Kvantová mechanika I a II

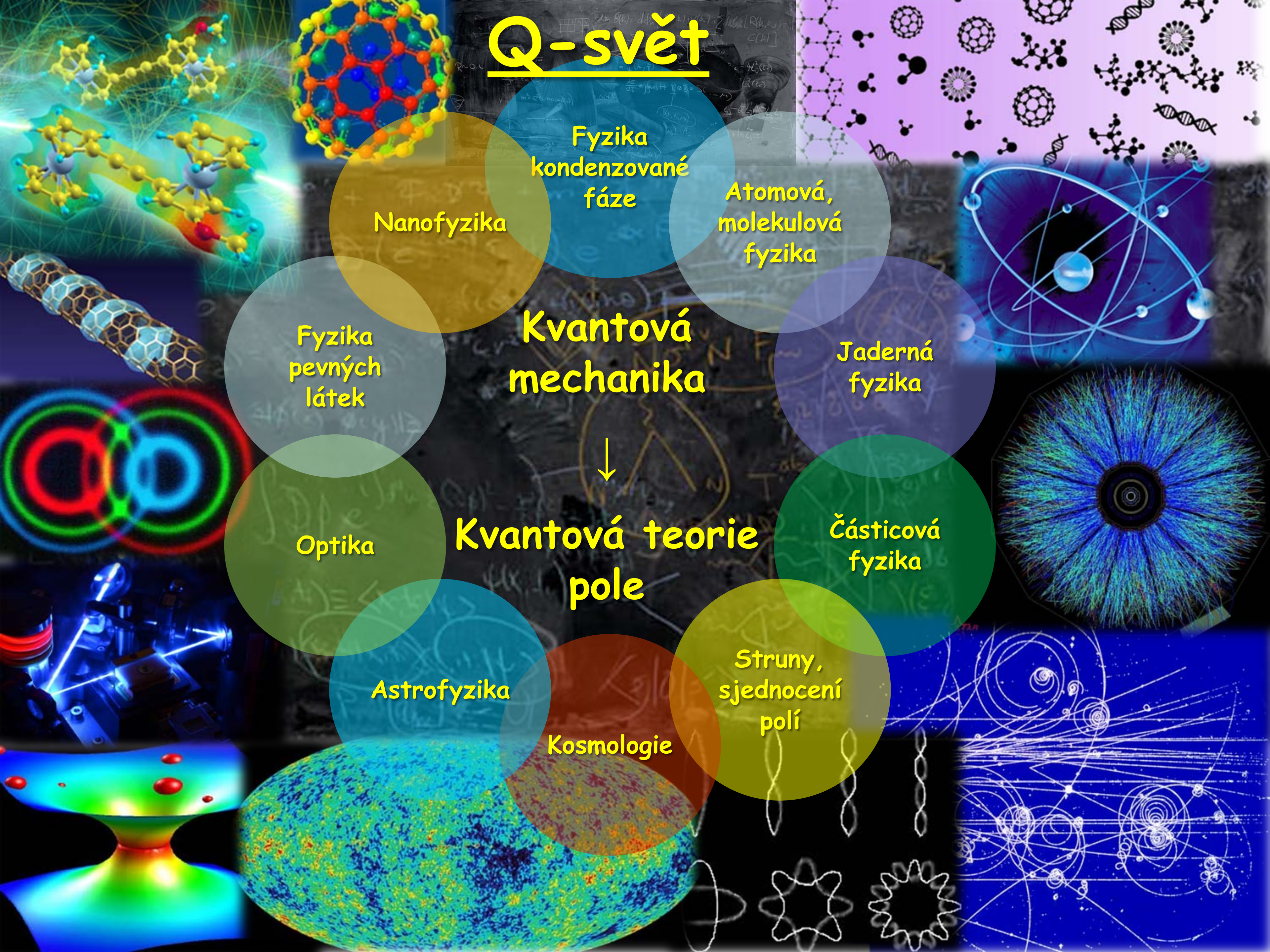
JSF094
Akademický rok 2017-2018

Čas a místo	Úterý	13:10-14:40	posluchárna ÚČJF3/945
	Středa	10:40-12:10 cvičení	
	Čtvrtek	10:40-12:10	

Přednášející prof. **Pavel Cejnar** ÚČJF
místnost: A934
telefon: 95155 2472
email: **cejnar @ ipnp.troja.mff.cuni.cz**

Cvičící dr. **Pavel Stránský** ÚČJF
místnost: A931
telefon: 95155 2470
email: **stransky @ ipnp.troja.mff.cuni.cz**

