Jak byste použili Cramerovu metodu v případě, že má menší počet rovnic než neznámých? Vysvětlete na příkladu (čtvercovou matici na levé straně bychom získali doplněním čtvrtou rovnicí, jejíž všechny koeficienty i pravá strana jsou rovny nule) [nápověda: v řešení se bude vyskytovat jeden parametr; vysvětlení viz BP Danešová, str. 64-65]

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 5w &= 3, \\ 2x + 5y - z - 9w &= -3, \\ 2x + y - z + 3w &= -11. \end{aligned}$$

- (10 bodů) Dokažte (zdůvodněte) podrobně pravidlo D4 pro úpravy determinantu: Determinant se nezmění, když k danému řádku přičteme násobek ... (při zdůvodnění budete potřebovat skutečnost, že determinant se dvěma stejnými řádky se rovná nule ... toto též podrobně zdůvodněte).

Otázka 02: Definice determinantu

- (10 bodů, **klíčová část otázky**) Definice: determinant čtvercové matice, včetně určení znaménka u součinu prvků v jednom členu pomocí počtu inverzí sloupcových indexů.
- (5 bodů) Příklad: určení znaménka u součinu pomocí geometrického názoru počtu hran příbuzných vedlejší diagonále ze všech možných hran spojujících prvky, které vybereme do téhož součinu. Můžete vysvětlit na příkladu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \dots.$$

- (5 bodů) zdůvodněte (D1), proč se transponováním determinant nemění, a jak vypočteme determinant matice ve schodovém tvaru (a proč to tak můžeme udělat).
- (10 bodů) Vysvětlete: Determinant je antisymetrická (D2) multilineární (D3) forma. Zejména napište vzorcem nebo příkladem podmínku linearity determinantu D3.

Otázka 03: Další pravidla pro úpravu determinantu

- (10 bodů) D3: determinant jako zobrazení je lineární v každé složce (vysvětlete a dokažte; v důkazu budete potřebovat pracovat s definicí determinantu obecně pomocí jisté sumy);
- (10 bodů) Rozviňte determinant Laplaceovým rozvojem podle druhého sloupce (stačí provést jeden krok tohoto rozvoje do součtu determinantů řádu 5, nemusíte počítat dál)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} =$$

- (10 bodů) Ukažte, jak lze pokračovat v příkladu s Laplaceovým rozvojem výše tím způsobem, že při sloučení prvních dvou z těchto tří determinantů pátého řádu užijeme linearitu $D3$.

Otázka 04: Vektorový prostor

- (10 bodů, **klíčová část otázky**) Definice vektorového prostoru V nad tělesem T.
- Příklady (jak se na těchto VP definuje sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem?):

  a) aritmetický vektorový prostor (5 bodů),

  b) prostor polynomů stupně nejvýše 3 (5 bodů),

  c) prostor funkcí spojitých na intervalu (5 bodů),

  d) nejmenší možný vektorový prostor (0 bodů, ale měli byste vědět).

- (5 bodů) meziotázka: srovnejte vektorové prostory b), c) z hlediska báze a dimenze.

Otázka 05: Závislost a nezávislost skupiny vektorů – báze, dimenze, souřadnice

- (5 bodů) Def.: lineární kombinace vektorů; def.: lineárně závislá posloupnost vektorů;
- (15 bodů, **klíčová část otázky** – bez těchto tří definic nelze u zkoušky existovat) Def.: báze a dimenze vektorového prostoru, souřadnice vektoru v zadané bázi.
- (10 bodů) Příklady dimenze a báze (u příkladů b),c) z předchozí otázky).
- bonusová otázka: Jestliže posloupnost vektorů $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\dots, \vec{u}_k$ je lineárně závislá, kolik řešení pro neznámé $\alpha_i \in R$ má vektorová rovnice (na její pravé straně je nulový vektor)
$$\alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{u}_k = \vec{o}\ ?$$

Otázka 06: Vektorový podprostor

- (5 bodů) Def.: vektorový podprostor: co stačí ověřit, abychom věděli, že podmnožina vektorového prostoru je sama už vektorovým prostorem?
- (5 bodů) Příklady vektorového podprostoru (co je, co není vektorový podprostor);
- (10 bodů, **klíčová část otázky**) Je průnik dvou podprostorů vektorový podprostor? (pokud ano, dokažte; pokud ne, vyvraťte) Je sjednocení dvou podprostorů vektorový podprostor? (pokud ano, dokažte; pokud ne, vyvraťte) Pokud ne, lze definovat nějak podprostor určený sjednocením? Jak?
- (10 bodů) Co je to lineární obal množiny vektorů, popřípadě podprostor generovaný množinou vektorů? Uveďte dva příklady lineárního obalu množiny vektorů, jeden v rovině a druhý ve třírozměrném prostoru.

