Geometrie 3

Obsah

Poslední aktualizace 3. dubna 2024
`https://is.muni.cz/auth/el/ped/jaro2024/MA0013/index.qwarp`

CÍLE (STÁLE STEJNÉ)

- něco UDĚLAT, ... něco NOVÉHO
- a to POŘÁDNĚ .... tj. SROZUMITELNĚ!

PROCES (STÁLE STEJNÝ)

↑ přetvářet a vytvářet

rozlišovat a vysvětlovat

pochopit a použít

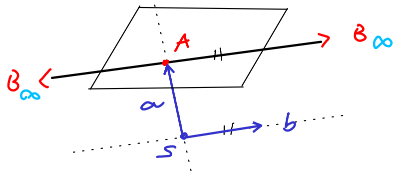
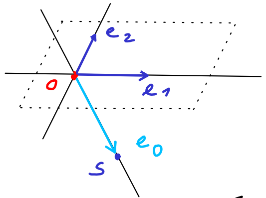
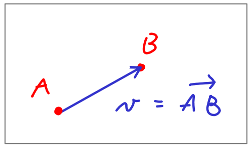
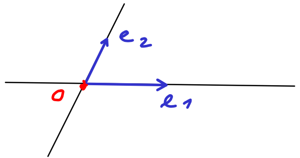
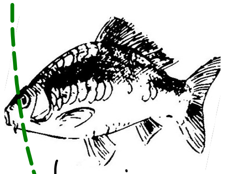
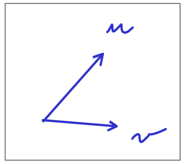
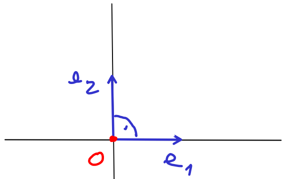
zapamatovat a zopakovat

KULISY (GEOMETRIE ...)

- nadále počítací / vektorová

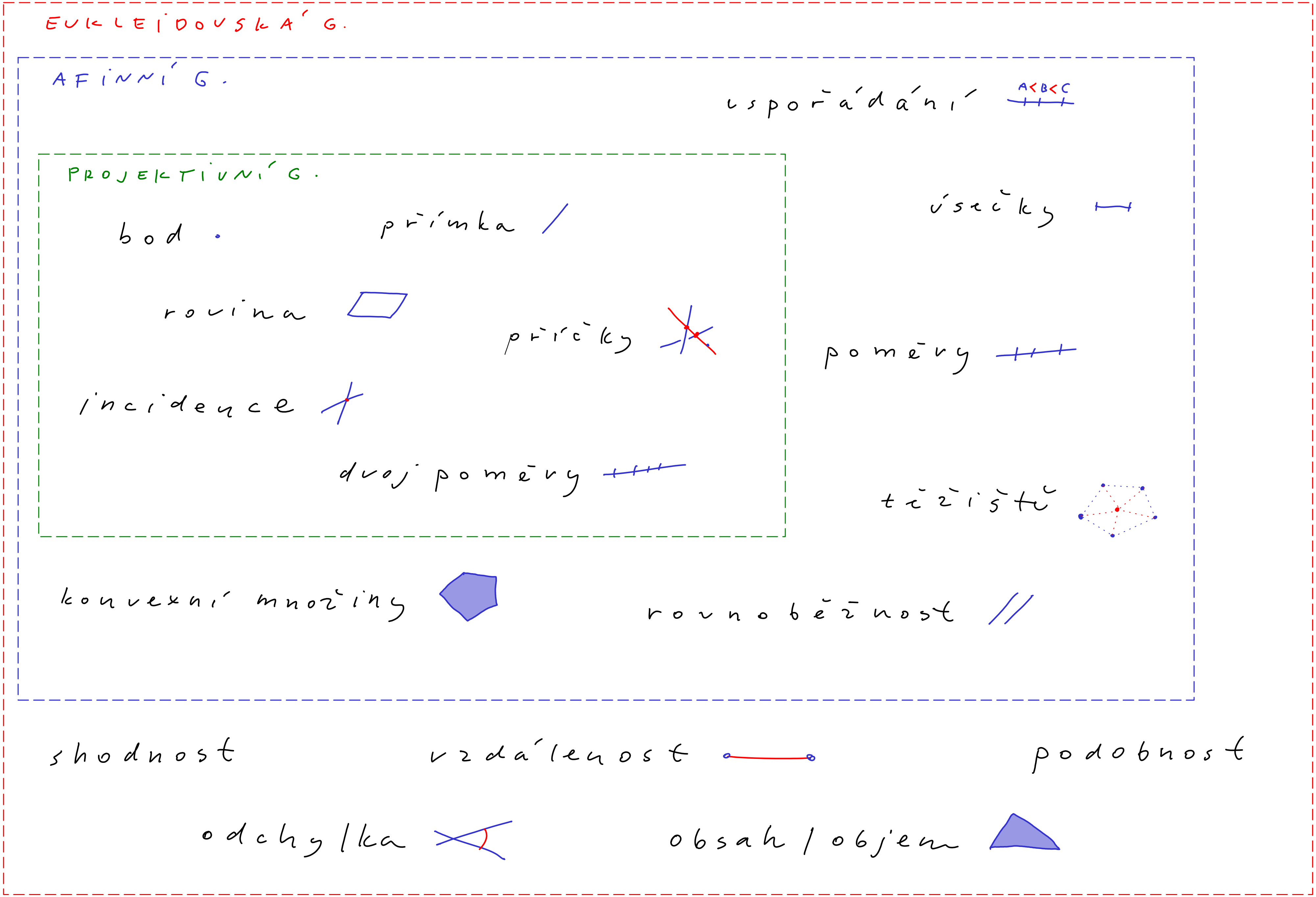
PŘEHLED

DOPLNÍME

ZOBRAZENÍ	ÚLOHY	PROSTORY	ALG. VYMEZENÍ	POČÍTÁNÍ
 projektivní	polohové	projektivní	$P = A \cup \{\infty\}$  pomocí $W \supset V$	homogenní souř.  = rozšířené
 afinní		afinní	$A \times A \to V$  body …… vektor	afinní souř.  = libovolné
 ekvi-afinní  podobná  shodná	metrické	eukleidovské	$\mathcal{E} = A$ + skalární součin  …… $u \cdot v$ vektory …… číslo	kartézské souř.  = orto-normální

UMÍME

TŘÍDĚNÍ



EUKLEIDOVSKÁ G.

AFINNÍ G.

PROJEKTIVNÍ G.

bod

přímka

rovina

příčky

incidence

dvojpoměry

uspořádání

A<B<C

úsečky

poměry

těžiště

konvexní množiny

rovnoběžnost

shodnost

vzdálenost

podobnost

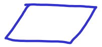
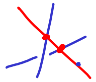
odchylka

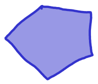
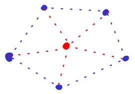
obsah / objem

AFINNÍ GEOMETRIE

UMÍME

TYPICKÉ AF. POJMY

- bod ·, přímka /, rovina 
- rovnoběžnost //, poměry 
- příčky  a příčkové plochy 
- uspořádání 

, úsečky , konvexní množiny 
- těžiště 

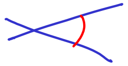
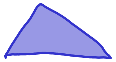
TYPICKÉ PROVEDENÍ

- obecný af. prostor, pod-prostor
- obecná af. zobrazení, af. souřadnice, přechody
- rovnoběžnost a další polohy, příčky podpr.
- polo-prostory, barycentrické souř. a pod.

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

UMÍME

TYPICKÉ EUKL. POJMY ...

- SHODNOST, podobnost
- vzdálenost 
- odchylka 
- obsah / objem 

TYPICKÉ PROVEDENÍ

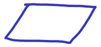
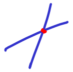
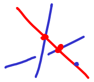
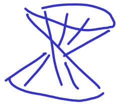
- obecné eukl. prostory, shodná zobrazení
- vzdálenost
- odchylka

} ob. podprostorů

- objemy rovnoběžnostěnů, simplexů
- algebraické konstrukce a souvislosti

PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

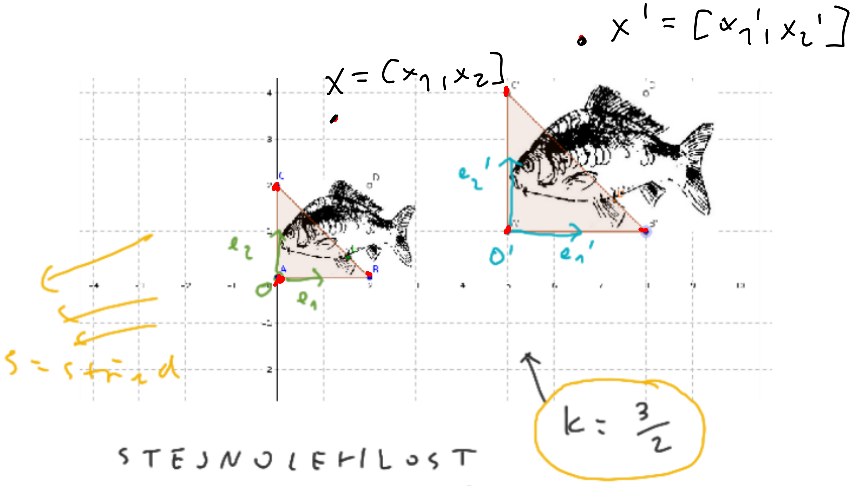
TYPICKÉ PROJ. POJMY ...

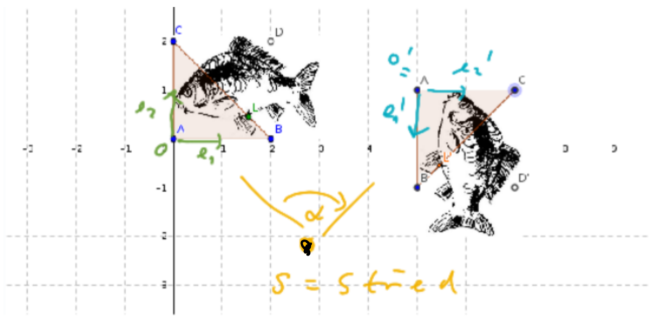
- bod ·, přímka , rovina  UMÍME
- incidence , dvojpoměry 
- příčky  a příčkové plochy 

TYPICKÉ PROVEDENÍ

- **projektivní rozšíření**, homogenní souřadnice DOPLNÍME
- proj. pod-prostory a vzájemné polohy
- proj. zobrazení, ZÁKLADNÍ VĚTA, zákl. transformace

MOTIVAČNÍ PŘÍKLAD





UMÍME

Afinní zobr.
v rovině
je určeno ...

STEJNOLEHLOST

$[0,0] \mapsto [5,1]$
$[2,0] \mapsto [8,1]$
$[0,2] \mapsto [5,4]$

g

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}}_{K} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{M}$$

o'

$e_1' = k e_1 \quad e_2' = k e_2$

$x_1' = 3/2\, x_1 + 5$
$x_2' = 3/2\, x_2 + 1$

OTÁČENÍ ...

$[0,0] \mapsto [5,1]$
$[2,0] \mapsto [5,-1]$
$[0,2] \mapsto [7,1]$

h

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{N}$$

o'

$e_1' = -e_2 \quad e_2' = e_1$

$x_1' = x_2 + 5$
$x_2' = -x_1 + 1$

... třemi body

... předpisem

$$\underset{\text{obraz}}{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 3/2 & 0 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{G} \cdot \underset{\text{vzor}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{H} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

DOPLNÍME

... JEDNOU
(rozšířenou)
MATICÍ!

MOTIVAČNÍ PŘÍKLAD — K ČEMU ?

- SKLÁDÁNÍ ZOBRAZENÍ $\leftrightsquigarrow$ NÁSOBENÍ MATIC

$$f = h \circ g \quad \leftrightsquigarrow \quad F = H \cdot G$$

L :

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \xmapsto{g} \left[\overset{K}{\boxed{\begin{pmatrix}3/2 & 0\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}}}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \overset{M}{\boxed{\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}}}\right] \xmapsto{h} \overset{L}{\boxed{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}}\left[\overset{K}{\boxed{\begin{pmatrix}3/2 & 0\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}}}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \overset{M}{\boxed{\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}}}\right] + \overset{N}{\boxed{\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}}} =$$

$$= \underset{\underline{L\cdot K}}{\boxed{\begin{pmatrix}0 & 3/2\\ -3/2 & 0\end{pmatrix}}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}}_{\boxed{\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}}\ \underline{L\cdot M + N}}$$

P :

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\hline 1\end{pmatrix} \xmapsto{g} \underset{G}{\overset{K \qquad M}{\left(\begin{array}{cc|c}3/2 & 0 & 5\\ 0 & 3/2 & 1\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)}}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\hline 1\end{pmatrix} \xmapsto{h} \underset{H}{\overset{L \qquad N}{\left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 5\\ -1 & 0 & 1\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)}}\cdot\underset{G}{\overset{K \qquad M}{\left(\begin{array}{cc|c}3/2 & 0 & 5\\ 0 & 3/2 & 1\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)}}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\hline 1\end{pmatrix} =$$

$$= \underset{H\cdot G}{\overset{\underline{L\cdot K} \qquad \underline{L\cdot M + N}}{\left(\begin{array}{cc|c}0 & 3/2 & 6\\ -3/2 & 0 & -4\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)}}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\hline 1\end{pmatrix}$$

PLATÍ
OBECNĚ ✓

MOTIVAČNÍ PŘÍKLAD — K ČEMU?

- PEVNÉ BODY ⟷ CHARAKTERISTICKÉ VEKTORY

$$g(x) = x \quad \longleftrightarrow \quad G \cdot X = \lambda X \qquad \leftarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

STEJNOLEHLOST:

soustava LINEÁRNÍCH rovnic (nehomog.)

$$L: \; g(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

$$\sim \begin{matrix} 3/2\, x_1 + 5 = x_1 \\ 3/2\, x_2 + 1 = x_2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1/2\, x_1 = -5 \\ 1/2\, x_2 = -1 \end{matrix} \sim \boxed{\begin{matrix} x_1 = -10 \\ x_2 = -2 \end{matrix}}$$

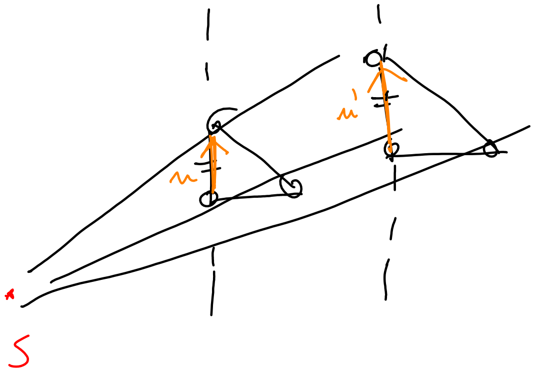
⇝ pevný bod **VLASTNÍ** !

