

41. Tentokrát A a B řeknou:

A: B je poctivec.

B: A je padouch.

Dokažte, že buď jeden z nich mluví pravdu, ale není poctivec, nebo jeden z nich lže, ale není padouch.

42. Na ostrově poctivců, padouchů a normálních lidí tvoří padouši nejnížší kastu, normální lidé střední kastu a poctivci kastu nejvyšší.

Dva lidi, A a B, z nichž každý je poctivec, padouch, nebo normální, prohlásí:

A: Jsem z nižší kasty než B.

B: To není pravda!

Lze určit, z které kasty je A a B? Dá se zjistit, jak je to s pravdivostí jejich výroků?

43. Máme tři lidi, A, B a C, jeden z nich je poctivec, jeden padouch a jeden normální. A a B prohlásí:

A: B je z vyšší kasty než C.

B: C je z vyšší kasty než A.

Poté C dostane otázku: „Kdo je z vyšší kasty, A, nebo B?“ Co C odpoví?

C. Ostrov Bahava

Ostrov Bahava je ostrovem ženské rovnoprávnosti, takže se tu i ženy dělí na poctivce, padouchy a normální. Jistá dávná vládkyně Bahavy vydala zákon, podle něhož poctivec může uzavřít sňatek jen s padouchem a padouch jen s poctivcem. (Takže normální člověk si může vzít jenom normálního.) V kterémkoliv manželském páru buď obě jeho polovice patří k normálním lidem, nebo jedna je poctivec a druhá padouch. Na ostrově Bahava se odehrávají další tři hádanky.

44. Nejdříve si představme jeden takový manželský pár, pana a paní A, a ti prohlásí:

Pan A: Moje žena není normální.

Paní A: Můj muž není normální.

Co je pan A, co je paní A?

45. Dejme tomu, že řeknou:

Pan A: Moje žena je normální.

Paní A: Můj muž je normální.

Bude odpověď stejná?

46. Teď půjde o dva manželské páry na ostrově Bahava, o pana a paní A a pana a paní B. Tři z nich řeknou:

Pan A: Pan B je poctivec.

Paní A: Manžel má pravdu, pan B je poctivec.

Paní B: Je to tak. Můj muž je poctivec.

Co je každý z těch čtyř, a které z uvedených tří výroků jsou pravdivé?

Rozluštění

26. Je vyloučeno, aby ať už poctivec, nebo padouch řekl: „Jsem padouch,“ protože poctivec by nikdy nepronесl nepravdivý výrok, že je padouch, a padouch by nepronесl pravdivý výrok, že je padouch. A tedy nemohl říci, že je padouch. Takže B lhal, když řekl, že A řekl, že je padouch. B je tedy padouch. C řekl, že B lže, a B opravdu lhal, C tedy říkal pravdu a je poctivec. Takže B je padouch a C je poctivec. (Co je A, nedá se usoudit.)

27. Odpověď je tu stejná jako u předchozí hádanky, i když zdůvodnění se poněkud liší. Nejprve si všimněme, že B a C mají povahu opačnou, neboť si odporují. Takže z těchto dvou je jeden poctivec a druhý padouch. Kdyby A byl poctivec, pak bychom tu měli dva poctivce a A by nelhal a neříkal, že je mezi nimi jen jeden poctivec. Na druhé straně kdyby A byl padouch, pak by mezi nimi byl jediný poctivec; ovšem to by pak A, jakožto padouch, nemohl pronést tento pravdivý výrok. A tedy v žádném případě nemo-

hl říci, že je mezi nimi jen jeden poctivec. B tedy nesprávně reprodukoval výrok A, takže B je padouch a C je poctivec.

28. Předpokládejme, že A je padouch. Potom by výrok „Aspoň jeden z nás je padouch“ byl nepravdivý (padouši pronášejí nepravdivé výroky), a oba dva by byli poctivci. Kdyby A byl padouch, musel by být také poctivec, což není možné. Takže A není padouch, a je to poctivec. Jeho výrok je tedy pravdivý, a aspoň jeden z nich je skutečně padouch. Jelikož A je poctivec, tak padouch musí být B. Takže A je poctivec a B padouch.

29. Tato hádanka je vhodným uvedením do logické **disjunkce**. Máme dva výroky, P a Q. To, že platí výrok „bud' P, nebo Q“, znamená, že alespoň jeden z výroků P a Q je pravdivý (případně jsou pravdivé oba). Když je výrok „bud' P, nebo Q“ nepravdivý, pak oba výroky, P i Q, jsou nepravdivé. Například když řeknu: „Bud' prší, nebo sněží,“ a můj výrok je nepravdivý, tak není pravda, že prší, a není ani pravda, že sněží.

V tomhle smyslu se spojení „bud' — nebo“ užívá v logice, a tak ho také budeme užívat v celé naší knížce. Ve všedním životě se tohoto spojení užívá někdy v tomto smyslu (připouští se, že platí obě možnosti), a někdy ve smyslu vylučovacím — to znamená, že platí právě jedna z obou možností. Příklad takového vylučovacího užití: Řeknu-li „Bud' si vezmu Bětku, nebo si vezmu Janu,“ rozumím se, že obě možnosti se navzájem vylučují, to jest že si neřídím vzít obě dívky. Na druhé straně jestliže se například podle seznamu přednášek na posluchači požaduje, aby absolvoval bud' dva semestry matematiky, nebo dva semestry toho či onoho cizího jazyka, univerzita zajisté nikoho nevyloučí za to, že absolvuje obojí. To je nevylučovací význam spojení „bud' — nebo“ a výhradně tak je budeme užívat my.

Logická operace „bud' — nebo“ má další důležitou vlastnost: Uvažujme výrok „P nebo Q“ (kratší vyjádření výroku „bud' P, nebo Q“) a dejme tomu, že je pravdivý. V tom případě pokud P je nepravdivý, pak Q musí být pravdivý.

(Alespoň jeden je pravdivý, takže když P je nepravdivý, tak pravdivý výrok musí být Q). Tak třeba dejme tomu, že je pravda, že bud' prší, nebo sněží, není však pravda, že prší. Pak musí být pravda, že sněží.

Tuto teorii teď využijeme k řešení naší hádanky. A pronesl výrok disjunktivního typu: „Bud' já jsem padouch, nebo B je poctivec.“ Dejme tomu, že A je padouch. Pak zmíněný výrok je nepravdivý. To znamená: není pravda, ani že A je padouch, ani že B je poctivec. Kdyby tedy A byl padouch, vyplývalo by z toho, že není padouch, což si odporuje. Takže A musí být poctivec.