Otázka 07: Hodnost matice, nehomogenní SLR

- (5 bodů) Co je to hodnost matice (def.)? Jak souvisí pojem hodnosti matice s pojmem dimenze jistého nejmenovaného (který máte jmenovat) vektorového prostoru?
- (10 bodů, **klíčová část otázky**) Jaké tři situace mohou nastat u SLR (obecně nehomogenních rovnic) vzhledem k počtu řešení a kdy která z nich nastává? Použijte terminologii matice systému a rozšířené matice systému. Co říká Frobeniova věta?
- (5 bodů) V případě nekonečně mnoha řešení: Jak počet parametrů souvisí s hodností matice systému?
- (5 bodů) příklad řešení SLR Gaussovou eliminací: vyřešte následující systém rovnic:

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 5w &= 3, \\ 2x + 5y - z - 9w &= -2. \end{aligned}$$

- (5 bodů) Co lze říci o množině řešení SLR? Množina řešení SLR je (z algebraického hlediska co za strukturu?) ...

Otázka 08: Homogenní SLR, princip superpozice

- (10 bodů) Co je to SLR-hom? Jaké situace mohou nastat u SLR-hom podle počtu jejich řešení? Jaké řešení u SLR-hom existuje vždy? Tvoří množina řešení SLR-hom vždy vektorový prostor? Pokud ano, dokažte, pokud ne, vyvraťte (**klíčová část otázky**)
- (5 bodů) Co je to regulární-singulární matice a jak tento pojem souvisí s a) determinantem z této matice, b) hodností této matice, c) počtem řešení SLR-nehom s touto maticí?
- (5 bodů) Obecné a partikulární řešení SLR-nehom, obecné a partikulární řešení SLR-hom. Vše lze vysvětlit i na příkladu v následující odrážce.
- (10 bodů) Vysvětlete a proveďte princip superpozice při řešení SLR na příkladu:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Otázka 09: Sčítání a násobení matic – analýza pomocí pojmů z alg1

- (10 bodů, **klíčová část otázky**) Uveďte a zdůvodněte vlastnosti operace sčítání matic (které matice lze sčítat? která matice je neutráln? jak se najde k matici A inverze vzhledem ke sčítání?).
- (5 bodů) Jak se definuje operace násobení matic a jaké matice lze násobit?
- (10 bodů, **klíčová část otázky**) Uveďte a dokažte vlastnosti operace násobení matic (přednostně tedy násobení na množině čtvercových matic).
- (5 bodů) Shrnutí (**klíčová část otázky**): Množina $(M_{n\times n}, +, \cdot)$ čtvercových matic řádu n je ... dokončete větu a uveďte konkrétní příklad netriviálních dělitelů nuly v této struktuře (uveďte celou rovnici, ve které se tito netriviální dělitelé nuly vyskytují).

Otázka 10: Elementární řádkové úpravy

- (5 bodů) Co je to elementární řádková úprava (def.)?
- (5 bodů) Co je pro EŘÚ charakteristické vzhledem k SLR? Elementární úpravy SLR ...
- (15 bodů) Věta: každou EŘÚ lze reprezentovat vynásobením jistou regulární maticí zleva – ukažte na příkladu matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (5 bodů) K jaké úpravě matice A dojde, jestliže ji vynásobíme zprava maticí

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

  Nestačí výsledek, všimněte si, k jaké konkrétní řádkové nebo sloupcové úpravě dojde.

Otázka 11: Maticová metoda při řešení SLR

- (5 bodů) Co je to maticová metoda řešení systému lineárních rovnic?
- (5 bodů) Výpočet inverzní matice Jordanovou metodou – vysvětlete na příkladu

$$\begin{aligned} x \quad - z &= 0, \\ 3x + y \quad &= 1, \\ -x + y + z &= 4. \end{aligned}$$

- (10 bodů) Zdůvodněte matematickou větu, proč EŘÚ použité na jednotkovou matici najdou matici inverzní (proveďte důkaz).
- (10 bodů) Lze užít maticovou metodu při řešení systému následujícího, kde třetí rovnici získáme odečtením dvojnásobku první rovnice od druhé rovnice?