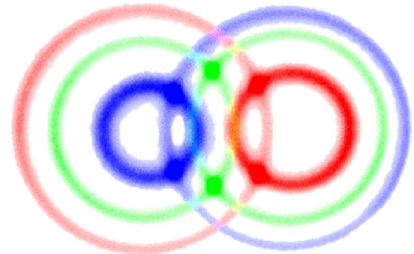
Konzultace dle individuální domluvy


Q-svět
Fyzika kondenzované fáze
Atomová, molekulová fyzika
Jaderná fyzika
Částicová fyzika
Struny, sjednocení polí
Kosmologie
Astrofyzika
Optika
Fyzika pevných látek
Nanofyzika
Kvantová mechanika
↓
Kvantová teorie pole

Stručný program pro 2 semestry

Zimní semestr:

Provázané kapitoly:
Formalismus kvantové teorie ... **teorie**
Jednoduché kvantové systémy ... **příklady**

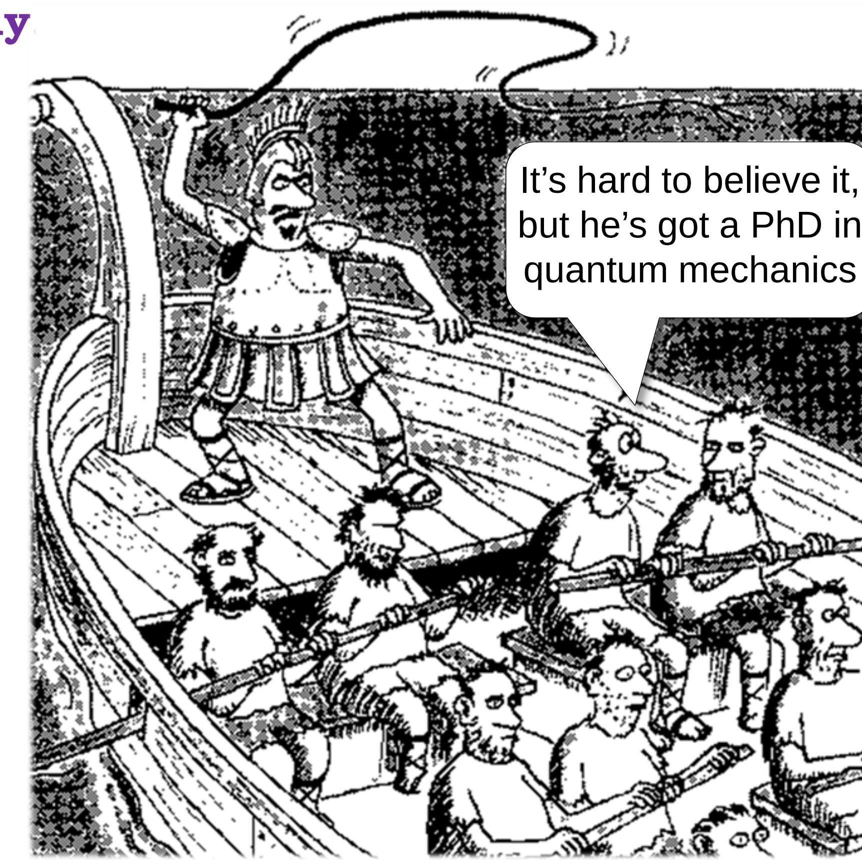


Hilbertův prostor stavů. Pozorovatelné a operátory. Systémy pozorovatelných. Transformace a symetrie. Kvantové evoluční rovnice. Klasická limita. Měření. Čisté a smíšené stavy, otevřené systémy

Letní semestr:

Základní látka:
- **Přibližné metody**
- **Srážky částic**
- **Mnohočásticové systémy**

Doplňující látka:
- **Aplikace přibližných metod**
- **Mnohočásticové techniky**
- **Nelokalita, provázanost, důsledky…**
- **Klasická korespondence**
- **Kvantová statistická fyzika**