Zjistili jsme, že A je poctivec, a tak je pravdivý jeho výrok, že platí aspoň jedna z možností: (1) A je padouch; (2) B je poctivec. Jelikož možnost (1) neplatí (A je poctivec), pak musí platit možnost (2), totiž že B je poctivec. Takže A i B jsou poctivci.

30. Dojdeme k jedinému závěru, že autor hádanky není poctivec. Ani poctivec, ani padouch by totiž nemohli něco takového vyslovit. Kdyby A byl poctivec, pak výrok, že A je padouch nebo že dvě a dvě je pět, by byl nepravdivý, ježto neplatí, ani že A je padouch, ani že dvě a dvě je pět. Poctivec A by tak pronesl nepravdivý výrok, což není možné. Na druhé straně kdyby A byl padouch, pak výrok, že A je padouch nebo že dva a dva je pět, by byl pravdivý, poněvadž první výrok, že A je padouch, je pravdivý. Padouch A by tak pronesl pravdivý výrok, což je rovněž nemožné.

Podmínky této hádanky si odporují (podobně jako v hádance o všeprobíjející střele a neprůstřelném pancíři). Takže já, autor hádanky, se bud' mýlím, nebo lžu. Ujišťuji vás však, že se nemýlím. Z čehož vyplývá, že nejsem poctivec. V zájmu své pověsti místopřísežně prohlašuji, že jsem už přinejmenším jednou mluvil pravdu, takže nejsem ani padouch.

31. Především A musí být padouch, protože kdyby byl poctivec, pak by bylo pravda, že všichni tři jsou padouši, tedy i A by byl padouch. Kdyby tedy A byl poctivec, musel by

být padouch, což není možné, takže A je padouch. Jeho výrok je nepravdivý, ve skutečnosti tedy je mezi nimi aspoň jeden poctivec.

A teď předpokládejme, že B je padouch. Pak by A i B byli padouši, takže C by byl poctivec (protože mezi nimi je aspoň jeden poctivec). To by znamenalo, že je mezi nimi právě jeden poctivec, takže výrok B by byl pravdivý. Padouch však nemůže pronášet pravdivé výroky. Takže B musí být poctivec.

Tedy víme, že A je padouch a že B je poctivec. Poněvadž B je poctivec, jeho výrok je pravdivý, takže je mezi nimi právě jeden poctivec. Tímto poctivcem je B, takže C musí být padouch. Zjistili jsme, že A je padouch, B je poctivec a C je padouch.

32. Nelze určit, co je B, lze však dokázat, že C je poctivec.

Především A musí být padouch, ze stejných důvodů jako u předchozí hádanky, takže i tady je mezi nimi aspoň jeden poctivec. Nu a B je buď poctivec, nebo padouch. Předpokládejme, že je poctivec. Pak je pravda, že právě jeden z nich je padouch. Tímto jediným padouchem bude A, takže C bude poctivec. Jestliže tedy B je poctivec, je jím i C. Na druhé straně jestliže B je padouch, pak C musí být poctivec, (všichni tři nemohou být padouši, jak už víme). Takže ať tak nebo tak, C je poctivec.

33. Především A nemůže být poctivec — to by jeho výrok byl pravdivý, což by znamenalo, že je padouch. Takže A je padouch a jeho výrok je nepravdivý. Kdyby B byl poctivec, pak výrok A by byl pravdivý. B je tedy také padouch. Takže A i B jsou padouši.

34. Předpokládejme, že A je poctivec. Pak jeho výrok, že B je padouch, je pravdivý, a B je padouch. Výrok B, že A a C mají stejnou povahu, je tedy nepravdivý, a A a C nemají stejnou povahu. A tak C je padouch (neboť A je poctivec). Takže pokud A je poctivec, pak C je padouch.

Na druhé straně předpokládejme, že A je padouch. Po-

tom jeho výrok, že B je padouch, není pravdivý, a B je poctivec. Tedy výrok B, že A a C mají stejnou povahu, je pravdivý. To znamená, že C je padouch (protože jím je A).

Ukázali jsme, že bez ohledu na to, je-li A poctivec nebo padouch, C musí být padouch. C je tedy padouch.

35. Rozebereme si jednotlivé možnosti.

1. možnost: A je poctivec. Pak B a C mají stejnou povahu. Jestliže C je poctivec, pak B je také poctivec, B má tedy stejnou povahu jako A, takže C, protože mluví vždycky pravdu, odpoví „Ano“. Jestliže C je padouch, pak B je také padouch (B má stejnou povahu jako C), a tak B nemá stejnou povahu jako A. Protože C je padouch, bude lhát a odpoví „Ano“.

2. možnost: A je padouch. Potom B a C nemají stejnou povahu. Jestliže C je poctivec, pak B je padouch, a B má stejnou povahu jako A. Takže C, protože je to poctivec, odpoví „Ano“. Jestliže C je padouch, pak B, protože nemá stejnou povahu jako C, je poctivec, a B nemá stejnou povahu jako A. Pak C, protože je to padouch, bude lhát a odpoví „Ano“.

V obou případech tedy C odpoví „Ano“.

36. Abyste rozluštili tuhle hádanku, musíte využít informaci, kterou jsem vám poskytl, že totiž poté, co mi jeden z těch dvou odpověděl na mou otázku, znal jsem na ni správnou odpověď.

Předpokládejme, že ten člověk — nazvěme ho A — odpověděl „Ano“. Mohl jsem pak už vědět, je-li aspoň jeden z těch dvou poctivec? Nikoliv. Mohlo by to být totiž tak, že A byl poctivec a odpověděl podle pravdy „Ano“ (což by odpovídalo skutečnosti, neboť aspoň jeden z nich — totiž A — byl poctivec), nebo to mohlo být i tak, že oba dva to byli padouši, a potom A odpověděl nepravdivě „Ano“ (což by skutečně bylo nepravdivé, protože ani jeden nebyl poctivec). Kdyby tedy A odpověděl „Ano“, nic bych se byl nedověděl. Jenže řekl jsem vám přece, že jsem věděl, jak to je, hned jak mi A odpověděl. Takže A musel odpovědět „Ne“.

Teď už snadno zjistíme, co je A a co ten druhý – nazvěme ho B: Kdyby A byl poctivec, nemohl by odpovědět „Ne“, takže A je padouch. Poněvadž jeho odpověď „Ne“ je nepravdivá, je z nich aspoň jeden poctivec. Takže A je padouch a B je poctivec.