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 5w &= 3, \\ 2x + 5y - z - 9w &= -3, \\ 3y - 5z + w &= -9. \end{aligned}$$

Otázka 12: Lineární zobrazení

- (5 bodů, **bez této definice u zkoušky nelze existovat**) Uveďte definici lineárního zobrazení mezi vektorovými prostory. Doplňte stručným grafickým názorem (bylo pouze na videu 07, obrázky zatím nejsou v textu přednášky).
- (10 bodů, **bez tohoto příkladu nelze u zkoušky existovat**) Zadání lineárního zobrazení pomocí předpisu – pomocí matice – pomocí obrazů báze. Uveďte příklad lineárního zobrazení $R^3 \to R^2$.
- (5 bodů) Příklad zobrazení mezi vektorovými prostory, které není lineární.
- (5 bodů) Věta: základní vlastnosti lineárního zobrazení.
- (5 bodů) meziotázka: které základní zobrazení na ZŠ není lineární zobrazení, ale afinní zobrazení?

Otázka 13: Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

- (10 bodů, **klíčová část otázky**) Def.: jádro a obor hodnot lineárního zobrazení, nejlépe včetně obrázku, ale i definice symbolickým zápisem.
- (10 bodů) Na příkladu vysvětlete, jak jadro a obor hodnot konkrétního lineárního zobrazení najdeme:

$$\varphi : \ R^4 \ \to \ R^3, \quad \varphi(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3v_1 - v_2 + 2v_3 - v_4 \\ 2v_1 + 3v_2 + v_3 + v_4 \\ 5v_1 + 2v_2 + 3v_3 \end{pmatrix}.$$

- (5 bodů) Věta: vlastnosti jádra a oboru hodnot, vztah jejich dimenze a dimenze celého prostoru vzorů.
- (5 bodů) Věta: lineární zobrazení je injektivní právě tehdy, když ... (a z matice zobrazení se to pozná, právě když ...)

Otázka 14: Příklady lineárního zobrazení na ZŠ vysokoškolsky

Příklad A) otáčení roviny se středem v počátku:

- (15 bodů) Nalezněte maticové vyjádření (lineární zobrazení) otočení roviny se středem v počátku o úhel 30 stupňů neboli $\frac{\pi}{6}$ (viz kapitola nebo video 07).

Příklad B) osová souměrnost s osou procházející počátkem:

- (15 bodů) Nalezněte maticové vyjádření (lineární zobrazení) osové souměrnosti v rovině s osou $y = \frac{x}{2}$ (viz cvičení nebo až video 11, od času 1:38:00).

Otázka 15: Matice přechodu mezi bázemi téhož VP

- (15 bodů) Je zadán vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\alpha} \quad \text{v bázi} \quad \underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right);$$

  vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k bázi

$$\underline{\beta} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

  pomocí jisté matice přechodu P.

- (10 bodů) Jaké je nyní vyjádření vektoru $\vec{v}$ v bázi β v našem příkladu?

- (5 bodů) Pro β zadanou vektory

$$\underline{\beta} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

  by byla matice přechodu $P =$...

Otázka 16: Skalární součin vektorů

- (10 bodů, **bez této definice nelze u zkoušky existovat**) Vysvětlete: Skalární součin vektorů je a)symetrická b) bilineární c) pozitivně definitní d) forma na daném Euklidovském vektorovém prostoru. Co je to Euklidovský vektorový prostor?

- (5 bodů) Uveďte příklad skalárního součinu na prostoru a) n-tic reálných čísel; b) spojitých funkcí na intervalu $\langle a; b \rangle$.

- (10 bodů) Jaký je geometrický význam skalárního součinu?

- (5 bodů) uveďte nějaký fyzikální význam skalárního součinu. Pokud nevíte, zkuste vyřešit následující úlohu: Tatínek táhne sáně se třemi dětmi o celkové hmotnosti 45 kg pod úhlem 20° vzhledem k zemi po dokonale hladkém ledu silou 210 N. Jakou práci vykoná při posunutí saní o 3 metry? (nemusíte dosazovat do kalkulačky, jen vyjádřete výpočtem bez dosazení)

Otázka 17: Velikost vektoru, odchylka vektoru

- (10 bodů, **klíčová část otázky**) Definice velikosti a její základní vlastnosti (věta).
- (10 bodů) Vyslovte a dokažte Schwarzovu nerovnost. Kdy v ní nastává rovnost a proč? (věta 24, důkaz je na videu 10, doba 1:32:00 až 1:44:00, s využitím vzorce 10.1 odvozeného na videu 09, doba 1:17:30 až 1:22:30).
- (10 bodů, **klíčová část otázky**) Definice odchylky dvou nenulových vektorů: z čeho možnost existence tohoto pojmu vyplývá, a jak souvisí se skalárním součinem? V jakém intervalu se může odchylka dvou vektorů pohybovat? Jak se liší odchylka vektorů od odchylky přímek v aritmetickém vektorovém prostoru?