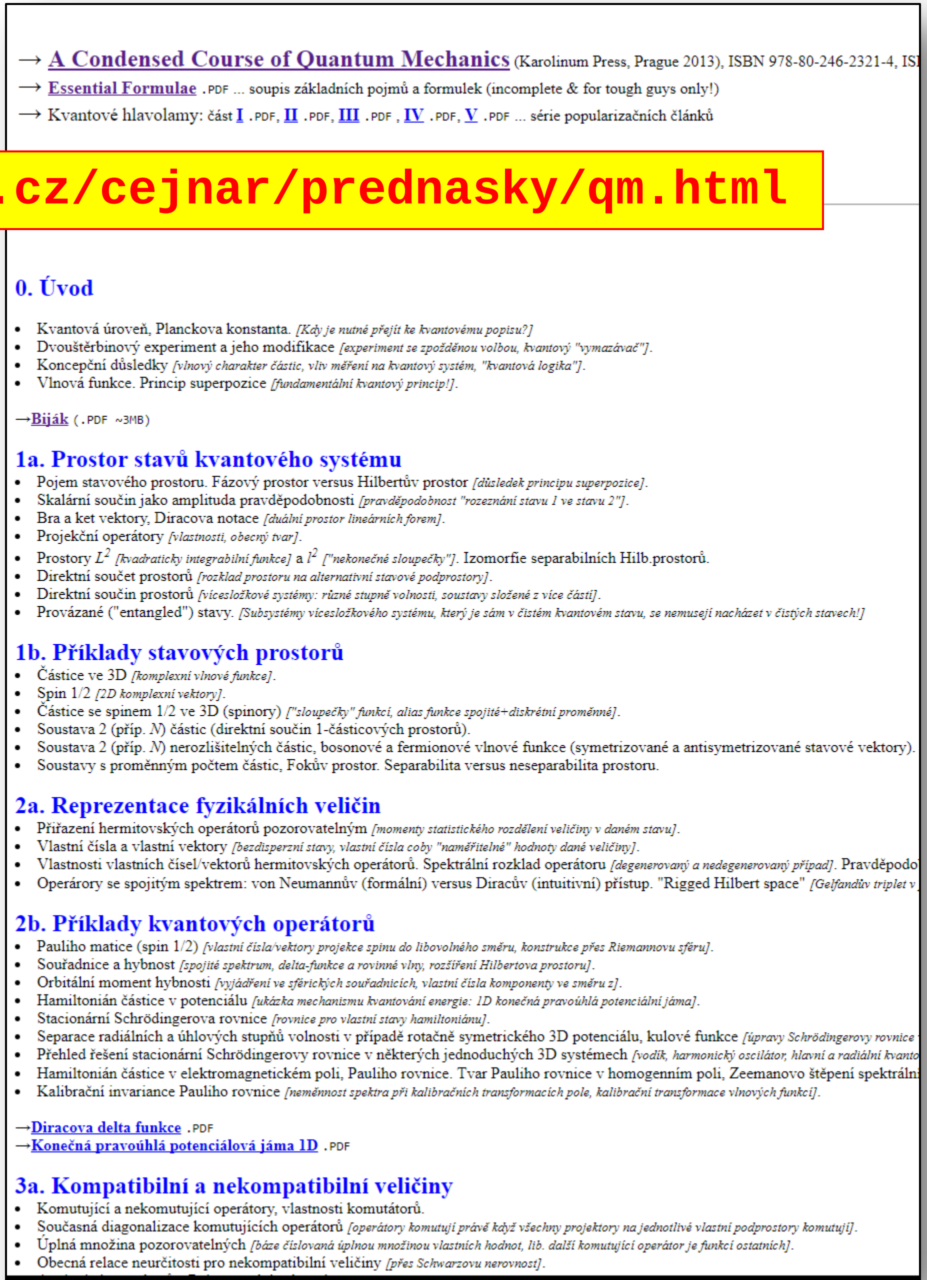


Stránka přednášky

http://www-ucjf.troja.mff.cuni.cz/cejnar/prednasky/qm.html

Podrobný, průběžně aktualizovaný sylabus přednášky

Tato prezentace
a několik dalších



→ A Condensed Course of Quantum Mechanics (Karolinum Press, Prague 2013), ISBN 978-80-246-2321-4, ISI
→ Essential Formulae .PDF ... soupis základních pojmů a formulek (incomplete & for tough guys only!)
→ Kvantové hlavolamy: část I .PDF, II .PDF, III .PDF , IV .PDF, V .PDF ... série popularizačních článků

0. Úvod

- Kvantová úroveň, Planckova konstanta. *[Kdy je nutné přejít ke kvantovému popisu?]*
- Dvouštěrbinový experiment a jeho modifikace *[experiment se zpožděnou volbou, kvantový "vymazávač"]*.
- Koncepční důsledky *[vlnový charakter částic, vliv měření na kvantový systém, "kvantová logika"]*.
- Vlnová funkce. Princip superpozice *[fundamentální kvantový princip!]*.