37. Ano, musí být stejné. Jestliže ti dva jsou oba poctivci, pak oba odpovědí „Ano“. Pokud jsou oba padouši, pak zase oba odpovědí „Ano“. Jestliže jeden z nich je poctivec a druhý padouch, pak oba odpovědí „Ne.“

38. Tady jsem si dovolil trochu zašpásovat. Klíč k rozluštění je ve větě „co na sluníčku tluče špačky“. Z toho plyne, že je to trapič zvířat, a trapiči zvířat jsou odporní padouši. Takže ten člověk se jmenoval „Pavel“.

39. Především A nemůže být poctivec, protože poctivec by nikdy neřekl, že je normální. Takže A je buď padouch, nebo normální. Předpokládejme, že A je normální. Pak výrok B je pravdivý, a tedy B je poctivec nebo normální, jenomže B nemůže být normální (protože tím je A), takže B je poctivec. Na C už nezbyvá nic než padouch. Jenže padouch nemůže říci, že není normální (protože padouch ve skutečnosti normální není), takže tu máme rozpor a A nemůže být normální. Je tedy A padouch. Potom výrok B je nepravdivý, takže B je normální (nemůže být padouch, protože tím je A). Tak tedy A je padouch, B je normální a C je poctivec.

40. Na této hádance je zajímavé, že se tu nedá určit, je-li to A nebo B, kdo mluví pravdu a přitom není poctivec. Můžeme tu dokázat jen to, že aspoň jeden z nich má uvedené vlastnosti.

Buď A mluví pravdu, nebo ji nemluví. Dokážeme:

- (1) Jestliže A mluví pravdu, pak to není poctivec.
 - (2) Jestliže A nemluví pravdu, pak B mluví pravdu, avšak není poctivec.
- (1) Předpokládejme, že A mluví pravdu. Pak B je pocti-

vec a mluví pravdu, takže A není poctivec. Jestliže tedy A mluví pravdu, pak není poctivec.

(2) Předpokládejme, že A nemluví pravdu. Pak B není poctivec. Ale B mluví pravdu, protože A není poctivec (neboť A nemluví pravdu). Takže v tomto případě B mluví pravdu, avšak není poctivec.

41. Ukážeme, že pokud B mluví pravdu, tak není poctivec, a pokud nemluví pravdu, tak A lže, ale není padouch.

(1) Předpokládejme, že B mluví pravdu. Potom A je padouch a nemluví pravdu, a tedy B není poctivec. Takže v tomto případě B mluví pravdu, avšak není poctivec.

(2) Předpokládejme, že B nemluví pravdu. Potom A není padouch. Jenomže A lže, protože B nemůže být poctivec, když nemluví pravdu. Takže v tomto případě A lže, ale není padouch.

42. Především A nemůže být poctivec, poněvadž poctivec nemůže být z nižší kasty než někdo jiný. A teď předpokládejme, že A je padouch. Potom je jeho výrok nepravdivý a A není z nižší kasty než B. Takže B musí být také padouch (kdyby nebyl, A by byl z nižší kasty než B). Jestliže tedy A je padouch, je jím i B. Jenomže to je vyloučeno, protože B říká opak toho, co A, a dvě navzájem opačná tvrzení nemohou být obě nepravdivá. Předpoklad, že A je padouch, vede k rozporu, takže A není padouch. Tak tedy A je normální.

A pokud jde o B? Nu, kdyby to byl poctivec, pak A (normální) by byl z nižší kasty než B, a tak výrok A by byl pravdivý a výrok B nepravdivý. Měli bychom tu poctivce B vyslovujícího nepravdivý výrok, což není možné. B tedy není poctivec. Předpokládejme, že B je padouch. Pak by výrok A byl nepravdivý a výrok B pravdivý, a měli bychom padoucha B vyslovujícího pravdivý výrok. Takže B není ani padouch. Tak tedy B je normální.

Zjistili jsme, že A i B jsou normální. Tedy výrok A je nepravdivý a výrok B pravdivý. Podarilo se nám zodpovědět všechny otázky.

43. 1. krok: Nejprve prokážeme, že z výroku *A* vyplývá, že *C* nemůže být normální. Jestliže *A* je poctivec, pak *B* je skutečně z vyšší kasty než *C*, takže *B* je normální a *C* je padouch. V tomto případě tedy *C* není normální. Předpokládejme dále, že *A* je padouch. Potom *B* ve skutečnosti není z vyšší kasty než *C*, takže *B* je normální a *C* je poctivec. Ani v tomto případě *C* není normální. Třetí možnost je, že *A* je normální, pak ovšem *C* není normální (normální je jenom jedna z osob *A*, *B* a *C*). Takže *C* není normální.

2. krok: Stejná úvaha nás dovede k tomu, že z výroku *B* vyplývá, že *A* není normální. Takže *A* ani *C* nejsou normální, a tak normální je *B*.

3. krok: Protože *C* není normální, je to poctivec nebo padouch. Předpokládejme, že je poctivec. Pak *A* je padouch (podle 2. kroku je *B* normální), a tak *B* je vyšší kasty než *A*. Takže *C*, protože je poctivec, odpoví podle pravdy: „*B* je z vyšší kasty než *A*.“

Na druhé straně předpokládejme, že *C* je padouch. Potom *A* je poctivec, a tak *B* není z vyšší kasty než *A*. Takže *C*, protože je padouch, zalže a řekne: „*B* je z vyšší kasty než *A*.“ Tedy bez ohledu na to, je-li poctivec nebo padouch, *C* odpoví, že *B* je z vyšší kasty než *A*.

44. Pan *A* nemůže být padouch, protože pak by jeho manželka byla poctivec a nebyla by normální, takže výrok pana *A* by byl pravdivý. Podobně paní *A* nemůže být padouch. Nikdo z nich nemůže být ani poctivec (jinak by choť byl(a) padouch), takže jsou oba normální (a oba lžou).

45. U téhle hádanky je odpověď stejná. (Tentokrát však oba mluví pravdu.)

46. Uvidíte, že všichni čtyři jsou normální, a že všechny tři výroky jsou lži.

Především musí být normální paní *B*. Kdyby byla poctivec, její muž by byl padouch, a ona by nelhala a neříkala, že její muž je poctivec. Kdyby byla padouch, její muž by byl poctivec, jenomže pak by o tom nemluvila pravdu. Tak-

že paní *B* je normální, a tak i pan *B* je normální. To znamená, že pan *A* i paní *A* lhali. Takže pan *A* (ani paní) není poctivec, a tedy ani padouch, jsou oba normální.