$S = [-10, -2]$

(= střed stejnol.) ✓

JAK NEVLASTNÍ ?

$$\underbrace{v_\infty = v'_\infty} \iff u' = \lambda u \iff u = \text{char. vektor matice } \boxed{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}}$$



... všechny vektory odp. char. čísla $\lambda = 3/2$

(= koef. stejnol.) ✓

... tj. **všechny NEVLASTNÍ** body jsou pevné

(... "osa v nekonečnu") ✓

P: char. vektory ROZŠÍŘENÉ matice $\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

⇝ uvidíme všechno NAJEDNOU!

① char. polynom ... $\det \begin{pmatrix} 3/2-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 3/2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}-\lambda\right)^2 \cdot (1-\lambda)$ ⇝ kořeny $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{3}{2}$

② Dosazujeme char. čísla

- $\lambda = 1$ ... $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 5 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ~ $\begin{matrix} 1/2\, x_1 + 5x_0 = 0 \\ 1/2\, x_2 + x_0 = 0 \end{matrix}$ ⇝ $\boxed{\begin{matrix} x_0 = \text{lib} \\ x_1 = -10x_0 \\ x_2 = -2x_0 \end{matrix}}$ (dim 1)

- $\lambda = \frac{3}{2}$ ... $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇝ $\boxed{\begin{matrix} x_0 = 0 \\ x_1 = \text{lib} \\ x_2 = \text{lib} \end{matrix}}$ (dim 2)

③ INTERPRETUJEME!

- řešení pro $\lambda = 1$ odp. VLASTNÍMU pevnému bodu (dim 0) (střed) ✓

  $S = [-10, -2]$ .... $x_0 = 1$

- řešení pro $\lambda = 3/2$ odp. přímce NEVLASTNÍCH pevných bodů (osa) ✓
  (dim 1) ... $x_0 = 0$

CHARAKTERISTICKÉ VEKTORY — OPAKOVÁNÍ Z ALGEBRY

$F: V \longrightarrow V$ ... LIN. TRANSFORMACE vekt. prostoru V

Def .. vektor $X \in V$ je char. vektorem zobr. F,

pokud obraz X' je násobkem X, tj.

$(*)$ $\boxed{F \cdot X = \lambda X}$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ (... char. číslo ...)

Pozn

- soustava $(*)$ $\rightsquigarrow$ $(F \cdot X - \lambda X) = 0$,

  resp. $\boxed{(F - \lambda E) \cdot X = 0}$ ... homogenní soustava lin. rov.

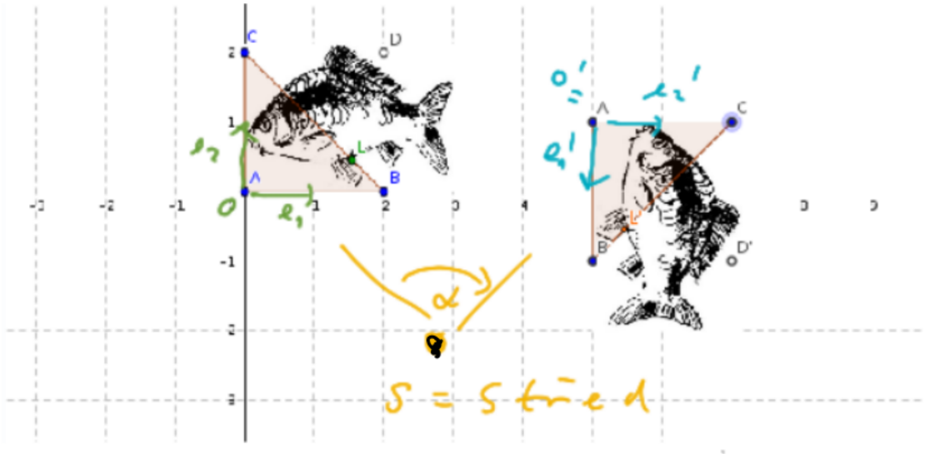
- soustava $(*)$ má NETRIVIÁLNÍ řešení

  $\iff$ matice $F - \lambda E$ obs. lin. ZÁVISLÉ řádky

  $\iff$ $\det(F - \lambda E) = 0$ (... char. polynom ...)

ANALOGICKY ...

... pro OTÁČENÍ s rozšířenou maticí $\left(\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}} \\ \hline 0 \quad 0 & 1 \end{array}\right)$ ...



⇝ vyjdou char. čísla $\lambda = 1$ a $\lambda = \pm i$

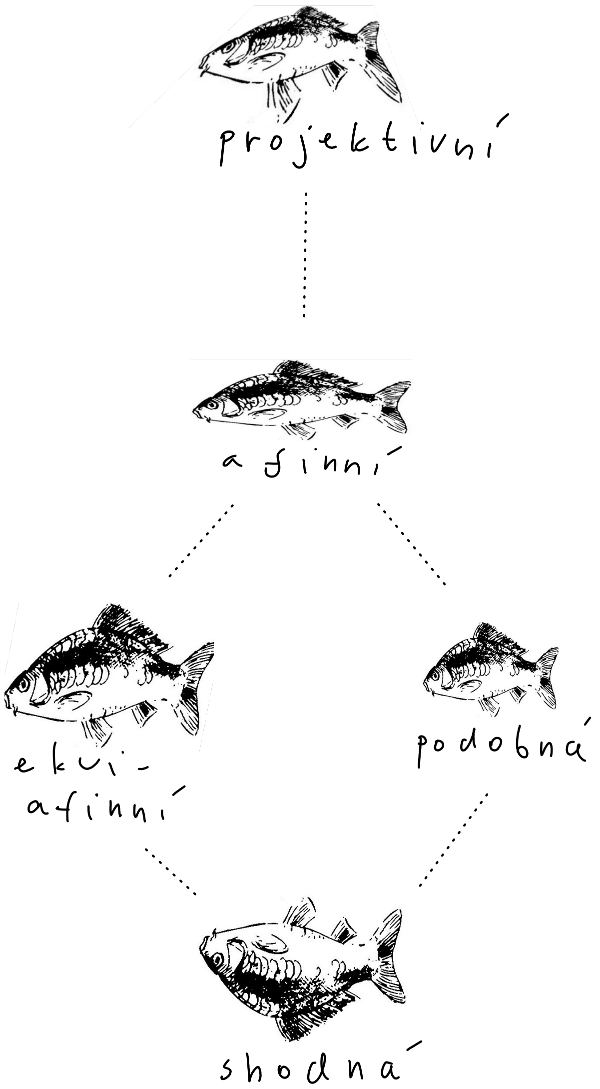
⇝ jeden VLASTNÍ pevný bod $S = [3, -2]$ (= STŘED otáčení)

a žádná další REÁLNÁ řešení ...

(... ovšem argument $\lambda = \pm i$
odpovídá ÚHLU otáčení)

předchozí úvahy ZOBECNÍME / DOPLNÍME později...

$$F = \left(\begin{array}{cc} \overset{K}{\boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}}} & \boxed{\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix}} \\ \underset{U}{\boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot \end{matrix}}} & \boxed{\cdot} \end{array} \right)$$



$U = 0$

$\det(K^T \cdot K) = 1$

$K^T \cdot K = k^2 E$

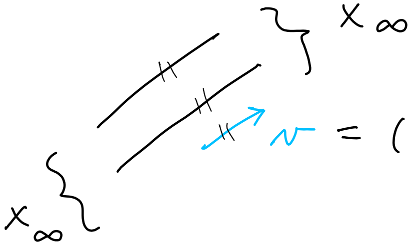
$K^T \cdot K = E$

ROZŠÍŘENÍ KONZUMNÉ

- bod vlastní • $X = [x_1, x_2] \rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{X}$,

přičemž připouštíme, že vektory $\mathbf{X}$ a $k\mathbf{X}$ "UKAZUJÍ" na tentýž BOD!

- bod nevlastní



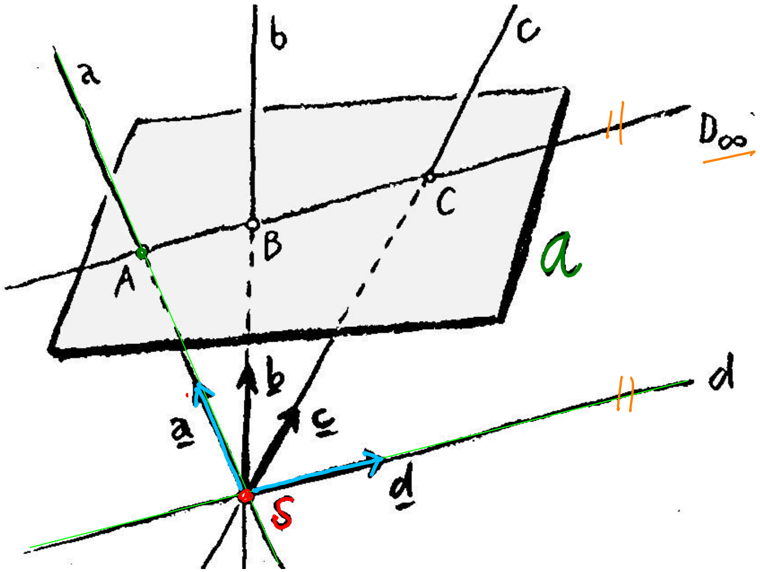
$v = (x_1, x_2) \rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{X}$,

přičemž vektory v a kv, resp. $\mathbf{X}$ a $k\mathbf{X}$ "UKAZUJÍ" na tentýž BOD!

↑ ↑ ↗

všude $k \in \mathbb{R}$ lib. $\neq 0$

ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ



- pozorujme ZVENKU

  a = afinní prostor (dim n)

  $S \notin a$, $n = a + S$ ... nadprostor (dim $n+1$)

- přidejme PŘÍMKY

  $A \in a \overset{1:1}{\longleftrightarrow} a = A + S$

- přidejme VEKTORY

  $A \in a \overset{1:1}{\longleftrightarrow} a = A + S \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \underline{a} = \overrightarrow{SA}$ až na NÁSOBEK!

  (ozn. zaměření $V = \vec{a}$, $W = \vec{n}$)

- vraťme LIMITY (= ROZŠÍŘENÍ)

  {body vlastní} $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ {přímky proch. S různoběžné s a}

  $\longleftrightarrow$ {směry ve W nepatřící do V}

  {body nevlastní} $\longleftrightarrow$ {přímky proch. S rovnoběžné s a}

  $\longleftrightarrow$ {směry ve W patřící do V}

ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ

$\mathcal{P}$, resp. proj. rozšíření $\tilde{\mathcal{A}}$ af. prostoru $\mathcal{A}$

W

- Projektivní prostor dim $\boxed{n}$

  ≈ směry ve vektorovém prostoru dim $\boxed{n+1}$

  … přičemž nevlastní (= rozšířené) prvky odp. směrům v nadrovině

  $V \subset W$

Bod v $\mathcal{P}$ … směr = 1-dim podprostor ve W

Přímka v $\mathcal{P}$ …….. 2-dim podprostor ve W

⋮

- Projektivní podprostor $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ dim $\boxed{k}$

  ≈ vektorový podprostor $U \subseteq W$ dim $\boxed{k+1}$

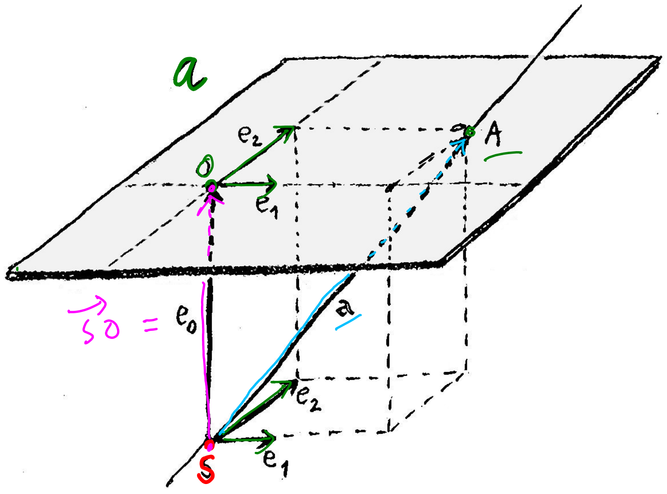
  … přičemž af. podpr. $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}$ rovnoběžné

  ⇝ odp. rozšíření $\tilde{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{B}}'$ nevlastní

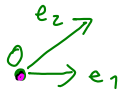
  ⇝ odp. vekt. podpr. $U \cap U'$ v nadrovině $V \subset W$

HOMOGENNÍ SOUŘADNICE

- bod vlastní



$A \doteq [3,1]$ = souřadnice vzhledem k

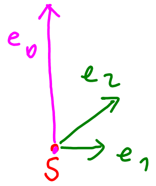


$\Downarrow \; \Uparrow$

$\overrightarrow{SA}$ $\quad 2\cdot\overrightarrow{SA}$ $\quad k\cdot\overrightarrow{SA}$