Otázka 18: Ortogonální vektory, ortogonální doplněk

- (10 bodů) Ortogonální vektory, ortogonální matice, ortogonální zobrazení – definice;

  Ortogonální množiny, ortogonální podprostory – definice.

  Ortogonální doplněk podprostoru – definice.
- (10 bodů) V Euklidovském prostoru R^5 je dán podprostor

$$W = L\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

  Nalezněte bázi a dimenzi jeho ortogonálního doplňku $W^{\perp}$.
- (10 bodů) ... hledání ortogonálního doplňku má stejnou metodu jako hledání jádra jistého lineárního zobrazení; otázka tedy zní: když se podíváte na příklad hledání ortogonálního doplňku v předchozí odrážce: a) nalezený ortogonální doplněk je jádrem jistého lineárního zobrazení mezi vektorovými prostory – odkud kam zobrazuje toto zobrazení, tj. z jakého prostoru do jakého? b) jaká je matice tohoto lineárního zobrazení?

Otázka 19: Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces

- (5 bodů) Vysvětlete, co je to Grammův-Schmidtův proces.
- (15 bodů) V Euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální bázi podprostoru

$$W = L\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}\right\}.$$

- (5 bodů) Co to znamená, když některý z vytvářených vektorů bude nulovým vektorem?
- (5 bodů) Co je to ortonormální báze vektorů a jak by se tato báze získala z báze ortogonální?

Otázka 20: Ortogonální projekce vektoru do VPP

- (10 bodů) Vysvětlete, o co se jedná, včetně obrázku.
- (15 bodů) Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ do podprostoru

$$U = L\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}.$$

- (5 bodů) Nalezněte také souřadnice vektoru $\vec{y}$ z ortogonálního doplňku $U^{\perp}$ z definice ortogonální projekce (v našem příkladu).

Otázka 21: Vlastní čísla (hodnoty) a vlastní vektory (směry) lineární transformace

- (10 bodů ... **algebraická definice ... bez ní na zkoušce nelze existovat**) Def.: vlastní čísla a vlastní směry lineární transformace vektorového prostoru.
- (10 bodů ... geometrický pohled) Najděte navzájem lineárně nezávislé vlastní směry osové souměrnosti vzhledem k ose $y = \frac{x}{2}$ (příklad 43).
- (10 bodů ... algebraický příklad) Nalezněte (příklad 44, 45) aspoň jeden vlastní směr-vektor a jemu odpovídající vlastní hodnotu pro lineární transformaci $R^3 \to R^3$ zadanou maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Otázka 22: Využití matice zobrazení v různých bázích

- (15 bodů) Nalezněte maticové vyjádření (lineární zobrazení) osové souměrnosti v rovině s osou $y = \frac{x}{2}$ na základě řešení jistého systému rovnic, bez matic přechodu (video 11, od času 1:38:00).
- (15 bodů) Nalezněte maticové vyjádření (lineární zobrazení) osové souměrnosti v rovině s osou $y = \frac{x}{2}$ na základě vlastních čísel a vektorů a dvou matic přechodu (viz video 11, doba 1:24:00 až 1:38:00).

Otázka 23: Vektorový součin vektorů

- (10 bodů; **povinná část otázky**) Vektorový součin vektorů v dimenzi 3: základní informace středoškolského rázu, tj.