Rozluštění

47. Lev může říci „Včera jsem lhal“ pouze v pondělí a ve čtvrtek. Jednorozec může říci „Včera jsem lhal“ jedině ve čtvrtek a v neděli. Oba současně to mohou říci jedině ve čtvrtek.

48. Z prvního Lvova výroku vyplývá, že je pondělí nebo čtvrtek. Z druhého výroku vyplývá, že čtvrtek není. Je tedy pondělí.

49. Nejde to ani jeden den v týdnu! Jedině v pondělí a ve čtvrtek by mohl pronést první výrok; jedině ve středu a v neděli by mohl pronést druhý. Takže oba zároveň nemůže nikdy pronést.

50. Tady jde o situaci úplně odlišnou. Výborně to ukazuje rozdíl mezi tím, když proneseme dva jednotlivé výroky, a když proneseme jeden výrok, který je jejich konjunkcí. Mějme dva výroky X a Y. Jestliže jejich **konjunkce**, tj. výrok „X a Y“, je pravdivá, samozřejmě z toho vyplývá, že oba výroky X, Y jsou pravdivé i jednotlivě. Pokud však konjunkce „X a Y“ je nepravdivá, pak z toho vyplývá jen to, že aspoň jeden z obou výroků je nepravdivý — nemusí být nepravdivé oba.

Jediný den v týdnu, kdy je pravda, že Lev včera lhal a zítra bude lhát zase, je úterý (to je totiž jediný den, který padne mezi dva Lvovy lhací dny). Takže den, kdy Lev vyslovil tenhle výrok, nemohlo být úterý, protože v úterý by takový výrok sice byl pravdivý, ale Lev v úterý pravdivé výroky nevyslovuje. Takže to v úterý nebylo, a tak Lvův výrok je nepravdivý. Lev lže. Dnem, po němž se Alenka pídí, je pondělí nebo středa.

51. Jestliže je první výrok pravdivý, pak první z bratrů je Tydliták, takže druhý je Tydlítek a druhý výrok je také pravdivý. Jestliže je první výrok nepravdivý, pak první z bratrů je Tydlítek a druhý je Tydliták, a druhý výrok je

rovněž nepravdivý. Takže buď jsou oba výroky pravdivé, nebo jsou oba nepravdivé. Oba být nepravdivé nemohou, poněvadž bratři nikdy nelžou oba v týž den. Oba výroky jsou tedy pravdivé. První z bratrů je Tydliták, druhý je Tydlítek a Alenka je potkala v neděli.

52. A tohleto je kvítí z úplně jiné zahrádky! Výrok druhého z bratrů je určitě pravdivý. Nu a my víme, že je jiný den v týdnu než u předchozí hádanky, tj. není neděle. Takže tady nemohou být oba výroky pravdivé, první tedy musí být nepravdivý. První z bratrů je Tydlítek a druhý je Tydliták.

53. První odpověď je zřejmě lživá, příhoda se tedy neudála v neděli. Takže druhý odpověděl pravdivě a řekl „Ne“.

54. Výrok (2) prvního z bratrů je evidentně nepravdivý, a tak jeho výrok (1) je také nepravdivý (bratr ho pronesl v týž den). Takže první z bratrů nelže v sobotu, tedy druhý v sobotu lže. Druhý z bratrů mluví právě pravdu (první z bratrů právě lže), takže je pondělí, úterý nebo středa. Jediným dnem, kdy je pravda, že bude zítra lhát, je středa. Takže byla středa.

55. Jeho výrok je zřejmě nepravdivý (kdyby byl pravdivý, pak by bratr toho dne lhal, což si protiřečí). Takže alespoň jeden z výroků „Dneska lžu“ a „Jsem Tydlítek“ je nepravdivý. První výrok („Dneska lžu“) je pravdivý, a tak druhý výrok je nepravdivý. Je to tedy Tydliták.

56. Dá. Kdyby ten den lhal, pak první výrok v disjunkci by byl pravdivý, a tak by bylo pravdivé celé prohlášení, což je rozpor. Ten den tedy mluvil pravdu a jeho prohlášení je pravdivé: Ten den lže, nebo je Tydlítek. A protože ten den nelže, je to Tydlítek.

57. Oba výroky jsou zjevně pravdivé, takže je neděle. Kdo je kdo, se určitě nedá.

58. Především v neděli není možné, aby bratři lhali a říkali, že není neděle. Takže nemůže být neděle. První z bratrů tedy mluví pravdu, a druhý (není neděle) lže. Druhý říká, že je pondělí, ale lže, takže není pondělí.

Druhý z bratrů lže, i když říká, že Lev včera lhal, takže včera měl Lev jeden ze svých pravdomluvných dnů. To znamená, že včera byl čtvrtek, pátek, sobota nebo neděle a dnes je pátek, sobota, neděle nebo pondělí. Už jsme vyloučili neděli a pondělí, takže musí být pátek nebo sobota.

A nyní přihlédněme k tomu, že zítra je jeden z Tydlitkových lhacích dnů (první z bratrů, který právě mluví pravdu, to přece řekl). Takže dnes nemůže být sobota, a je pátek.

Z toho dále plyne, že Tydlitek lže v sobotu, jako Jednorozec. A první z bratrů dneska mluví pravdu, a dnes je pátek, takže je to Tydliták. Všechny záhady jsou objasněny.

59. Předpokládejme, že první z bratrů mluví pravdu. Pak řehtačka patří Tydlitkovi. Autor druhé odpovědi lže (není neděle), takže to není Tydlitek, ale Tydliták. Autorem první odpovědi je Tydlitek a měl dostat řehtačku.

Předpokládejme, že první z bratrů lže. Pak řehtačka patří Tydlitákovi. V tom případě druhý z bratrů mluví pravdu a je tedy skutečně Tydlitek. Potom je majitelem řehtačky opět první z bratrů. Takže ať tak nebo onak, řehtačka patří autorovi první odpovědi.

60. Pravděpodobnost je tu nulová. Předpokládejme, že výrok je pravdivý. Potom majitel řehtačky lže, a tak to nemůže být ten, co s Alenkou mluví. Předpokládejme, že jeho výrok je nepravdivý. Pak majitel řehtačky mluví pravdu, a tak ani v tomto případě to nemůže být ten, co s ní mluví.