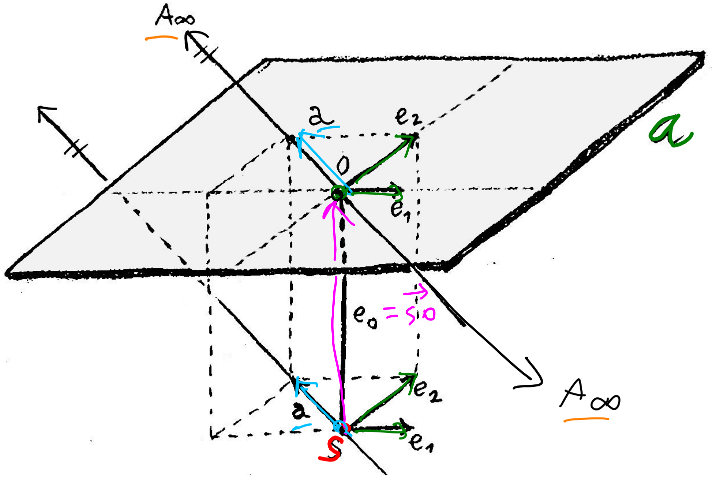
$a \doteq (3,1,1) \sim (6,2,2) \sim \dots$

souřadnice vzhledem k



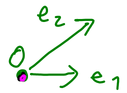
ozn.. $A = (3:1:1) = (6:2:2) = \dots.$

- bod nevlastní



$a \doteq (-2,1) \sim (6,-3) \sim \dots$

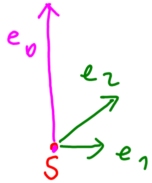
souřadnice vzhledem k



$\Downarrow \; \Uparrow$

$a \doteq (-2,1,0) \sim (6,-3,0) \sim \dots$

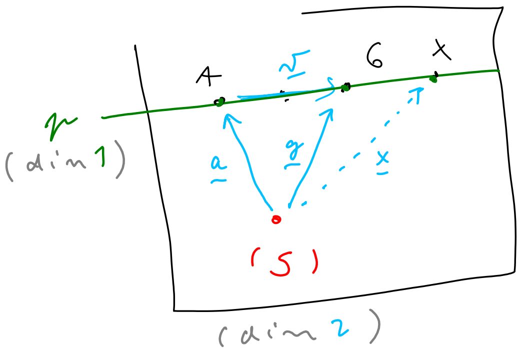
souřadnice vzhledem k



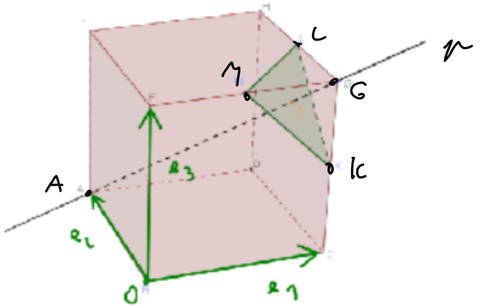
ozn.. $A = (-2:1:0) = (6:-3:0) = \dots$

PŘÍKLAD – vyjádření podpr.

p = přímka AG



$A = [0, 1, 0]$
$G = [1, 0, 1]$ $\}\ p$
$\vdots$
$K = [1, 0, 1/2]$
$L = [1, 1/2, 1]$
$M = [1/2, 0, 1]$ $\}\ \alpha$



HOMOG. SOUŘ. (nové)

$A = (0 : 1 : 0 : \underline{1})$
$G = (1 : 0 : 1 : \underline{1})$
$V = (1 : -1 : 1 : \underline{0})$

(a) parametricky

$$p = \text{“}\{X = rA + sG \mid \underline{r, s} \in \mathbb{R}\}\text{”}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = s \\ x_2 = r \\ x_3 = s \\ \underline{x_0 = r + s} \end{array} \middle| \ r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \{(s : r : s : \underline{r+s}) \mid \dots\}$$

$$= \text{“}\{X = \check{r}A + \check{s}V \mid \underline{\check{r}, \check{s}} \in \mathbb{R}\}\text{”}$$

$$= \{X = (\check{s} : \check{r} - \check{s} : \check{s} : \underline{\check{r}}) \mid \dots\}$$

$r + s = 1$
$s = t$

$\check{r} = 1$
$\check{s} = t$

$\check{r} = 1$
$\check{s} = 1 - \check{t}$

AF. SOUŘ. (umíme)

$A = [0, 1, 0]$
$G = [1, 0, 1]$
$v = \overrightarrow{AG} = (1, -1, 1)$

(a) parametricky

$$p = \{X = A + t\overrightarrow{AG} \mid \underline{t} \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \cdot\ t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = \cdot\ t \end{array} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \{[t, 1-t, t] \mid \dots\}$$

$$= \{X = G + \check{t}\,\overrightarrow{GA} \mid \underline{\check{t}} \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{[1-\check{t}, \check{t}, 1-\check{t}] \mid \dots\}$$

PŘÍKLAD – vyjádření podpr. p = přímka AG

HOMOG. SOUŘ. (nově) | **AF. SOUŘ.** (umíme)

(b) rovnicově

$$p = \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - \underline{x_0} = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{x_0 = 1}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 - \underline{x_0} = 0 \\ x_1 + x_2 - \underline{x_0} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \dots$$

ekviv. soustavy

počet NEZÁV. rovnic:

$4 - \underset{\sim}{2} = \underline{\underline{2}}$

(b) rovnicově

$$p = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \dots$$

ekviv. soustavy

počet NEZÁV. rovnic:

$3 - \underset{\sim}{1} = \underline{\underline{2}}$

MOŽNOSTI ŘEŠENÍ (stále stejné)

- z hlavy

(...pokud to je možné)

- systematická eliminace

$$\begin{pmatrix} x_1 = & & s \\ x_2 = & r & \\ x_3 = & & s \\ x_0 = & r & +s \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} x_1 = & 0 & s \\ x_2 = & r & 0 \\ x_1 - x_3 = & 0 & 0 \\ x_1 + x_2 - x_0 = & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✓

- (sub)determinanty

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 - x_3 = 0$

$x_0 - x_2 - x_3 = 0$

✓

PŘÍKLAD – vyjádření podpr. α = rovina KLM

HOMOG. SOUŘ. (nové)

$K = (2 : 0 : 1 : \underline{2}) = (1 : 0 : 1/2 : \underline{1})$

$L = (2 : 1 : 2 : \underline{2})$

$M = (1 : 0 : 2 : \underline{2})$

$u = (0 : 1 : 1 : \underline{0})$

$V = (-1 : 0 : 1 : \underline{0})$

AF. SOUŘ. (umíme)

$K = [1, 0, 1/2]$

$L = [1, 1/2, 1]$

$M = [1/2, 0, 1]$

$u = \overrightarrow{KL} = (0, 1/2, 1/2)$

$v = \overrightarrow{KM} = (-1/2, 0, 1/2)$

(a) parametricky

$$\alpha = \text{“}\{X = kK + lL + mM \mid \underbrace{k, l, m} \in \mathbb{R}\}\text{”}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2k + 2l + m \\ x_2 = l \\ x_3 = k + 2l + 2m \\ \underline{x_0 = 2k + 2l + 2m} \end{array} \right| \dots \Bigg\}$$

$$\xrightarrow[l = 1/2\, r,\ m = 1/2\, s]{k + l + m = 1/2}$$

(a) parametricky

$$\alpha = \{X = K + r\overrightarrow{KL} + s\overrightarrow{KM} \mid \underbrace{r, s} \in \mathbb{R}\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 - 1/2\, s \\ x_2 = 0 + 1/2\, r \\ x_3 = 1/2 + 1/2\, r + 1/2\, s \end{array} \right| \dots \Bigg\}$$

(b) rovnicově

$$\alpha = \{2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3\underline{x_0} = 0\}$$

počet NEZÁV. rovnic: $4 - \underset{\sim}{3} = \underline{\underline{1}}$

$$\xrightarrow{x_0 = 1}$$

(b) rovnicově

$$\alpha = \{x_1 - x_2 + x_3 = \tfrac{3}{2}\}$$

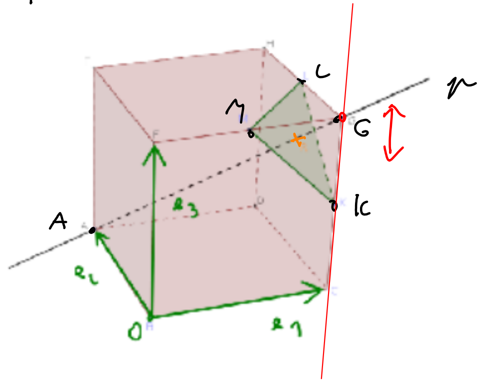
počet NEZÁV. rovnic: $3 - \underset{\sim}{2} = \underline{\underline{1}}$

PŘÍKLAD – vzájemná poloha podprostorů

… v závislosti

na hodnotě $k \in \mathbb{R}$

$A = [0, 1, 0]$
$G = [1, 0, k]$ $\Big\}\ p$
⋮
$K = [1, 0, 1/2]$
$L = [1, 1/2, 1]$
$M = [1/2, 0, 1]$ $\Big\}\ \alpha$



HOMOG. SOUŘ. (nově)

$$p = \{ (s : r : ks : \underline{r+s}) \mid r, s \in \mathbb{R} \}$$

$$\alpha = \{ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3\underline{x_0} = 0 \}$$

$$p \cap \alpha : \quad 2s - 2r + 2ks - 3(r+s) = 0$$

$$-5r + (2k-1)s = 0$$

$$(2k-1)s = 5r$$

$p \cap \alpha$ = BOD

… jmenovitě

$$p \cap \alpha = (5 : 2k-1 : 5k : \underline{2k+4})$$

(a) $k = -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha$ NEVLASTNÍ

(b) $k \neq -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha$ VLASTNÍ

AF. SOUŘ. (umíme)

$$p = \{ [t, 1-t, kt] \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$\alpha = \{ x_1 - x_2 + x_3 = \tfrac{3}{2} \}$$

$$p \cap \alpha : \quad t - (1-t) + kt = 3/2$$

$$(2+k)t = 5/2$$

(a) $k = -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha = \emptyset \rightsquigarrow p \parallel \alpha$

(b) $k \neq -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha =$ BOD $\rightsquigarrow p \times \alpha$

… jmenovitě

$$p \cap \alpha = \left[\frac{5}{4+2k}, \frac{2k-1}{4+2k}, \frac{5k}{4+2k} \right]$$

… spec. pro $k = 1$:

$$p \cap \alpha = \left[\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right]$$

viz obr. ✓

VZÁJEMNÁ POLOHA OBECNĚ

- $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}$ ... afinní podprostory
- $\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}' \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ ... projektivní rozšíření
- $U, U' \subseteq W$ ... zastupující VEKTOROVÉ prostory
- $\vec{\mathcal{A}} = V \subseteq W$ ... nadrovina odp. NEVLASTNÍM bodům

- $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ jsou ...

... **incidentní** ... $U \cap U' = \max$

... **různoběžné** ... $U \cap U' \neq \max$ a ... $U \cap U' \nsubseteq V$

... **rovnoběžné** ... $U \cap U' \neq \max$ a ... $U \cap U' \subseteq V$

... **mimoběžné** ... $U \cap U' = \{0\}$

"rovnoběžnost jako spec. případ různoběžnosti"

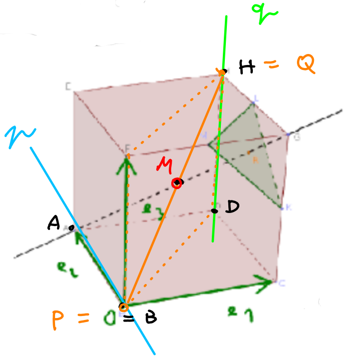
PŘÍKLAD – příčky

$$\left.\begin{aligned} A &= (0 : 1 : 0 : \underline{1}) \\ B &= (0 : 0 : 0 : \underline{1}) \end{aligned}\right\} \quad p = \{(0 : a : 0 : \underline{a+b}) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

← parametricky

$$\left.\begin{aligned} D &= (1 : 1 : 0 : \underline{1}) \\ H &= (1 : 1 : 1 : \underline{1}) \end{aligned}\right\} \quad q = \{(d+h : d+h : h : \underline{d+h}) \mid d, h \in \mathbb{R}\}$$

$$M = (1 : 1 : 1 : \underline{2}) = (m : m : m : \underline{2m})$$



$$\left.\begin{aligned} A &= [0, 1, 0] \\ B &= [0, 0, 0] \end{aligned}\right\} \ \underline{p}$$

$$\left.\begin{aligned} D &= [1, 1, 0] \\ H &= [1, 1, 1] \end{aligned}\right\} \ \underline{q}$$

$$M = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right]$$

PŘÍMO PODLE (b)

$$\alpha = A + B + M = \{(m : a+m : m : \underline{a+b+2m}) \mid a, b, m \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{ \ x_1 - x_3 = 0 \ \}$$

$$\beta = D + H + M = \{(d+h+m : d+h+m : h+m : \underline{d+h+2m}) \mid \dots\}$$
$$= \{ \ x_1 - x_2 = 0 \ \}$$

← rovnicově

1 rov./2 neznámé

$$P = p \cap \beta \ \dots \ \boxed{0 - a = 0} \ \sim \ \underline{a = 0, \ b = \text{lib.}}$$

$$\rightsquigarrow \ P = \underline{\underline{B}} \ \checkmark$$

$$Q = q \cap \alpha \ \dots \ \boxed{d + h - h = 0} \ \sim \ \underline{d = 0, \ h = \text{lib.}}$$

$$\rightsquigarrow \ Q = \underline{\underline{H}} \ \checkmark$$

NÁPADY

(a) KONCOVÉ BODY:

$P \in p$, $Q \in q$ obecně

tak, aby $\boxed{\overrightarrow{MP} = k \cdot \overrightarrow{MQ}}$ ...

$\rightsquigarrow$ příčka = PQ

(b) PRŮNIK NADPROSTORŮ

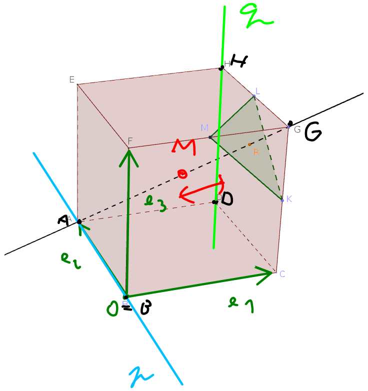
$$\left.\begin{aligned} \alpha &= p + M \\ \beta &= q + M \end{aligned}\right\} \ \text{příčka} = \alpha \cap \beta$$

resp. koncové body:

$\boxed{P = p \cap \beta}$, $\boxed{Q = q \cap \alpha}$

PŘÍKLAD – příčky

dtto s proměnným bodem M ∈ přímce AG ...