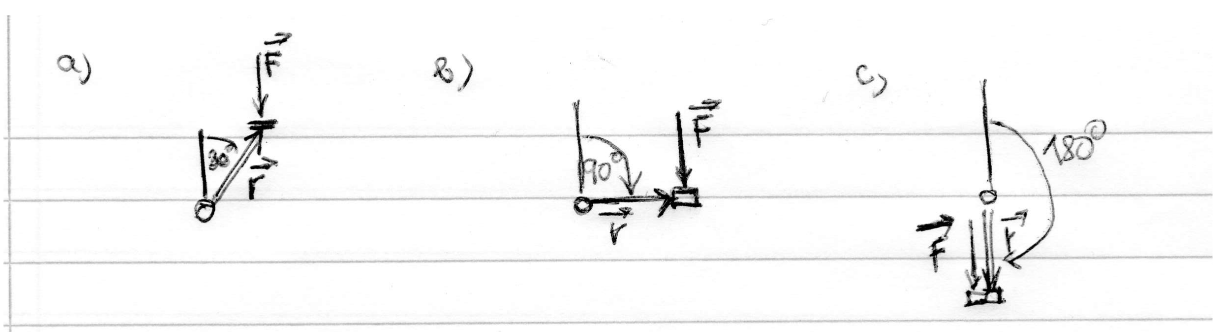
  a) jak se spočítá vektorový součin vektorů $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$?

  b) jak se určí směr tohoto vektorového součinu?

  c) jaký geometrický význam má velikost tohoto vektorového součinu?

- (10 bodů, **povinná část otázky**) Definice vektorového součinu pomocí jistého skalárního součinu: uveďte definici a vysvětlete na obrázcích pro $n = 2$ a $n = 3$ (jak souvisí tento vektorový součin s jistým orientovaným objemem?).
- (10 bodů) Uveďte fyzikální význam vektorového součinu (ideálně: moment síly vzhledem k ose otáčení) a vypočtěte následující příklad:

  Délka ramene pedálu jízdního kola je 0,152 m. Chodidlo cyklisty tlačí svisle na pedál silou o velikosti 111 N. Určete velikost momentu síly vzhledem k ose otáčení svírá-li rameno pedálu se svislým směrem (viz obrázek) úhel a) 30°, b) 90°, c) 180°. Ve kterém z případů bude moment síly $\vec{r} \times \vec{F}$ mít velikost největší-nejmenší? ($\vec{r}$ je vektor průvodiče od osy otáčení k místu připojení pedálu).



Přehled literatury

Pro zopakování analytické geometrie je důležitý výklad v [Boček, Kočandrle 1995] a příklady v [Petáková 1998] od strany 100, ale ne všechny z oddílů 13 a 14, nýbrž skoro všechny. Pro další týdny cvičení budou probírány některé kapitoly z knihy [Horák,P. 2002], ale pdf slajdy kolegů ze cvičení budou tak dokonalé (včetně výsledků), že studenti se nebudou muset do ní dívat.

Přednáška je vytvářena na základě [Horák, 2017], s přihlédnutím ke knize [Poole,D. 2015]. Z knih [Shilov 1997], [Zlatoš 2011] byly vzaty některé drobnosti a jedna podstatná věc: Shilov začíná celý výklad lineární algebry determinanty.

Boček, Kočandrle 1995 Matematika pro gymnázia – analytická geometrie. Základní materiál pro uvedení do počítací geometrie. Nakl. Prometheus, počet stran 187.

Horák,P. 2002 Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I. Skriptum z Přírodovědecké fakulty MU, počet stran 221.

Horák,P. 2017 Lineární algebra a geometrie 1. Učební text dostupný na internetu, autor je z Přírodovědecké fakulty MU. Počet stran cca 110.

Horák, Janyška 1997 Analytická geometrie. Brno 1997, učební text učitelského směru matematiky pro SŠ na Přírodovědecké fakultě MU, počet stran 151.

Petáková,J. 1998 Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ. Nakl. Prometheus, sbírka příkladů s klíčem. V tomto předmětu nás budou zajímat některé úlohy z analytické geometrie, od strany 100.

Poole,D. 2015 Linear algebra – a modern introduction. Stamford, USA, 4th Edition. V angličtině, nejschůdnější učebnice pro studenty. 620 stran + dodatky + odpovědi na cvičení s lichým číslem.

Shilov,G. 1997 Linear Algebra. Dover Publications, počet stran cca 400, anglický překlad ruského textu, ale v knihovně na Kounicově 65a (Moravská zemská knihovna Brno) najdete i překlad do češtiny u stejného autora (Šilov), i když kniha se možná jmenuje jinak. Starší přednáška lineární algebry.

Zlatoš,P. 2011 Lineárna algebra a geometria. Bratislava 2011, text dostupný na internetu, počet stran 808. Text je možná příliš obsáhlý, ale najdete v nějaké formě všecko, co se týká algebraického pohledu na geometrii.