61. Valihrach měl pravdu. Předpokládejme, že ten, co s Alenkou mluví, lže. To znamená, že majitel řehtačky lže, tedy majitelem je ten, co s Alenkou mluví. Předpokládejme, že ten, co s Alenkou mluví, mluví pravdu. Potom majitel řehtačky mluví pravdu. Jestliže není neděle, pak musí

být majitelem řehtačky autor odpovědi, pokud je ale neděle, pak mluví pravdu oba bratři a kterýkoli může být majitelem.

Když to shrneme, pokud není neděle, majitelem řehtačky je nesporně autor odpovědi. Pokud je neděle, jsou možnosti vyrovnané. Takže pravděpodobnost, že Alenka mluvila s vlastníkem řehtačky, je šest a půl k sedmi, neboli třináct ke čtrnácti.

62. Klíč je v tom, že Alenka zjistila, kterému z bratrů ji má dát. Kdyby druhý řekl „Ano“, pak jeden z nich by mluvil pravdu a druhý lhal, a tak by Alenka nemohla zjistit, kdo je majitelem. Jenomže já jsem vám už prozradil, že Alenka to zjistila, takže druhý neodpověděl „Ano“. Tak tedy buď oba bratři lhali, nebo oba mluvili pravdu. To znamená, že oba mluvili pravdu, a byla neděle. A tak Alenka řehtačku odevzdala tomu prvnímu.

63. Tydlitík existuje a Alenka mluvila právě s ním.

Ten, co s Alenkou mluvil, tvrdil, že pravdivé jsou oba tyto výroky:

(1) Je to Tydliták nebo Tydlitek.

(2) Dnes lže.

Kdyby výpověď byla pravdivá, pak by byly pravdivé oba výroky (1) i (2), a tak by byl pravdivý výrok (2), což by byl rozpor. Takže jeho výpověď je nepravdivá, tedy výroky (1) a (2) nemohou být oba pravdivé. Přitom výrok (2) pravdivý je (to, co dotazovaný právě tvrdí, není pravda), nepravdivý je tedy výrok (1). Takže to není Tydliták ani Tydlitek a musí to být Tydlitík.

64. První nemůže být Tydlitík (Tydlitík lže pořád), je to tedy Tydliták nebo Tydlitek, a právě lže. Takže druhý také lže. Kdyby ten druhý byl Tydliták nebo Tydlitek, potom by Tydliták a Tydlitek lhali v týž den, což není možné. Takže ten druhý je Tydlitík.

65. Tahleta verze je jasně nemožná.

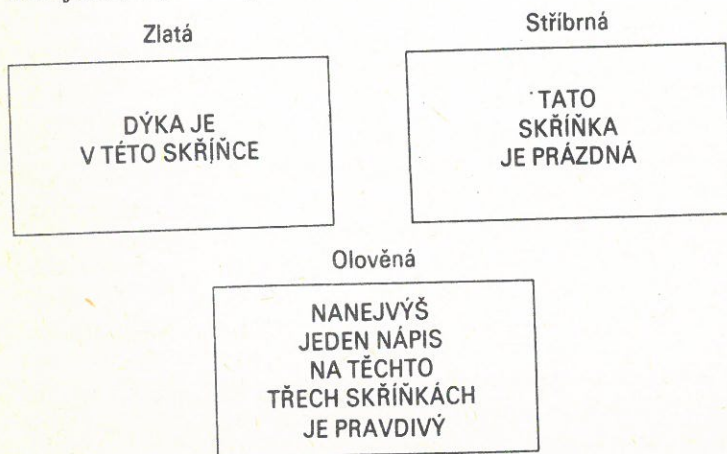
na zlaté skříňce je nepravdivý. Takže podobizna musí být ve zlaté skříňce.

A tak nápadník vítězoslavně vyhrkl: „Podobizna je ve zlaté skříňce!“ a odklopil víko. Jaký byl jeho úlek, když zlatá skříňka byla prázdná! Nápadník dočista zkoprněl a vykřikl, že ho Porcie podvedla. „K podvodům bych se nikdy nesnížila,“ rozesmála se Porcie a pohrdavě otevřela stříbrnou skříňku. A nastojte, podobizna byla v ní!

Ale kde proboha udělal nápadník chybu ve své úvaze?

„Tak, tak,“ řekla Porcie, a bylo na ní vidět, jak tu situaci vychutnává, „úvaha se vám moc nepovedla, že? Ovšem jste docela přitažlivý mladík, a tak vám dám ještě jednu příležitost. Vlastně bych to dělat neměla, ale že jste to vy! Dobrá, zapomenu na tu zkoušku a dám vám něco jednoduššího. Teď budete mít šanci získat mě dvě ku třem, a ne jen jedna ku dvěma. Bude to skoro jako jedna ze zkoušek, kterou si vymyslela moje dávná předchůdkyně Porcie III. Teď ale už byste měl obstát!“

To řekla a odvedla nápadníka do vedlejšího pokoje, kde byly tři skříňky — zlatá, stříbrná a olověná. Porcie mu řekla, že v jedné ze skříněk je dýka a ostatní dvě že jsou prázdné. Aby nápadník získal Porciinu ruku, stačí, aby vybral jednu z prázdných. Na skříňkách byly nápisy:



(Srovnejte tuhle hádanku s první zkouškou Porcie III. Nezdá se vám, že je úplně stejná?)

Tentokrát nápadník uvažoval velice obezřetně. Předpokládejme, že výrok (3) je pravdivý. Potom oba ostatní výroky musí být nepravdivé, takže výrok (2) je nepravdivý, dýka je tedy potom ve stříbrné skříňce. Na druhé straně pokud je (3) nepravdivý, pak tu musí být přinejmenším dva pravdivé výroky, jedním z nich je nutně (1), a v tomto případě je tedy dýka ve zlaté skříňce. V obou případech je olověná skříňka prázdná.

A tak tedy si nápadník vybral olověnou skříňku, otevřel ji, a jaká hrůza, byla v ní dýka! S úsměvem na rtech otevřela Porcie ostatní dvě skříňky, a ty byly prázdné.

Čtenář se jistě zaraduje, když se dozví, že Porcie si nápadníka přesto vzala. (Rozhodla se tak totiž už dávno před zkouškami a přiměla ho, aby je podstoupil, jenom proto, aby ho trochu poškádlila.) Jenže zbývá ještě odpovědět na otázku: Kde nápadník udělal chybu?