... „SPEC." PŘÍPADY :

$M = G = (1 : 0 : 1 : \underline{1})$

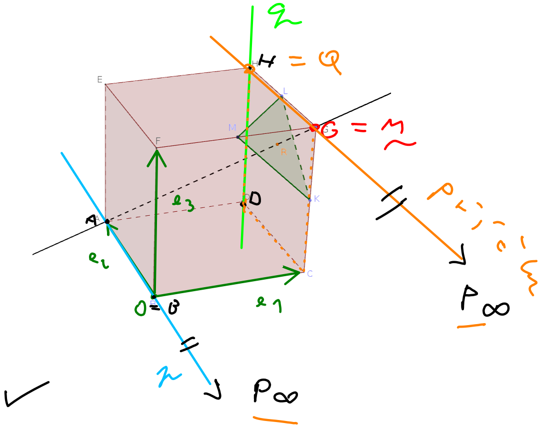
$\beta = q + M = \{(d+h+m : d+h : h+m : \underline{d+h+m})\}$

$= \{x_1 - x_0 = 0\}$

$P = p \cap \beta \rightsquigarrow \boxed{0-(a+b)=0} \rightsquigarrow \underline{a = -b = lib}$

$\rightsquigarrow P = (0 : 1 : 0 : \underline{0})$

.. nevlastní ✓



$M = (1 : -1 : 1 : \underline{0})$ ... nevlastní $(\overrightarrow{AG})$

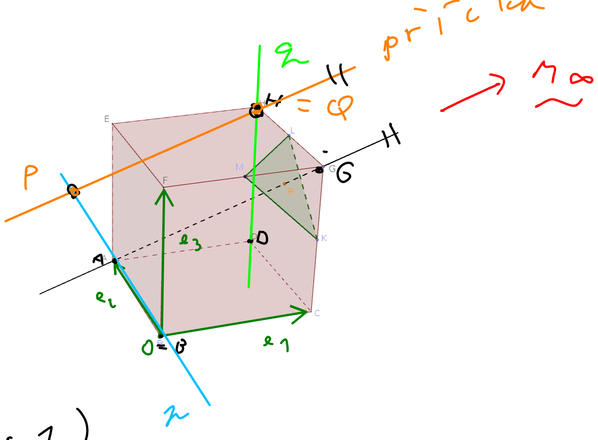
$\beta = q + M = \{(d+h+m : d+h-m : h+m : \underline{d+h})\}$

$= \{x_1 + x_2 - 2x_0 = 0\}$

$P = p \cap \beta \rightsquigarrow \boxed{0 + a - 2(a+b) = 0} \rightsquigarrow \underline{a = 2b = lib}$

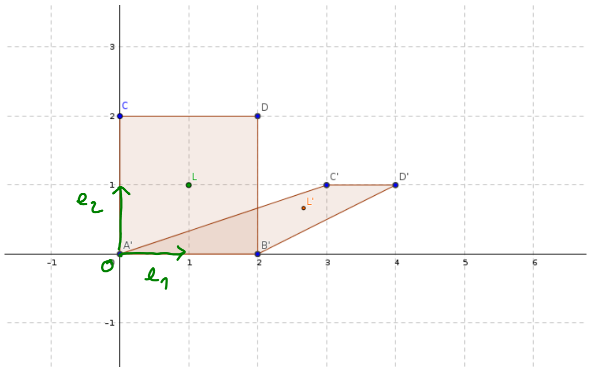
$\rightsquigarrow P = (0 : 2 : 0 : \underline{1})$

✓



PŘÍKLAD – PROJEKTIVNÍ TRANSFORMACE

PROJ. zobr.
v rovině
je určeno ...



čtyřmi body ..

$[0,0] \longmapsto [0,0]$
$[2,0] \longmapsto [2,0]$
$[0,2] \longmapsto [3,1]$
$[2,2] \longmapsto [4,1]$

předpisem ...

$$x_1' = \frac{2x_1 + 6x_2}{x_2 + 2}$$

$$x_2' = \frac{2x_2}{x_2 + 2}$$

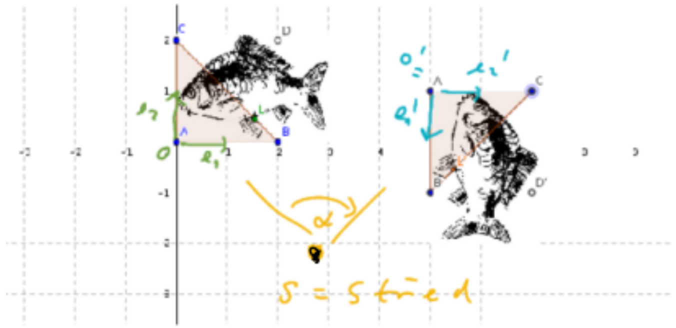
Jak to?

JEDNOU
(rozšířenou)
MATICÍ! ...

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline x_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_0 \end{pmatrix}$$

Co to?

Afinní zobr.
v rovině
je určeno ...



OTÁČENÍ ...

$[0,0] \longmapsto [5,1]$
$[2,0] \longmapsto [5,-1]$
$[0,2] \longmapsto [7,1]$

... třemi body

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \overset{L}{\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \overset{N}{\boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$e_1' = -e_2$

$e_2' = e_1$

O'

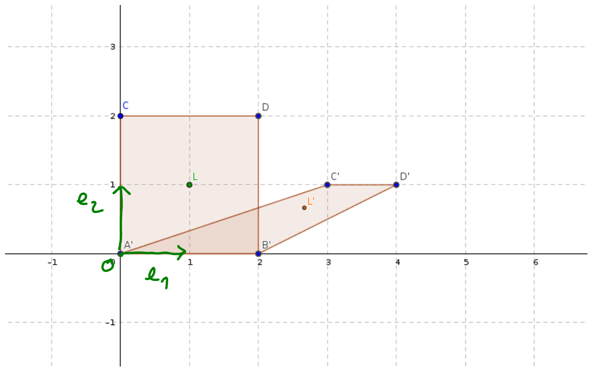
$x_1' = x_2 + 5$
$x_2' = -x_1 + 1$

... předpisem

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{L}{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}}} & \overset{N}{\boxed{\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}}} \\ \hline 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

... JEDNOU
(rozšířenou)
MATICÍ!

MATICE ZOBRAZENÍ HRUBOU SILOU



$$\left.\begin{aligned} A &= (0:0:1) \longmapsto (0:0:1) = A' \\ B &= (2:0:1) \longmapsto (2:0:1) = B' \\ C &= (0:2:1) \longmapsto (3:1:1) = C' \\ D &= (2:2:1) \longmapsto (4:1:1) = D' \end{aligned}\right\}$$

určeno obrazy čtyř bodů

$$F = \left(\begin{array}{ccc} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{array}\right) \ ? \quad \leftarrow a, b, \dots, i \in \mathbb{R}$$

(9 neznámých)

$$A \mapsto A' \ \dots \quad \left(\begin{array}{ccc} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

← $k, l, m, n \in \mathbb{R}$ (další 4 pomocné neznámé)

$$B \mapsto B' \ \dots \quad \left(\begin{array}{ccc} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+g \\ 2b+h \\ 2c+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l \\ 0 \\ l \end{pmatrix}$$

$$C \mapsto C' \ \dots \quad \left(\begin{array}{ccc} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d+g \\ 2e+h \\ 2f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m \\ m \\ m \end{pmatrix}$$

$$D \mapsto D' \ \dots \quad \left(\begin{array}{ccc} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4n \\ n \\ n \end{pmatrix}$$

⟶ soustava lin. rovnic:

$$\underbrace{\text{12 rovnic} \quad \text{13 neznámých}}$$

$$F = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 1 \end{array}\right)$$

jednoznačně až na násobek ✓

Jak se to vlastně ZOBECŇOVALO?

... připomeneme / doplníme po ZÁKLADNÍ VĚTĚ

SPRÁVNÁ INTERPRETACE MATICE ZOBR.

$$\left(\begin{array}{ccc}1&3&0\\0&1&0\\\hline 0&0.5&1\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c}1\\0\\\hline 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}1\\0\\\hline 0\end{array}\right)$$

homog. souř. U_∞ .. NEVL. bod 1. souřadné osy

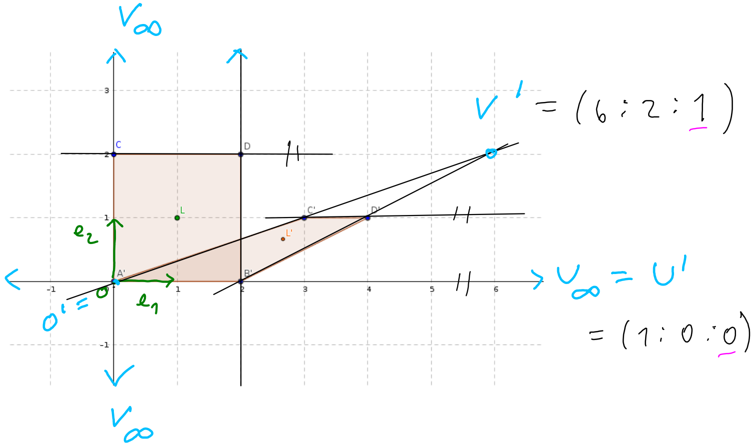
U' .. obraz U_∞ = 1. ÚBĚŽNÍK

$$\left(\begin{array}{ccc}1&3&0\\0&1&0\\\hline 0&0.5&1\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c}0\\1\\\hline 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}3\\1\\\hline 0.5\end{array}\right)$$

V_∞ ↗   ↘ V'

$$\left(\begin{array}{ccc}1&3&0\\0&1&0\\\hline 0&0.5&1\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c}0\\0\\\hline 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}0\\0\\\hline 1\end{array}\right)$$

O ↗   ↘ O'



OBECNĚ: rozšířená matice $\left(\begin{array}{c|c|c|c}\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\hline \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{array}\right)$ je po sloupcích tvořena homog. souřadnicemi

$\boxed{\text{1. ÚBĚŽNÍKU, 2. ÚBĚŽNÍKU, \dots, obrazu POČÁTKU}}$

MATICE ZOBRAZENÍ SE SPRÁVNOU INTERPRETACÍ

- pro $O = (0:0:\underline{1}) \longmapsto (0:0:\underline{1}) = O'$

  $U = (1:0:\underline{0}) \longmapsto (1:0:\underline{0}) = U'$

  $V = (0:1:\underline{0}) \longmapsto (6:2:\underline{1}) = V'$

víme akorát
$$F = \left(\begin{array}{c|c|c} U' & V' & O' \\ a & 6b & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ \hline 0 & b & c \end{array}\right),$$
kde $a, b, c \in \mathbb{R}$!!

- zobrazení určeno JEDNOZNAČNĚ např. s podmínkou

$$D = (2:2:\underline{1}) \longmapsto (4:1:\underline{1}) = D'$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a & 6b & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ \hline 0 & b & c \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \underline{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2a+12b \\ \underline{4b} \\ 2b+c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 4k \\ \underline{1k} \\ 1k \end{pmatrix}} \rightsquigarrow \begin{array}{ll} k = 4b, & b = \text{lib} \\ a = 2b & c = 2b \end{array}$$

LIN. ROVNICE
3 rov. / 4 neznámé

$$\underset{(b=1/2)}{\rightsquigarrow} F = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 1 \end{array}\right) \checkmark$$

. . . jednoznačně až na násobek

PROJ. ZOBR. V AF. SOUŘADNICÍCH

$$\left(\begin{array}{c} x_1' \\ x_2' \\ \hline x_0' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_0 \end{array}\right)$$

... rozšířená MATICE

~ LINEÁRNÍ zobr. $W \rightarrow W$

$$\updownarrow$$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 3x_2 \\ x_2' &= x_2 \\ \hline x_0' &= \tfrac{1}{2} x_2 + x_0 \end{aligned}$$

...... LINEÁRNÍ fce v homogenních souř. $P = \tilde{a}$

$$\updownarrow \ *$$

$$x_1' = \frac{x_1 + 3x_2}{\frac{x_2}{2} + 1} = \frac{2x_1 + 6x_2}{x_2 + 2}$$

$$x_2' = \frac{x_2}{\frac{x_2}{2} + 1} = \frac{2x_2}{x_2 + 2}$$

... RAC. LOMENÉ fce v afinních souř. a

(stupně 1)

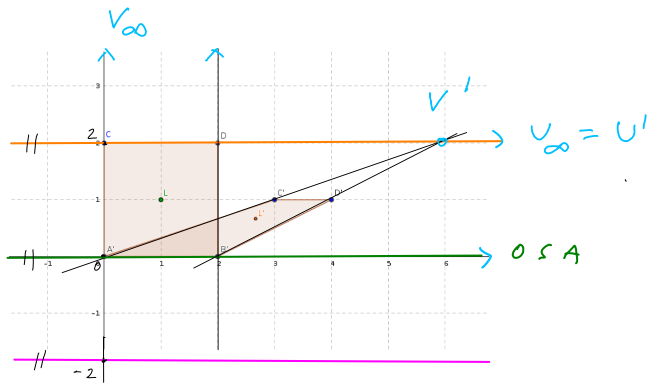
* ... cestou dolů: subs. $x_0 = 1$, dělení $x_0' = \frac{1}{2} x_2 + 1$

DEF. OBOR A OBOR HODNOT

- zobr. JE bijektivní v projektivní rovině, tedy def. obor = obor hodnot $= \mathbb{P} = \tilde{a}$

- zobr. NENÍ bijektivní v afinní rovině a :

$$x_1' = \frac{2x_1 + 6x_2}{x_2 + 2}$$
$$x_2' = \frac{2x_2}{x_2 + 2}$$



Vyjádření ok $\Leftrightarrow$ $x_0' = \frac{1}{2}x_2 + 1 \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $x_2 \neq -2$,

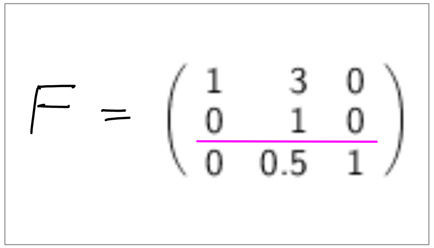
tedy def. obor $= a \setminus \{x_2 = -2\}$ ← "preúběžnice"

Úběžníky $U' = (1:0:0)$, $V' = (5:2:1)$,

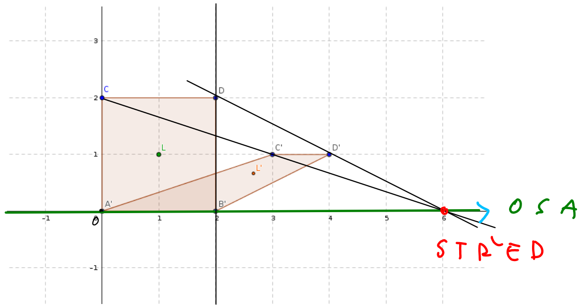
tedy obor hodnot $= a \setminus \{x_2 = 2\}$ ← úběžnice

PEVNÉ BODY

~ char. vektory rozšířené matice...

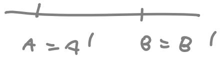


$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

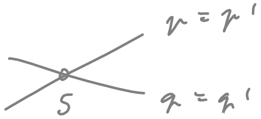


1) char. polynom $= (1-\lambda)^3 \rightsquigarrow$ kořen $\lambda = 1$

2) řešení pro $\lambda = 1 \rightsquigarrow$ přímka $\{x_2 = 0\}$,

tj. **OSA** (= přímka pevných bodů )

③ Desarguesova věta $\rightsquigarrow$ musí mít **STŘED**!

(každá přímka proch. středem je pevná )

Umíme najít konstrukčně $\rightsquigarrow$ $(6 : 0 : 1)$

... a co POČETNĚ?