Rozluštění

67 a. Výroky na zlaté a olověné skříňce tvrdí opak, takže jeden z nich musí být pravdivý. Poněvadž nanejvýš jeden ze tří výroků je pravdivý, výrok na stříbrné skříňce musí být nepravdivý, a podobizna je tedy ve stříbrné skříňce.

Hádanka se dá řešit i jinak. Kdyby podobizna byla ve zlaté skříňce, měli bychom dva pravdivé výroky (na zlaté a stříbrné skříňce), což je v rozporu s danými podmínkami. Kdyby byla podobizna v olověné skříňce, zase bychom měli dva pravdivé výroky (tentokrát na olověné a na stříbrné skříňce). Takže podobizna musí být ve stříbrné skříňce.

Oba postupy řešení jsou správné, a to ukazuje, že u mnoha úloh může existovat více správných cest vedoucích ke stejným závěrům.

67 b. Kdyby podobizna byla v olovené skříňce, pak by všechny tři výroky byly pravdivé, a to by odporovalo daným podmínkám. Kdyby podobizna byla ve stříbrné skříňce, pak by všechny tři výroky byly nepravdivé, což by opět bylo v rozporu s danými podmínkami. Takže podobizna musí být ve zlaté skříňce. (Pak jsou první dva výroky pravdivé a třetí nepravdivý, což je ve shodě s danými podmínkami.)

68 a. Můžeme rovnou vyloučit olovenou skříňku, poněvadž kdyby podobizna byla v ní, pak by výroky na olovené skříňce byly oba nepravdivé. Podobizna je tedy ve zlaté nebo ve stříbrné skříňce. První výroky na zlaté a stříbrné skříňce tvrdí totéž, tedy jsou buď oba pravdivé, nebo oba nepravdivé. Kdyby byly oba nepravdivé, pak druhé výroky by byly oba pravdivé — jenomže to být nemohou, poněvadž si navzájem odporují. Takže první výroky jsou oba pravdivé a podobizna není ani ve zlaté skříňce. Je tedy ve stříbrné skříňce.

68 b. Jestliže je podobizna ve zlaté skříňce, potom na zlatém i na stříbrném víku jsou oba výroky nepravdivé. Jestliže je ve stříbrné skříňce, pak na stříbrném i oloveném víku je vždy jeden výrok pravdivý a jeden nepravdivý. Podobizna je tedy v olovené skříňce. (Na stříbrném víku jsou pak oba výroky pravdivé, na oloveném oba nepravdivé a na zlatém je jeden pravdivý a jeden nepravdivý).

69 a. Předpokládejme, že olovenou skříňku zhotovil Bellini. Potom je výrok na ní pravdivý, takže ostatní skříňky musel zhotovit Cellini. To znamená, že oba zbývající výroky jsou nepravdivé, tedy výrok na stříbrné skříňce je nepravdivý a dýka je ve stříbrné skříňce. Takže pokud je olovená skříňka dílem Belliniho, pak dýka je ukryta ve stříbrné skříňce.

A nyní předpokládejme, že olovenou skříňku zhotovil Cellini. Pak je výrok na ní nepravdivý, a tedy Bellini zhotovil alespoň dvě skříňky. To znamená, že zlatá i stříbrná skříňka jsou dílem Belliniho (olovenou podle našeho před-

pokladu zhotovil Cellini). Výroky na zlaté i na stříbrné skříňce jsou tedy pravdivé. Výrok na zlaté skříňce je pravdivý, a v tomto případě je tedy dýka ve zlaté skříňce.

Při první ani při druhé eventualitě dýka není v olovené skříňce, měl tedy nápadník vybrat olovenou skříňku.

69 b. Jestliže stříbrná skříňka je dílem Belliniho, pak výrok na ní je pravdivý, a v tom případě zlatou zhotovil Cellini. Předpokládejme, že stříbrná skříňka je dílem Celliniho. V tomto případě není pravda, že Bellini zhotovil právě jednu ze skříňek. To znamená, že zlatá je také dílem Celliniho (kdyby byla dílem Belliniho, pak by Bellini zhotovil právě jednu). Takže ať už stříbrnou zhotovil Bellini nebo Cellini, zlatá je určitě dílem Celliniho. Výrok na zlaté skříňce je proto nepravdivý, a tedy je podobizna ve zlaté skříňce.

69 c. Nejprve doložíme, že olovená skříňka musí být dílem Belliniho. Předpokládejme, že by byla dílem Celliniho. Pak by výrok na ní byl nepravdivý, což by znamenalo, že by alespoň dvě musely být dílem Belliniho, a to by musela být skříňka stříbrná a zlatá. To není možné, podobizna přece nemůže být zároveň ve stříbrné i ve zlaté skříňce. Proto olovená skříňka je ve skutečnosti dílem Belliniho. Takže výrok na ní je pravdivý a aspoň dvě ze skříňek jsou dílem Celliniho. To znamená, že Cellini zhotovil zlatou a stříbrnou. Výroky na obou těchto skříňkách jsou tedy nepravdivé a podobizna není ve zlaté ani ve stříbrné skříňce. Tedy je v olovené skříňce.

Zároveň jsme dokázali, že olovená skříňka je dílem Belliniho a ostatní dvě zhotovil Cellini, což odpovídá na druhou otázku.

70. Nápadník si měl uvědomit, že když nemá žádné informace o pravdivosti a nepravdivosti nápisů, ani o vzájemném vztahu jejich pravdivosti, pak mohou nápisy tvrdit cokoli a dotyčný předmět (podobizna nebo dýka) může být kdekoliv. Přece mohu klidně vzít skříňek, kolik mě napadne, vložit do kterékoliv z nich to nebo ono a pak napsat

124. Jak jsem zbohatl.

Tenhle příběh naneštěstí není pravdivý. Ale je to krásná představa, a tak vám ho budu vyprávět.

Pátral jsem na třech nedaleko od sebe ležících ostrovech A, B a C. Věděl jsem, že aspoň na jednom z nich je zakopán poklad, jenomže jsem nevěděl, na kterém. Ostrovy B a C byly neobydlené. Na ostrově A žili poctivci a padouši, a bylo docela možné, že jsou tam i normální lidé, jenže jsou-li tam opravdu, to jsem nevěděl.

Dopuštěním Štěstěny se mi dostala do rukou mapa souostroví, kterou po sobě zanechal proslulý kapitán Marston, pirát, který poklad zakopal. Zpráva připsaná na mapě byla samozřejmě zašifrovaná. Když se mi ji podařilo rozšifrovat, ukázalo se, že se skládá ze dvou vět:

(1) Na ostrově A poklad není.