... doplníme před zobecněním Desarg. věty

MEZISHRNUTÍ

- Pro SHODNÁ → PODOBNÁ → AFINNÍ → **PROJEKTIVNÍ** zobr. prostoru dim $\boxed{n}$

  jsme se zatím vždy vlezli do **MATICE** řádu $\boxed{n+1}$!

- **MATICE** představuje **LINEÁRNÍ** zobr. vekt. prostoru dim $\boxed{n+1}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{W} \arrow[r, "F"] \arrow[d] & \mathcal{W} \arrow[d] & \cdots \text{ dim } n+1 \\
\mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P} & \cdots \text{ dim } n
\end{tikzcd}$$

- Přirozená otázka (očekávání):

  FUNGUJE TO TAK **OBECNĚ** ?

- Nejprve předp. všechno **BIJEKTIVNÍ** a **dim** $\geqq 2$ . . .

MASÁŽ I.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
\mathcal{P} \arrow[r, dashed, "f"'] & \mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

- Předp. $F : W \longrightarrow W$ .. LINEÁRNÍ

  $\Longrightarrow$ obraz vekt. podpr. $U \subseteq W$ je zase vekt. podprostorem.

- Zejména:

  a) $\dim U = 1$ $\rightsquigarrow$ MÁME zobr. $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$,

  b) $\dim U = 2$ $\rightsquigarrow$ f zobrazuje přímky na přímky,

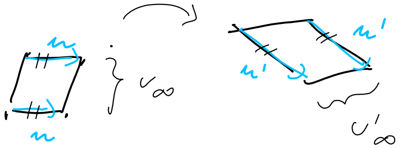
  tj. f = KOLINEACE !

(obecně: $\dim U = \underline{k}$ $\rightsquigarrow$ f zobrazuje proj. podpr. dim $\underline{k-1}$ na proj. podpr. dim $\underline{k-1}$ ..)

MASÁŽ II.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \tilde{a} \arrow[r, "f"'] & \tilde{a} \end{tikzcd}$$

- Předp. $f : a \to a$ ... AFINNÍ



$\Longrightarrow$ máme indukované LINEÁRNÍ

$$\vec{f} : V \to V, \qquad V = \vec{a}$$

... popisuje zobr. ∞ bodů při rozšíření $\rho = \tilde{a}$.

- Zejména:

a) rozšířené zobr. $\tilde{f} : \tilde{a} \to \tilde{a}$ ... "$\tilde{f} = f + \vec{f}$"

b) je určeno LINEÁRNÍM zobr.

$$F : W \to W,$$

... přičemž $\boxed{F(V) \subseteq V}$ a $\boxed{F|_V = \vec{f}}$ * !

* ... viz úvodní příklady

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MASÁŽ III.

- z minulého semestru vzpomínáme na ZÁKLADNÍ VĚTU AFINNÍ GEOMETRIE:

Pro BIJEKTIVNÍ $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ mezi af. prostory DIM $\geqq 2$ platí:

f je AFINNÍ $\Longleftrightarrow$ zachovává KOLINEÁRNOST.

... tj. vlastnosti af. zobrazení jsou svázány víc než by jeden čekal!

ZÁKLADNÍ VĚTA PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

Pro BIJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ mezi proj. prostory DIM $\geqq 2$ platí:

f zachovává KOLINEÁRNOST

$$\Updownarrow$$

f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F : W \longrightarrow W'$

- Směr "$\Uparrow$" ... rozumíme OBECNĚ (viz MASÁŽ I.)
- Směr "$\Downarrow$" ... rozumíme pro AFINNÍ (viz MASÁŽ II.)
  ... doplníme pro obecné KOLINEACE ..

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
\mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

- **Postřeh**: zatím nikde nemluvíme o DVOJPOMĚRECH!

DŮKAZ

- Předp. $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ ... KOLINEACE

  $\Longrightarrow$ obraz proj. podpr. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ je proj. podpr.,
  zejména obraz NADROVINY $\eta \subseteq \mathcal{P}$ je NADROVINA $\eta' \subseteq \mathcal{P}'$.

- INTERPRETUJME η a η' jako nadroviny "∞ bodů":

  $\underbrace{\text{ozn. } a := \mathcal{P}\setminus\eta}$, tj. $\mathcal{P} = a \cup \eta = \tilde{a}$ atd.

  zúžené zobr. $f : a \to a'$ je KOLINEACE.

- $\underbrace{\text{ZÁKL. VĚTA}}$ AFINNÍ GEOM. $\Longrightarrow$ $f : a \to a'$ je AFINNÍ!

  "ROZŠÍŘENÍ" $\tilde{f} = f$,

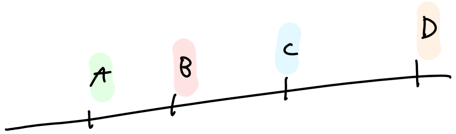
  a to je určeno LINEÁRNÍM $F : W \to W'$!

  (viz MASÁŽ II.)

JAK TO JE S DVOJPOMĚRY ? — vzpomínáme

- Definice

$$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$$



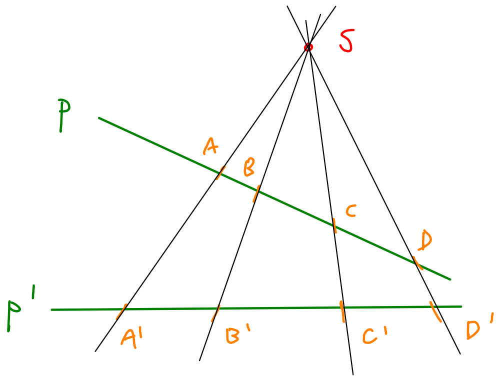
- Podstatná vlastnost

$$\lim_{D \to \infty} (ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \cdot 1 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \quad \ldots \text{obyč. poměr!}$$

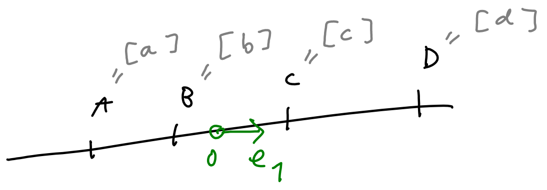
obdobně pro A, B, C

- Podstatná věta (PAPPOVA)

Při středovém promítání se zachovávají dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.

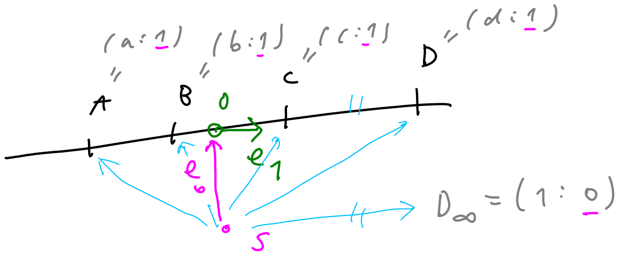


JAK TO JE S DVOJPOMĚRY ? — NOVĚ



- v af. souřadnicích

$$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a).(d-b)}{(c-b).(d-a)}$$



- postřeh

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{d-a}{d-b} = \frac{\begin{vmatrix} d & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\lim_{D\to\infty} \dots\dots\dots = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

$\leftarrow \quad D = (d:1) = (1 : \frac{1}{d}) = \dots$

$\lim_{d\to\infty} \dots = (1:0)$ ✓

- v hom. souřadnicích

$$\boxed{(A\,B\,C\,D) = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c_0 & a_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & b \\ d_0 & b_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & b \\ c_0 & b_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & a \\ d_0 & a_0 \end{vmatrix}}}$$

krásně HOMOGENNÍ
(zahrnuje vlastní/nevlastní ...)

a DOBŘE DEF!
(nezávislé na násobcích ukazovacích vektorů!)

JAK TO TEDY JE S TĚMI DVOJPOMĚRY ?

... DŮSLEDEK ZÁKL. VĚTY, ZOBECNĚNÍ PAPPOVY VĚTY :

Pro BIJEKTIVNÍ $f : {\color{green}\mathcal{P}} \to {\color{green}\mathcal{P}'}$ mezi proj. prostory DIM ≥ 2 platí :

f zachovává KOLINEÁRNOST ← vlastnost (a)

$\Updownarrow$ vlastnost (b) ↓

f je PROJEKTIVNÍ (tj. navíc zach. DVOJPOMĚRY)

DŮKAZ (směru " $\Downarrow$ ")

- **ZÁKL. VĚTA PROJ. GEOM.** $\Longrightarrow$ f je určeno LINEÁRNÍM $F : {\color{cyan}W} \to {\color{cyan}W'}$
- zúžení na lib. přímku je určeno LINEÁRNÍM $\underline{F} : {\color{cyan}U} \to {\color{cyan}U'}$ (dim 1) (dim 2)
- HOMOGENNÍ popis dvojpoměru + CAUCHYHO věta :

↖ o součinu determinantů

$$({\color{green}A'}{\color{red}B'}{\color{cyan}C'}{\color{orange}D'}) = \frac{\left|(\underline{F})\cdot({\color{cyan}\vdots}\,{\color{green}\vdots})\right| \cdot \left|(\underline{F})\cdot({\color{orange}\vdots}\,{\color{red}\vdots})\right|}{\left|(\underline{F})\cdot({\color{cyan}\vdots}\,{\color{red}\vdots})\right| \cdot \left|(\underline{F})\cdot({\color{orange}\vdots}\,{\color{green}\vdots})\right|} \overset{!}{=} \frac{\cancel{|\underline{F}|}\cdot|{\color{cyan}\vdots}\,{\color{green}\vdots}| \cdot \cancel{|\underline{F}|}\cdot|{\color{orange}\vdots}\,{\color{red}\vdots}|}{\cancel{|\underline{F}|}\cdot|{\color{cyan}\vdots}\,{\color{red}\vdots}| \cdot \cancel{|\underline{F}|}\cdot|{\color{orange}\vdots}\,{\color{green}\vdots}|} = ({\color{green}A}{\color{red}B}{\color{cyan}C}{\color{orange}D})$$

PŘEHLED — PRO BIJEKTIVNÍ ZOBR. V DIM ≥ 2

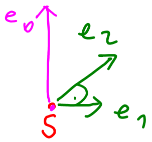
	AFINNÍ $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$	PROJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$
Def. vlastnosti	(a) kolineace (b) poměry (c) rovnoběžnost	(a) kolineace (b) dvojpoměry
základní věty *	$$\begin{tikzcd} (a) \arrow[d, Rightarrow] \\ (b)+(c) \end{tikzcd}$$	$$\begin{tikzcd} (a) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, dashed] & \text{LINEÁRNÍ } F : W \to W' \ ! \arrow[dl, Rightarrow] \\ (b) & \end{tikzcd}$$

* ... vyznačeny jen podstatné implikace

ANAL. VYJÁDŘENÍ

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \cdots\ i = j \\ 0 & \cdots\ i \neq j \end{cases}$$

- a, a' ... EUKLEID. prostory + KARTÉZSKÉ souř.
  $\vec{a} = V$, $\vec{a}' = V'$ ... odp. zaměření



- $\tilde{a}, \tilde{a}'$ ... PROJ. rozšíření + ROZŠÍŘENÉ souř.
  W, W' ... odp. (větší) vekt. prostory

- $f : \tilde{a} \to \tilde{a}'$ je **PROJEKTIVNÍ**
  $\iff$ určeno LINEÁRNÍM $F : W \to W'$
  $\iff$ matice $F = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} K & L \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} U & R \end{array} \end{array}$ až na násobek

  } ZÁKL. věta

- Projektivní $f : \tilde{a} \to \tilde{a}'$ je **AFINNÍ**
  $\iff$ (NE)VLASTNÍ body $\longmapsto$ (NE)VLASTNÍ body
  $\iff$ $F(V) \subseteq V$
  $\iff$ $\boxed{U = 0}$ *

  } MASÁŽ II.

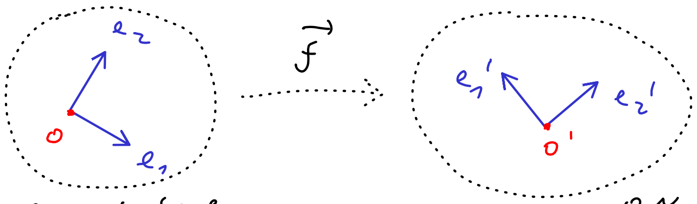
* ... volba $R = 1$ fixuje matici F jednoznačně

ANAL. VYJÁDŘENÍ

- afinní $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ je SHODNÉ

$\iff$ $\vec{f}: V \to V'$ zachovává skalární součin

$\iff$



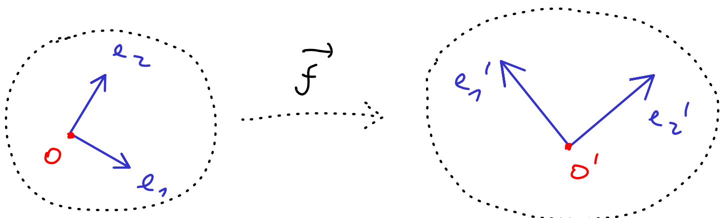
ON báze ON báze ← tj: $e_i' \cdot e_j' = \begin{cases} 1 & \dots\ i=j \\ 0 & \dots\ i \neq j \end{cases}$

$\iff$ $\boxed{K^T \cdot K = E}$ ← tj: $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' & e_2' & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$

- afinní $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ je PODOBNÉ s koeficientem k

$\iff$ $\vec{f}: V \to V'$ zachovává skalární součin až na násobek k^2

$\iff$



ON báze OG báze $\|e_i'\| = k$ ← tj: $e_i' \cdot e_j' = \begin{cases} k^2 & \dots\ i=j \\ 0 & \dots\ i \neq j \end{cases}$

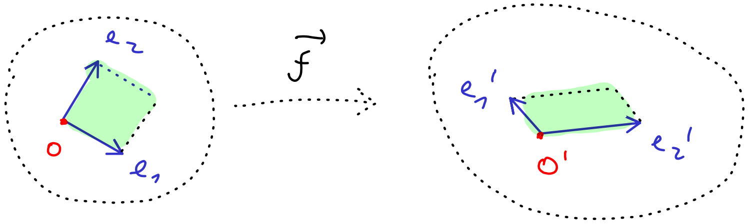
$\iff$ $\boxed{K^T \cdot K = k^2 E}$ ← tj: $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' & e_2' & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & \cdots \\ 0 & k^2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$

ANAL. VYJÁDŘENÍ

- afinní $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ je EKVIAFINNÍ

$\Longleftrightarrow$ $\vec{f} : V \longrightarrow V'$ zachovává OBJEMY

$\Longleftrightarrow$



$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\det(K^T \cdot K) = 1}$ $\longleftarrow$ $\begin{pmatrix} e_1' \\ \hdashline e_2' \\ \hdashline \vdots \end{pmatrix} \cdot \left(e_1' \,\vdots\, e_2' \,\vdots\, \cdots \right) =$ GRAMOVA matice . . .

- v případě, že $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}'$: $\longleftarrow$ tj. matice K čtvercová

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\det K = \pm 1}$

JAK TO JE S DIM 1?

Pro BIJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mezi proj. PŘÍMKAMI (dim 1) platí:

f je PROJEKTIVNÍ $\Longleftrightarrow$ f zach. DVOJPOMĚRY

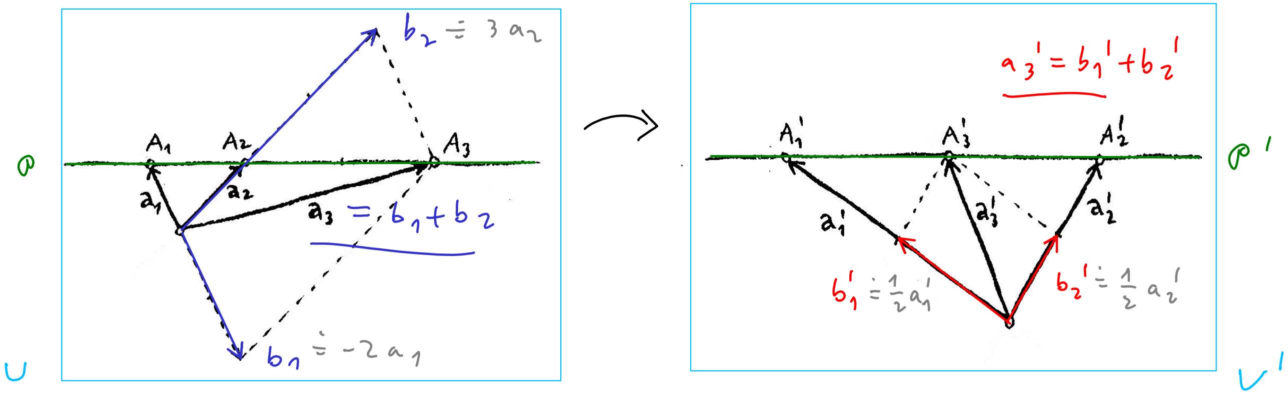
$\Longleftrightarrow$ f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F : U \to U'$ (dim 2)

- První "$\Longleftarrow$" zřejmá (dim 1)
- Druhá "$\Longleftarrow$" taky (viz důkaz předch. věty)
- Druhá "$\Longrightarrow$":

f určeno TŘEMI navzájem různými body v $\mathcal{P}$, tj. TŘEMI vektory v U,

dim $U = 2$ $\rightsquigarrow$ stačí DVA NEZÁVISLÉ vektory …

… tak, aby to sedělo na TŘETÍM!



$F : U \to U'$ určeno

obrazy $\boxed{\begin{matrix} F(b_1) = b_1' \\ F(b_2) = b_2' \end{matrix}}$

$F(a_3) = F(b_1 + b_2) =$

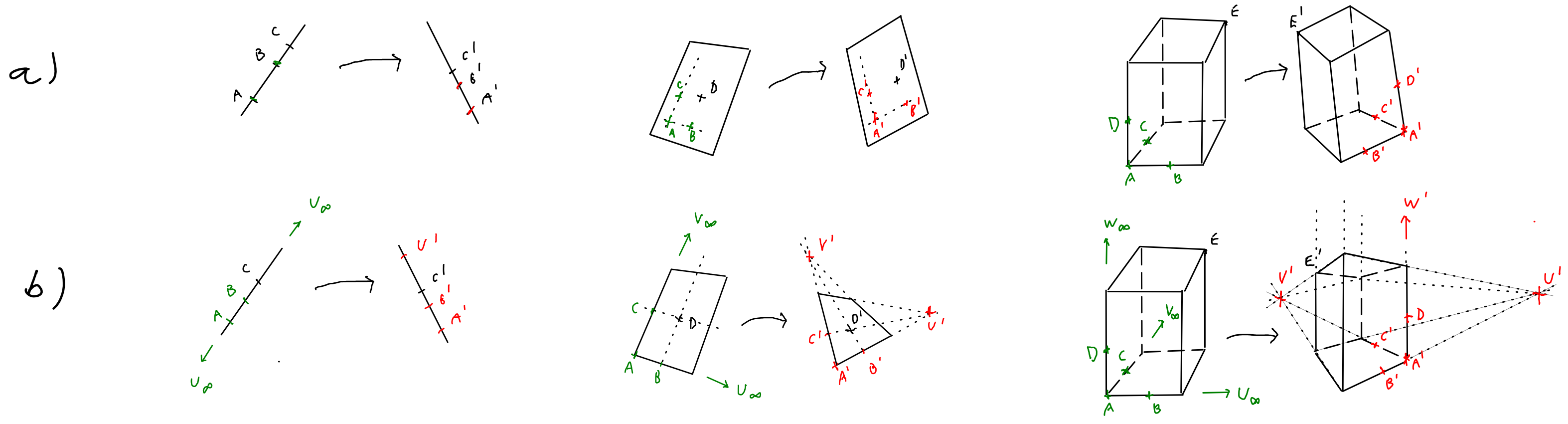
$= b_1' + b_2' = a_3'$ ✓

JAK TO JE S URČENOSTÍ?

- vzpomínáme

PROSTÉ zobrazení z prostoru dim n ...
a) AFINNÍ je určeno obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze,
b) PROJEKTIVNÍ ..... + navíc n odp. ÚBĚŽNÍKY.

- Dokazovali jsme konstruktivně a induktivně pro $n = 1, 2, 3 \dots$

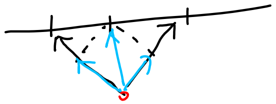


- S algebrou snadno rozumíme, že

PROSTÉ PROJEKTIVNÍ zobrazení z prostoru dim n
je určeno obrazy $n+2$ bodů ...
... v "dostatečně obecné" poloze!

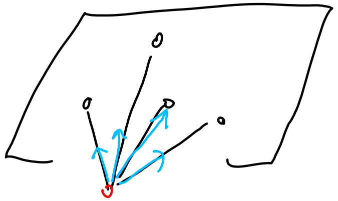
JAK TO JE S "DOST. OBECNOU" POLOHOU ?

- $m = 1$



3 navzájem různé body

- $m = 2$



4 body, z nichž žádné 3 nejsou na přímce

- m obecně . . . $m+2$ bodů, z nichž žádných $m+1$ neleží v NADROVINĚ,

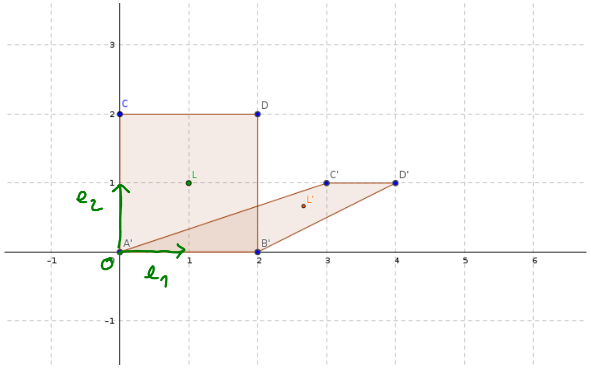
resp. odp. vektory lze vybrat tak, že $m+1$ tvoří BÁZI a zbylý je jejich SOUČTEM.

JAK TO JE S DŮKAZEM ?

... ZÁKL. VĚTA + zobecnění diskuze pro $m = 1$:

- PROSTÉ PROJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ určeno LINEÁRNÍM $F : W \to W'$,
- LINEÁRNÍ $F : W \to W'$ určeno obrazem BÁZE,
- PROSTÉ $\Rightarrow$ {body v "dost. obecné" poloze} $\mapsto$ {body v "dost. obecné" poloze},
- stačí vybrat tak, aby "SOUČET" $\mapsto$ "SOUČET" !

PŘÍKLAD – starý známý ... $n = 2$:



$$\left.\begin{array}{l} A = (0 : 0 : 1) \overset{!}{\longmapsto} (0 : 0 : 1) = A' \\ B = (2 : 0 : 1) \longmapsto (2 : 0 : 1) = B' \\ C = (0 : 2 : 1) \longmapsto (3 : 1 : 1) = C' \\ D = (2 : 2 : 1) \longmapsto (4 : 1 : 1) = D' \end{array}\right\} \; n+2 \text{ bodů} \ldots$$

$$F = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad ? \quad \leftarrow (n+1).(n+1) \text{ neznámých}$$

$A \mapsto A'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ $\leftarrow k, l, m, n \in \mathbb{R}$

↙ ... dalších $n+2$

$B \mapsto B'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+g \\ 2b+h \\ 2c+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l \\ 0 \\ l \end{pmatrix}$

$C \mapsto C'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d+g \\ 2e+h \\ 2f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m \\ m \\ m \end{pmatrix}$

$D \mapsto D'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4n \\ n \\ n \end{pmatrix}$

⟿ soustava lin. rovnic :

$\boxed{12}$ rovnic

$\boxed{13}$ neznámých

$13 - 12 = \underline{\underline{1}}$ volný param.. ✓

OBECNĚ :

$$\left.\begin{array}{l} (n+1)\cdot(n+2) = n^2 + 3n + 2 \text{ rovnic} \\ (n+1)\cdot(n+1) + (n+2) = n^2 + 3n + 3 \text{ neznámých} \end{array}\right\} \text{ rozdíl} = \underline{\underline{1}} \; ✓$$

JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — OPAKOVÁNÍ

- **OBECNĚ**

ALGEBRA

* CHAR. VEKTORY LINEÁRNÍ transf.

↕

* PEVNÉ BODY PROJEKTIVNÍ transf.

GEOMETRIE

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] & \cdots \ \dim \ \underline{m+1} \\ \mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P} & \cdots \ \dim \ \underline{m} \end{tikzcd}$$

- **ALGEBRA**

* char. vektory odp. různým číslům jsou lin. NEZÁVISLÉ (a)

* char. vektory odp. číslu λ tvoří VEKT. PODPROSTOR, jehož dimenze $\leq$ násobnost kořene λ (b)

* $\underline{m+1}$ = LICHÉ $\Rightarrow$ ASPOŇ JEDEN reálný kořen (c)
  (komplexní po dvojicích)

* DETERMINANT / STOPA matice F =
  = součin / součet všech char. čísel vč. násobností (d)
  (obecně komplexních)

* apod.

JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

- **PROJEKTIVNÍ** $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$

  * pevné body odp. různým char. číslům jsou RŮZNÉ (viz a)

  * pevné body odp. TÉMUŽ char. číslu tvoří proj. PODPROSTOR (viz b)

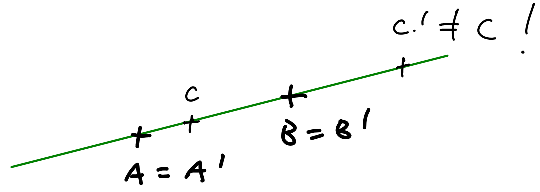
  * n = SUDÉ $\Rightarrow$ ASPOŇ JEDEN pevný bod ! (viz c)

  * izolovaných pevných bodů není víc než $n+1$! (viz a)

  * apod.

- **POZN.**

  * pro obecné PROJEKTIVNÍ vskutku může být



JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

- **AFINNÍ**

$$\left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \text{(NE)VLASTNÍ body} \longrightarrow \text{(NE)VLASTNÍ body}$$

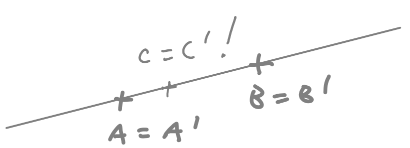
  - * VŽDY ASPOŇ JEDEN pevný bod!

... char. polynom $= \det\begin{pmatrix} *-\lambda & * & * \\ * & *-\lambda & * \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} *-\lambda & * \\ * & *-\lambda \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ $\lambda = 1$ je $\mathbb{R}$ - kořen

  - * VLASTNÍ pevné body tvoří af. PODPROSTOR!

... plyne z geom. vlastností: kolin., poměry ..



... plyne z alg. počítání:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} K & L \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix} \iff (K)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (L) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

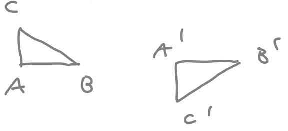
$$\iff \boxed{(K-E)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(L)} \longleftarrow \text{soustava (nehom.) lin. rovnic}$$

  - * apod.

- **POZN.**

  - * VÍCE IZOLOVANÝCH pevných bodů $\Longrightarrow$ všechny NEVLASTNÍ

... viz např. posunutou souměrnost



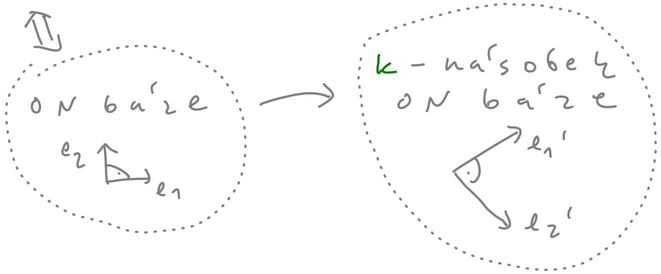
JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

- **PODOBNÉ**

  resp. SHODNÉ ← $k = 1$

$$\begin{pmatrix} \overset{K}{\boxed{\begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix}}} & \overset{L}{\boxed{\begin{matrix} * \\ * \end{matrix}}} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$K^T \cdot K = k^2 E$, k = koef. podobnosti

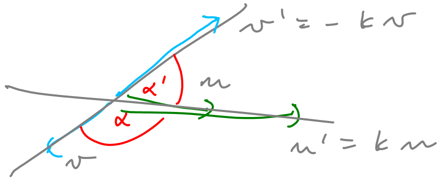


* $\lambda \in \mathbb{R}$ ... char. číslo $\Longrightarrow$ $\lambda = \pm k$

... $\|u'\| = k \|u\|$ pro lib. $u \in V$

* směry odp. RŮZNÝM NEVLASTNÍM bodům jsou KOLMÉ

... různé $\Longrightarrow$ $\lambda_1 = +k$, $\lambda_2 = -k$ ...