(2) Jestliže je na ostrově A někdo normální, tak jsou poklady na dvou ostrovech.

To víte, uháněl jsem na ostrov A, seč mi síly stačily; bylo mi zřejmé, že domorodci budou vědět, jak to s pokladem je. Vládce ostrova se dovtípil, o co mi jde, a řekl mi zcela jednoznačně, že se mi povoluje položit jedinou otázku obyvateli ostrova, kterého si vyberu. A že se nedozvím, je-li dotyčný domorodec poctivec, padouch nebo normální.

Musel jsem si tedy vymyslet takovou otázku, abych z odpovědi poznal, na kterém ostrově je poklad.

Jakou otázku jsem měl položit?

125. Jednou jsem zavítal na jiný ostrov poctivců, padouchů a normálních lidí. Roznesla se totiž zvěst, že na ostrově je poklad, a chtěl jsem zjistit, je-li tomu tak. Vládce ostrova, byl to poctivec, mi ráčil představit tři domorodce, A, B a C, a milostivě mi prozradil, že nanejvýš jeden z nich je normální. Směl jsem jim položit dvě otázky, každou jednomu z nich, aby odpověď na ně byla buď „Ano“, nebo „Ne“. Dá se dvěma otázkami zjistit, je-li na ostrově poklad?

126. Máte dobrý úsudek?

Vedle sebe jsou dva ostrovy a na každém z nich žijí jen poctivci a padouši (tedy nejsou na nich normální lidé). Víte, že na jednom z těch dvou ostrovů je sudý počet poctivců a na druhém je lichý počet poctivců. Dále je vám známo, že na ostrově se sudým počtem poctivců je poklad, a na druhém není. Vyberete si namátkou jeden z ostrovů a vydáte se tam. Všichni, kdo na něm žijí, vědí, kolik je tam poctivců a kolik padouchů. Vyptáte se tří obyvatel ostrova, A, B a C, a ti prohlásí:

A: Na tomhle ostrově je sudý počet padouchů.

B: Právě teď je na ostrově lichý počet lidí.

C: Já jsem poctivec, právě když A a B mají stejnou povahu.

Dejme tomu, že nejste poctivec ani padouch a že v té chvíli jste jediným návštěvníkem na ostrově. Je na ostrově poklad, nebo není?

Rozluštění

109—112. Všechny hádanky jsou založeny na stejné základní myšlence. Máme výrok P . Jestliže obyvatel A ostrova poctivců a padouchů řekne: „Pokud jsem poctivec, pak P ,“ tak je A zaručeně poctivec a P musí být pravdivý! To je na první pohled možná překvapivé, ale můžeme to dokázat, dokonce dvěma způsoby.

1. způsob: Ukažme, že výrok pronesený A je pravdivý. Podle vlastnosti 4 implikace k tomu stačí z platnosti výroku „ A je poctivec“ odvodit platnost výroku P . Předpokládejme tedy, že A je poctivec. Potom jeho výrok „Pokud je A poctivec, pak P “ je pravdivý. A je tedy poctivec a je pravda, že pokud je A poctivec, pak P . Z těchto dvou faktů vyplývá, že P je pravdivý. Dokázali jsme, že pokud A je poctivec, pak P . A právě to A tvrdil! Je tedy poctivec. A protože jsme dokázali, že pokud je A poctivec, pak P , je P pravdivý.

2. způsob: Připomeňme si, že z nepravdivého tvrzení ply-

ne jakékoliv tvrzení. Kdyby A nebyl poctivec, tak výrok „Pokud je A poctivec, pak P“ by byl pravdivý. Avšak padouch by tento pravdivý výrok nikdy nepronesl. Jestliže tedy člověk, který je buď poctivec, nebo padouch, pronesl tento výrok, musí to být poctivec a P musí být pravdivý.

Využijme tento princip k řešení našich hádanek. Pokud jde o 109, když za P vezmeme tvrzení, že B je poctivec, vidíme, že A musí být poctivec a jeho výrok je pravdivý, takže B je poctivec. Odpověď u 109 tedy je, že A i B jsou poctivci.

U 110 vezmeme za P tvrzení, že A sní svůj klobouk. Vidíme, že A musí být poctivec, a že tedy musí sníst svůj klobouk. (Což mimochodem ukazuje, že poctivci, ačkoliv není pochyb, že jsou to lidé šlechetní a čestní, mohou být občas i pořádní hlupáci!) Pokud jde o 111, A je poctivec.

U 112 docházíme k závěru, že autor zase tahá čtenáře za nos. Hádanka je rozporná — takový výrok nemůže pronést poctivec ani padouch.

113. A je poctivec a B je padouch. Abychom to dokázali, nejprve ukážeme, že jedině poctivec může pronést výrok typu „Pokud P, tak jsem padouch“. Jistě si vzpomínáte, že pravdivé tvrzení plyne z jakéhokoliv tvrzení. Jestliže je tedy výrok „Já jsem padouch“ pravdivý, pak je pravdivý i celý výrok „Pokud P, tak jsem padouch“. Jenomže jsem-li padouch, nemohu nikdy pronést tento pravdivý výrok. Takže když řeknu „Pokud P, tak jsem padouch“, jsem zaručeně poctivec.

A je tedy poctivec a je pravda, že pokud je B poctivec, tak A je padouch (říká to poctivec A). Potom B nemůže být poctivec, protože z toho by vyplývalo, že A je padouch, což není.*) Takže B je padouch.

*) Každé tvrzení, ze kterého plyne nepravdivé tvrzení, je nepravdivé, neboť z pravdivého tvrzení nemůže plynout nepravdivé tvrzení. V uvedeném případě z tvrzení, že B je poctivec, plyne nepravdivé tvrzení, že A je padouch, takže není pravda, že B je poctivec. To je další příklad důkazu sporem.

114. A vlastně říká, že tomu není tak, že by X byl vinen a Y nevinen. To je pouze jiný způsob, jak vyjádřit, že buď je X nevinen, nebo Y je vinen. A a B tedy ve skutečnosti říkají totéž, jen každý jinými slovy. Výroky jsou buď oba pravdivé, nebo oba nepravdivé, A i B tedy mají stejnou povahu.