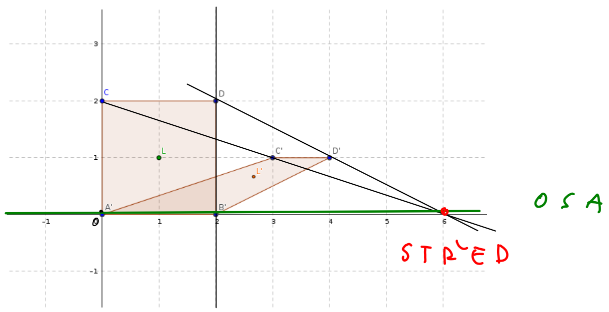
* ... NESHODNÉ $\Longrightarrow$ PRÁVĚ JEDEN VLASTNÍ pevný bod !

... neshodné $\Longrightarrow$ $\lambda \neq 1$ $\Longrightarrow$ $\det(K - E) \neq 0$

$\Longrightarrow$ soust. $(K - E) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(L)$ právě jedno řešení.

* apod.

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY ? — PŘÍKLAD



$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

násobnost 3

- * char. polynom $\det(F-\lambda E) = (1-\lambda)^{\boxed{3}}$ ⤳ kořen $\lambda = 1$
- * řešení pro $\lambda = 1$:

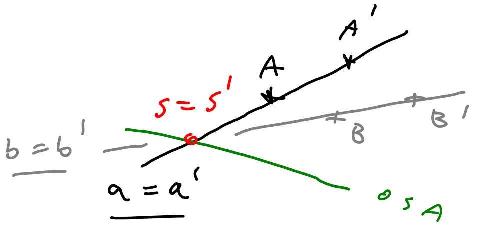
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{1/2} & \cancel{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{přímka } \{x_2 = 0\} = \underline{\text{OSA}}$$

dim: $2 \neq 3$!

JAK TO JE S TÍM STŘEDEM?

JE TAM ...

... a umíme to ZDŮVODNIT :



- lib. bod A mimo osu ⤳ A' ≠ A
  - ⤳ S ... průnik přímky a = AA' s osou
  - ⤳ S' = S ⤳ obraz a' = a ⤳ S = STŘED ?
- lib. jiný bod B mimo osu ⤳ tentýž STŘED S !

(jinak průnik a ∩ b pevný bod mimo osu ... SPOR)

JAK TO JE OSAMÍ / STŘEDY ? — PŘÍKLAD

$$F = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 1 \end{array}\right) \cdot \underset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix}} = \underset{X'}{\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_2 \\ \frac{1}{2}x_2 + x_0 \end{pmatrix}}$$

JE TAM . . .

. . . a umíme to taky SPOČÍTAT :

- S = STŘED $\iff$ pro lib. X . . . S, X, X' KOLINEÁRNÍ

$\iff$ . . . hodnost $\left(\begin{array}{c|c|c} S & X & X' \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right) = 2$

$\iff$ . . . $\det\left(\begin{array}{c|c|c} S & X & X' \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right) = 0$

- $$\underbrace{\det}\left(\begin{array}{c|c|c} s_1 & x_1 & x_1+3x_2 \\ s_2 & x_2 & x_2 \\ s_0 & x_0 & \frac{1}{2}x_2+x_0 \end{array}\right) \overset{(-1)}{\curvearrowright} = \det\left(\begin{array}{c|c|c} s_1 & x_1 & 3x_2 \\ s_2 & x_2 & 0 \\ s_0 & x_0 & \frac{1}{2}x_2 \end{array}\right) = \frac{1}{2}s_1 x_2^2 + 3 s_2 x_2 x_0 - 3 s_0 x_2^2 - \frac{1}{2} s_2 x_1 x_2$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}s_1 - 3s_0\right)} x_2^2 + \underbrace{3s_2}\, x_2 x_0 - \underbrace{\frac{1}{2}s_2}\, x_1 x_2$$

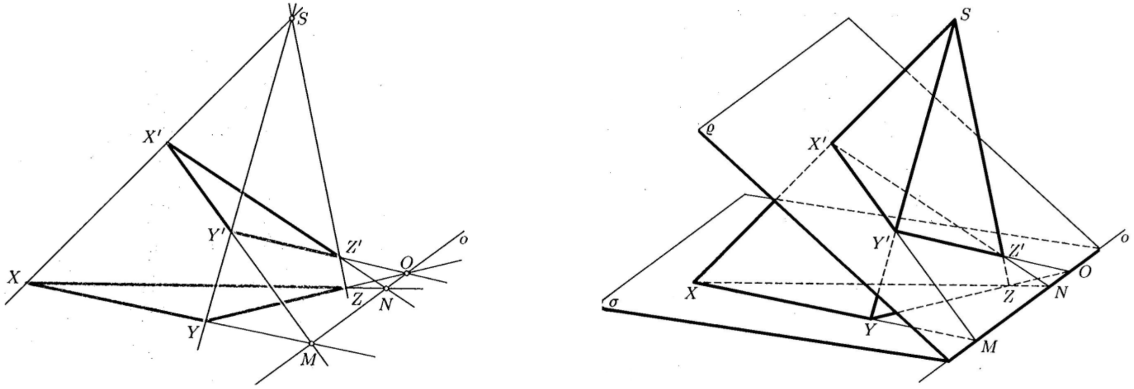
Tedy det . . . = 0 pro lib. X $\iff$ $$\boxed{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}s_1 - 3s_0 &= 0 \\ 3s_2 &= 0 \\ \tfrac{1}{2}s_2 &= 0 \end{aligned}}$$ ← soustava (hom.) lin. rovnic !

$\iff$ $S = (6 : 0 : 1)$ ← souhlasí s obr. ✓

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY OBECNĚ ?

– VZPOMÍNÁME
DIM 2

- **Věta**
  Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a X′Y′Z′ v projektivní rovině platí: přímky XX′, YY′, ZZ′ prochází jedním bodem ⟺ průsečíky přímek XY a X′Y′, YZ a Y′Z′, XZ a X′Z′ leží na jedné přímce.



Desarguesova věta a její trojrozměrná interpretace.

- Důsl.

neidentická bijektivní

proj. transf. v rovině má osu ⟺ má střed

přímka (= nadrovina)
pevných bodů

pevný bod:
∀ incid. přímka
je pevná

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY OBECNĚ? — NOVĚ DIM n

... ZOBECNĚNÍ DESARGUESOVY VĚTY:

Pro neid. bijektivní PROJEKTIVNÍ $f: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ mezi proj. prostory DIM ≥ 2 platí:

(1) f má (NAD)OSU $\Longleftrightarrow$ f má STŘED.

(2) (NAD)OSA, resp. STŘED je buď právě jedna, nebo žádná.

NÁZNAK DŮKAZU:

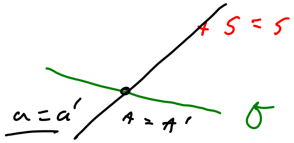
(1) směr "$\Longrightarrow$" (ALGEBRA POMÁHÁ)

dim $n-1$ dim n

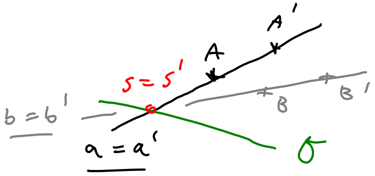
- σ = NADOSA ... vekt. nadrovina
  ... char. číslo násobnosti aspoň n ... ozn. λ
  ⇝ ex. další $\mathbb{R}$-kořen ... ozn. μ

komplexní kořeny vždy po dvojicích!

- $\mu \neq \lambda$ ⇝ STŘED $\notin$ NADOSE



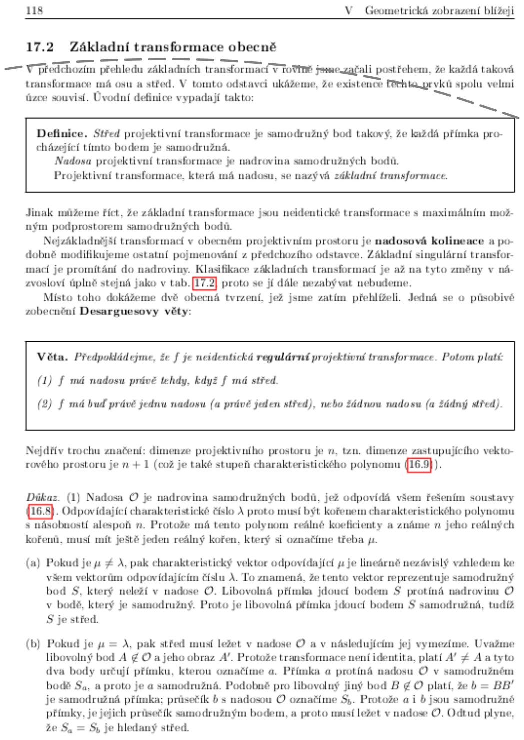
- $\mu = \lambda$ ⇝ STŘED $\in$ NADOSE



JAK TO JE OSAMI / STŘEDY OBECNĚ ? – POKR. DŮKAZU

(1) směr "⟸" (ALGEBRA nepomáhá)

… viz hlavní text



17.2 Základní transformace obecně

V předchozím přehledu základních transformací v rovině jsme začali postřehem, že každá taková transformace má osu a střed. V tomto odstavci ukážeme, že existence těchto prvků spolu velmi úzce souvisí. Úvodní definice vypadají takto:

Definice. *Střed* projektivní transformace je samodružný bod takový, že každá přímka procházející tímto bodem je samodružná.

Nadosa projektivní transformace je nadrovina samodružných bodů.

Projektivní transformace, která má nadosu, se nazývá *základní transformace*.

Jinak můžeme říct, že základní transformace jsou neidentické transformace s maximálním možným podprostorem samodružných bodů.

Nejzákladnější transformací v obecném projektivním prostoru je **nadosová kolineace** a podobně modifikujeme ostatní pojmenování z předchozího odstavce. Základní singulární transformací je promítání do nadroviny. Klasifikace základních transformací je až na tyto změny v názvosloví úplně stejná jako v tab. 17.2, proto se jí dále nezabývat nebudeme.

Místo toho dokážeme dvě obecná tvrzení, jež jsme zatím přehlíželi. Jedná se o působivé zobecnění **Desarguesovy věty**:

Věta. *Předpokládejme, že f je neidentická* ***regulární*** *projektivní transformace. Potom platí:*

(1) f má nadosu právě tehdy, když f má střed.

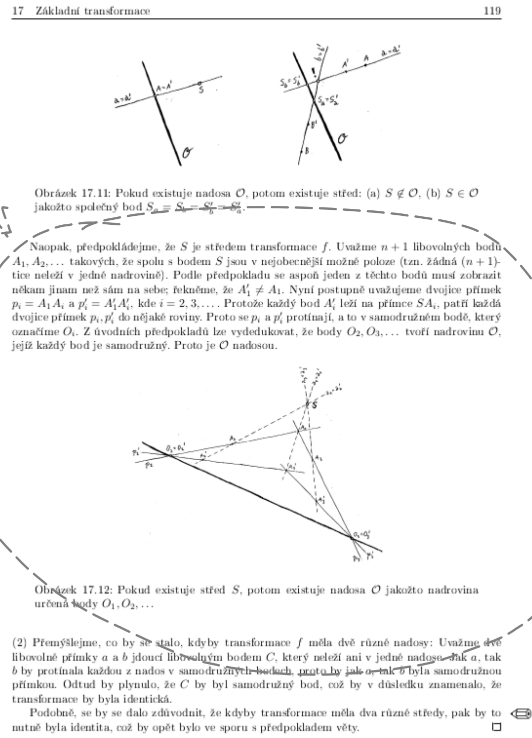
(2) f má buď právě jednu nadosu (a právě jeden střed), nebo žádnou nadosu (a žádný střed).

Nejdřív trochu značení: dimenze projektivního prostoru je n, tzn. dimenze zastupujícího vektorového prostoru je $n+1$ (což je také stupeň charakteristického polynomu (16.9)).

Důkaz. (1) Nadosa $\mathcal{O}$ je nadrovina samodružných bodů, jež odpovídá všem řešením soustavy (16.8). Odpovídající charakteristické číslo λ proto musí být kořenem charakteristického polynomu s násobností alespoň n. Protože má tento polynom reálné koeficienty a známe n jeho reálných kořenů, musí mít ještě jeden reálný kořen, který si označíme třeba μ.

(a) Pokud je $\mu \neq \lambda$, pak charakteristický vektor odpovídající μ je lineárně nezávislý vzhledem ke všem vektorům odpovídajícím číslu λ. To znamená, že tento vektor reprezentuje samodružný bod S, který neleží v nadose $\mathcal{O}$. Libovolná přímka jdoucí bodem S protíná nadrovinu $\mathcal{O}$ v bodě, který je samodružný. Proto je libovolná přímka jdoucí bodem S samodružná, tudíž S je střed.

(b) Pokud je $\mu = \lambda$, pak střed musí ležet v nadose $\mathcal{O}$ a v následujícím jej vymezíme. Uvažme libovolný bod $A \notin \mathcal{O}$ a jeho obraz A'. Protože transformace není identita, platí $A' \neq A$ a tyto dva body určují přímku, kterou označíme a. Přímka a protíná nadosu $\mathcal{O}$ v samodružném bodě S_a, a proto je a samodružná. Podobně pro libovolný jiný bod $B \notin \mathcal{O}$ platí, že $b = BB'$ je samodružná přímka; průsečík b s nadosou $\mathcal{O}$ označíme S_b. Protože a i b jsou samodružné přímky, je jejich průsečík samodružným bodem, a proto musí ležet v nadose $\mathcal{O}$. Odtud plyne, že $S_a = S_b$ je hledaný střed.



Obrázek 17.11: Pokud existuje nadosa $\mathcal{O}$, potom existuje střed: (a) $S \notin \mathcal{O}$, (b) $S \in \mathcal{O}$ jakožto společný bod $S_a = S_b = S'_b = S'_a$.

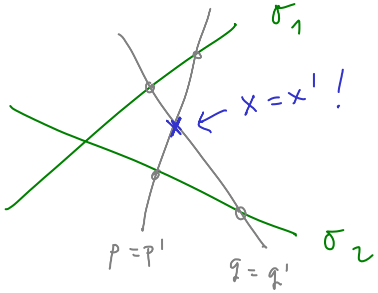
Naopak, předpokládejme, že S je středem transformace f. Uvažme $n+1$ libovolných bodů $A_1, A_2, \ldots$ takových, že spolu s bodem S jsou v nejobecnější možné poloze (tzn. žádná $(n+1)$-tice neleží v jedné nadrovině). Podle předpokladu se aspoň jeden z těchto bodů musí zobrazit někam jinam než sám na sebe; řekněme, že $A'_1 \neq A_1$. Nyní postupně uvažujeme dvojice přímek $p_i = A_1A_i$ a $p'_i = A'_1A'_i$, kde $i = 2, 3, \ldots$. Protože každý bod A'_i leží na přímce SA_i, patří každá dvojice přímek p_i, p'_i do nějaké roviny. Proto se p_i a p'_i protínají, a to v samodružném bodě, který označíme O_i. Z úvodních předpokladů lze vydedukovat, že body $O_2, O_3, \ldots$ tvoří nadrovinu $\mathcal{O}$, jejíž každý bod je samodružný. Proto je $\mathcal{O}$ nadosou.