115. Předpokládejme, že A je poctivec. Potom je poctivec i B (A říká, že je). Výrok, který pronesl B, „Pokud je A poctivec, pak je poctivec i C“, je pravdivý. A je poctivec (podle našeho předpokladu), takže C je poctivec (za předpokladu, že A je poctivec).

Právě jsme doložili, že pokud A je poctivec, pak je jím i C.*) Nu a B přesně tohle řekl, a tak B je poctivec. Potom výrok A, že B je poctivec, je pravdivý. A je tedy rovněž poctivec. Už jsme dokázali, že pokud A je poctivec, je jím i C. Takže C je také poctivec. A všichni tři jsou poctivci.

116. Nevyplývá z nich, že miluji Bětku, a vyplývá z nich, že miluji Janu. Abychom si dokázali, že miluji Janu, uvažujme takto:

Buď miluji Bětku, nebo ji nemiluji. Pokud nemiluji Bětku, pak podle podmínky (1) miluji Janu (je dáno, že miluji alespoň jednu z nich). Na druhé straně pokud miluji Bětku, pak podle podmínky (2) miluji i Janu. Takže ať už miluji Bětku nebo ne, miluji Janu.

Čtenářky, které se jmenují Bětky, nemusí truchlit. I když z daných podmínek nevyplývá, že miluji Bětku, ještě to neznamená, že z nich vyplývá, že Bětku nemiluji. Je docela dobře možné, že miluji Bětku taky — možná ještě víc než Janu.

117. Tentokrát z daných okolností nevyplývá, že miluji Janu, ale že miluji Bětku. Předpokládejme, že nemiluji Bětku. Potom výrok „Pokud miluji Bětku, pak taky miluji

*) Vyšli jsme z předpokladu, že A je poctivec, a vyvodili z něho závěr, že C je poctivec. Podle vlastnosti 4 implikace z toho vyplývá, že pokud A je poctivec, pak C je poctivec.

Janu“ je pravdivý (z nepravdivého tvrzení plyne jakékoliv tvrzení). Je však dáno, že jestliže zmíněný výrok je pravdivý, tak Bětku miluji. Takže pokud nemiluji Bětku, vyplývá z toho, že Bětku miluji, což si protirečí. Jediný způsob, jak vybědnout z rozporu, je, že Bětku miluji.

Nedá se zjistit, miluji-li Janu nebo ne.

118. Z daných podmínek vyplývá, že miluji obě dívky. Řekněme, že P je výrok „Pokud miluji Evu, miluji i Markétu“. Máme dáno:

(1) Jestliže je P pravdivý, miluji Evu.

(2) Jestliže miluji Evu, P je pravdivý.

V rozluštění předchozí hádanky jsme viděli, že z (1) vyplývá, že miluji Evu. Takže miluji Evu a podle (2) je P pravdivý. Tedy je pravda, že pokud miluji Evu, miluji také Markétu. A já Evu miluji, takže miluji také Markétu.

119. Miluji všechny tři dívky. Můžeme to dokázat několika způsoby, uvedeme jen jeden.

Podle (3) buď miluji Danu i Marii, nebo nemiluji jednu ani druhou. Předpokládejme, že nemiluji Danu ani Marii. Potom podle (1) miluji Ivu. Takže miluji Ivu, ale ne Danu, a přitom nemiluji Marii. To je v rozporu s výrokem (2). Takže to není tak, že nemiluji ani Danu, ani Marii, ale že je miluji obě. Protože miluji Danu, podle (4) miluji rovněž Ivu. Miluji tedy všechny tři.

120. Jsem poctivec. Kdybych byl padouch, pak (1) i (2) by byly nepravdivé. Předpokládejme, že (2) je nepravdivý. Potom bych miloval Lindu, ale ne Katku. Takže bych miloval Lindu a (1) by byl pravdivý. Není tedy možné, aby (1) i (2) byly nepravdivé, takže nemohu být padouch, za kterého mě Lindina matka považuje od té doby, co mě viděla s Katkou.

121. Řekneme-li „ P neplatí, ledaže by platil Q “, je to jen jiné vyjádření výroku „Pokud P , pak Q “. (Např. řekneme-li „Nepůjdu do kina, ledaže bys šla se mnou“, je to totéž jako

„Pokud půjdu do kina, pak půjdeš se mnou.“) Výrok „Pes, který štěká, nekouše, ledaže by štěkal“ je jiným způsobem vyjádřený výrok „Pokud pes, který štěká, kouše, pak štěká“. To je samozřejmě pravda — pes, který štěká, vždycky štěká, ať už kouše, nebo ne.

122. Nedá se určit, je-li A poctivec nebo padouch, nicméně na ostrově musí být poklad.

Řešení téhle a dalších hádanek je založeno na obecném principu: Pokud mluvčí (který je buď poctivec, nebo padouch) pronese výrok „Jsem poctivec, právě když P “, pak P je pravdivý (bez ohledu na to, je-li mluvčí poctivec nebo padouch).

Abychom si to dokázali, označme si jako K tvrzení, že mluvčí je poctivec. Mluvčí říká, že K je ekvivalentní P . Předpokládejme, že mluvčí je skutečně poctivec. Pak K je opravdu ekvivalentní P , a přitom K je pravdivý výrok. A tak P je ekvivalentní pravdivému výroku, takže P je pravdivý. Naopak předpokládejme, že mluvčí je padouch. Potom jeho výrok je nepravdivý, P tedy není ekvivalentní K . Protože mluvčí je padouch, je K nepravdivý. Takže P není ekvivalentní nepravdivému tvrzení K , a tedy P je pravdivý (kdyby byl nepravdivý, pak by byl ekvivalentní K). Ať už je mluvčí poctivec nebo padouch, P je tedy vždy pravdivý.

Je poučné srovnat tento princip s principem, na němž bylo založeno řešení hádanek 109–112: Jestliže poctivec nebo padouch řekne: „Pokud jsem poctivec, pak P “, vyplývá z toho, že je poctivec a že P je pravdivý. Ale když poctivec nebo padouch řekne: „Jsem poctivec, právě když P “, vyplývá z toho jen to, že P je pravdivý, ale nedá se určit, je-li mluvčí poctivec, nebo padouch.

123. Dozvěděl byste se, že na ostrově poklad není.

Označme si jako G tvrzení, že na ostrově je poklad, a jako K tvrzení, že mluvčí je poctivec. Když mluvčí odpoví „Ne“, ujišťuje vás, že G není ekvivalentní K . Předpokládejme, že mluvčí je poctivec. Pak je tomu opravdu tak, že G