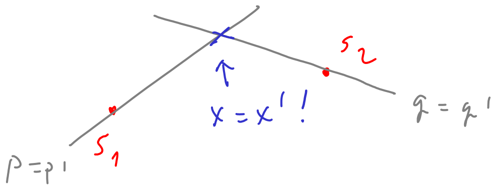
Obrázek 17.12: Pokud existuje střed S, potom existuje nadosa $\mathcal{O}$ jakožto nadrovina určená body $O_1, O_2, \ldots$

(2) Přemýšlejme, co by se stalo, kdyby transformace f měla dvě různé nadosy: Uvažme dvě libovolné přímky a a b jdoucí libovolným bodem C, který neleží ani v jedné nadose. Jak a, tak b by protínala každou z nados v samodružných bodech, proto by jak a, tak b byla samodružnou přímkou. Odtud by plynulo, že C by byl samodružný bod, což by v důsledku znamenalo, že transformace by byla identická.

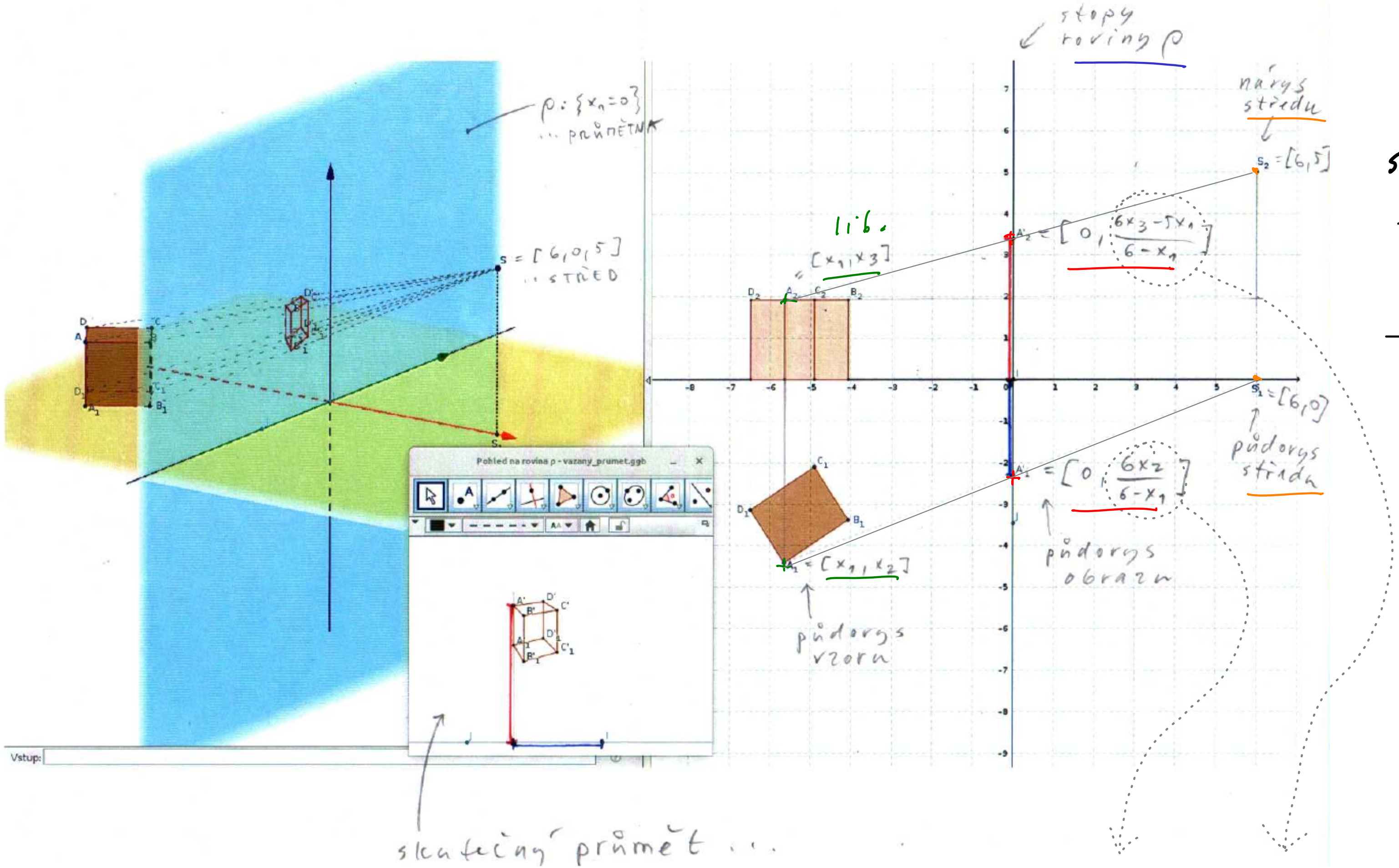
Podobně, se by se dalo zdůvodnit, že kdyby transformace měla dva různé středy, pak by to nutně byla identita, což by opět bylo ve sporu s předpokladem věty. □

(2) předp. víc <u>nados</u>, resp. <u>středů</u> ⇝ f = identita!





JAK TO JE S NEPROSTÝMI 208 R.? — PŘÍKLAD



STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ

ze středu $S = [6,0,5]$

do roviny $\rho = \{x_1 = 0\}$

← KONSTRUKCE

vs.

POČÍTÁNÍ

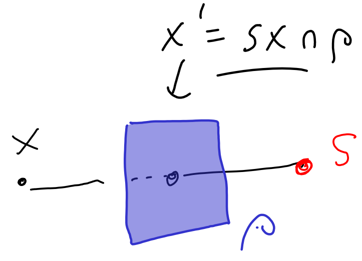
↓

- afinní souř. ... $[x_1, x_2, x_3] \longmapsto \left[0, \frac{6x_2}{6-x_1}, \frac{6x_3-5x_1}{6-x_1}\right]$ $(x_1 \neq 6)$
- homogenní souř ... $(x_1 : x_2 : x_3 : x_0) \longmapsto (0 : 6x_2 : 6x_3 - 5x_1 : 6x_0 - x_1)$ $(*)$
- matice ..... $F = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — PŘÍKLAD

Homog. souř. obrazu PŘÍMO:

- Dán střed $S = (6 : 0 : 5 : 1)$ a průmětna $\rho = \{\underbrace{x_1 = 0}\}$
- obraz obec. bodu $X = (x_1 : x_2 : x_3 : x_0) \neq S$ je průnikem přímky SX s rovinou ρ



- -

- Přímka SX parametricky $= \{ sS + tX \mid s, t \in \mathbb{R} \}$

$$= \{ (\underbrace{6s + tx_1} : tx_2 : 5s + tx_3 : s + tx_0) \}$$

- Průnik $SX \cap \rho$ ... $\boxed{6s + tx_1 = 0}$ ← 1 rovnice / 2 neznámé (s, t)

řešení ...... $s = x_1$, $t = -6$ (až na násobek)

dosazení ...... $X' = (0 : -6x_2 : 5x_1 - 6x_3 : x_1 - 6x_0)$

... souhlasí s (*) až na násobek ✓

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — PŘÍKLAD

- f = NEPROSTÉ $\iff$ hodnost F není MAX $\iff$ $\det F = 0$

  $\iff$ F má NETRIV. JÁDRO $= \{v : F(v) = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{aligned} x_1 &= 6x_0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 5x_0 \\ x_0 &= \text{lib} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ tj. bod $(6:0:5:\underline{1}) = S$

- Tedy DEF. OBOR $f = \mathcal{P} \setminus \{S\}$! ← STŘED promítání ✓

  resp. v af. prostoru ... $\mathcal{A} \setminus \{x_1 = 6\}$ ← "preúběžnice"
  (rovina $\parallel \rho$ proch. S) ✓

- OBRAZ f = určen "sloupci F" = ... = $\{x_1 = 0\}$ ← PRŮMĚTNA ρ ✓

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — DOUBLE CHECK

- CHAR. VEKTORY:

  - $\det(F - \lambda E) = \dots = -\lambda(6-\lambda)^3 \rightsquigarrow$ kořeny $\lambda = 0$, $\lambda = 6$

  - $\lambda = 0 \dots \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ JÁDRO $\rightsquigarrow (6:0:5:\underline{1}) =$ STŘED ✓

  - $\lambda = 6^{*} \dots \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \{x_1 = 0\} =$ PRŮMĚTNA ✓

- $f =$ PROJEKCE $\rightsquigarrow f \circ f = f \rightsquigarrow F \cdot F = \lambda F$, $\lambda \neq 0^{*}$:

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) = \dots = 6 \cdot \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \quad ✓$$

* ... násobek $\lambda \neq 0$ nemá žádný geom. význam

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — DOUBLE CHECK

INTERPRETACE matice zobrazení:

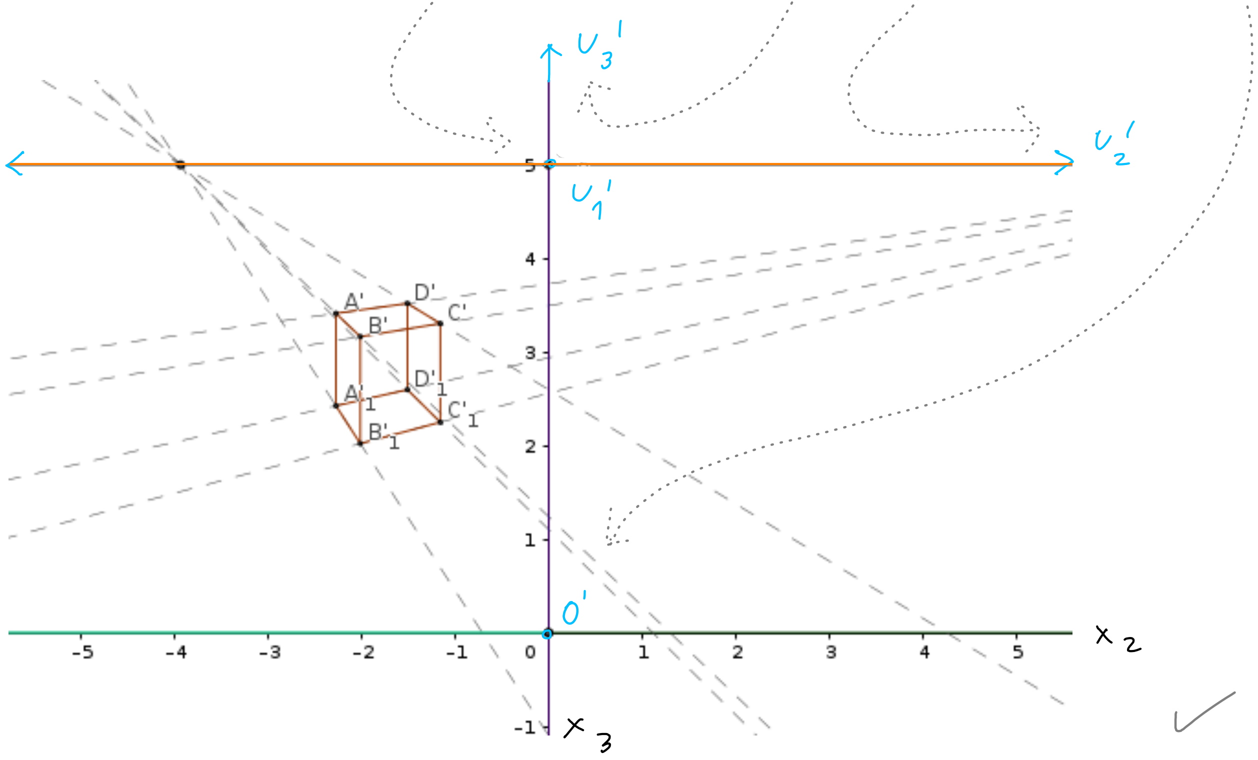
U_1' .. úběžník 1. souř. osy

U_2' ... úběžník 2. souř. osy

U_3' .. úběžník 3. souř. osy

O' ... obraz počátku

$$F = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$



JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? – OBECNĚJI

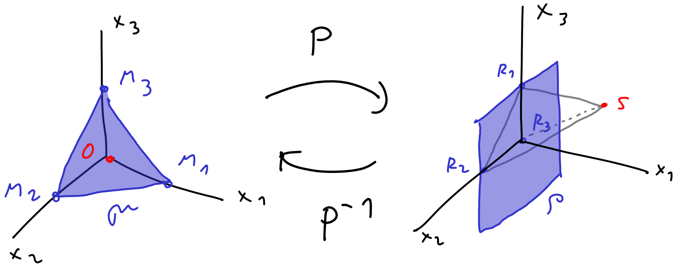
Bude to fungovat obdobně pro každé STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ?

ANO ... stačí popsat PŘECHOD od jednoho (modelového) promítání k (libovolnému) jinému!

- střed $S = (6:0:5:\underline{1})$ + průmětna $\rho = \{x_1 = 0\}$ } $F = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$ ... předch. příklad

- střed $O = (0:0:0:\underline{1})$ + průmětna $\mu = \{x_1 + x_2 + x_3 = \underline{x}_0\}$ } $M = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ ... snadné cvičení

- Volba $M_i \in \mu$ a $R_i \in \rho$



} $P = \left(\begin{array}{cccc} -6 & -6 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ... afinní PŘECHOD $M_i \mapsto R_i$, $O \mapsto S$

$P^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} -1/6 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & -1/5 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ... INVERZNÍ přechod

- Platí $\boxed{F = P \cdot M \cdot P^{-1}}$ ...... OBECNÁ projekce:
  1) přechod do modelové situace,
  2) modelová projekce,
  3) přechod zpátky.

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — OBECNĚ

- NEPROSTÉ PROJEKTIVNÍ zobr. $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$
  NENÍ def. na celém $\mathcal{P}$!

  ... třeba vyloučit proj. podpr. odp. jádru $\ker F \subseteq W$ ...

  ... pro AFINNÍ sestává výhradně z NEVL. bodů

- korespondenci ...

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
\mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

  ... NEROZUMÍME uspokojivě v obou směrech

  ... problémy s URČENOSTÍ !

  ☹

- s "ne příliš degenerovanými" zobrazeními

  ... se vždy nějak domluvíme !

  ☺

  ... zejména v AFINNÍM případě