→Biják (.PDF ~3MB)

1a. Prostor stavů kvantového systému

- Pojem stavového prostoru. Fázový prostor versus Hilbertův prostor *[důsledek principu superpozice]*.
- Skalární součin jako amplituda pravděpodobnosti *[pravděpodobnost "rozeznání stavu 1 ve stavu 2"]*.
- Bra a ket vektory, Diracova notace *[duální prostor lineárních forem]*.
- Projekční operátory *[vlastnosti, obecný tvar]*.
- Prostory L^2 *[kvadraticky integrabilní funkce]* a l^2 *["nekonečné sloupečky"]*. Izomorfie separabilních Hilb.prostorů.
- Direktní součet prostorů *[rozklad prostoru na alternativní stavové podprostory]*.
- Direktní součin prostorů *[vícesložkové systémy: různé stupně volnosti, soustavy složené z více částí]*.
- Provázané ("entangled") stavy. *[Subsystémy vícesložkového systému, který je sám v čistém kvantovém stavu, se nemusejí nacházet v čistých stavech!]*

1b. Příklady stavových prostorů

- Částice ve 3D *[komplexní vlnové funkce]*.
- Spin 1/2 *[2D komplexní vektory]*.
- Částice se spinem 1/2 ve 3D (spinory) *["sloupečky" funkcí, alias funkce spojité+diskrétní proměnné]*.
- Soustava 2 (příp. N) částic (direktní součin 1-částicových prostorů).
- Soustava 2 (příp. N) nerozlišitelných částic, bosonové a fermionové vlnové funkce (symetrizované a antisymetrizované stavové vektory).
- Soustavy s proměnným počtem částic, Fokův prostor. Separabilita versus neseparabilita prostoru.

2a. Reprezentace fyzikálních veličin

- Přiřazení hermitovských operátorů pozorovatelným *[momenty statistického rozdělení veličiny v daném stavu]*.
- Vlastní čísla a vlastní vektory *[bezdisperzní stavy, vlastní čísla coby "naměřitelné" hodnoty dané veličiny]*.
- Vlastnosti vlastních čísel/vektorů hermitovských operátorů. Spektrální rozklad operátoru *[degenerovaný a nedegenerovaný případ]*. Pravděpodo
- Operárory se spojitým spektrem: von Neumannův (formální) versus Diracův (intuitivní) přístup. "Rigged Hilbert space" *[Gelfandův triplet v*

2b. Příklady kvantových operátorů

- Pauliho matice (spin 1/2) *[vlastní čísla/vektory projekce spinu do libovolného směru, konstrukce přes Riemannovu sféru]*.
- Souřadnice a hybnost *[spojité spektrum, delta-funkce a rovinné vlny, rozšíření Hilbertova prostoru]*.
- Orbitální moment hybnosti *[vyjádření ve sférických souřadnicích, vlastní čísla komponenty ve směru z]*.
- Hamiltonián částice v potenciálu *[ukázka mechanismu kvantování energie: 1D konečná pravoúhlá potenciální jáma]*.
- Stacionární Schrödingerova rovnice *[rovnice pro vlastní stavy hamiltoniánu]*.
- Separace radiálních a úhlových stupňů volnosti v případě rotačně symetrického 3D potenciálu, kulové funkce *[úpravy Schrödingerovy rovnice*
- Přehled řešení stacionární Schrödingerovy rovnice v některých jednoduchých 3D systémech *[vodík, harmonický oscilátor, hlavní a radiální kvanto*
- Hamiltonián částice v elektromagnetickém poli, Pauliho rovnice. Tvar Pauliho rovnice v homogenním poli, Zeemanovo štěpení spektrální
- Kalibrační invariance Pauliho rovnice *[neměnnost spektra při kalibračních transformacích pole, kalibrační transformace vlnových funkcí]*.

→Diracova delta funkce .PDF
→Konečná pravoúhlá potenciálová jáma 1D .PDF

3a. Kompatibilní a nekompatibilní veličiny

- Komutující a nekomutující operátory, vlastnosti komutátorů.
- Současná diagonalizace komutujících operátorů *[operátory komutují právě když všechny projektory na jednotlivé vlastní podprostory komutují]*.
- Úplná množina pozorovatelných *[báze číslovaná úplnou množinou vlastních hodnot, lib. další komutující operátor je funkcí ostatních]*.
- Obecná relace neurčitosti pro nekompatibilní veličiny *[přes Schwarzovu nerovnost]*.

Stránka přednášky

→ A Condensed Course of Quantum Mechanics (Karolinum Press, Prague 2013), ISBN 978-80-246-2321-4, IS

→ Essential Formulae .PDF ... soupis základních pojmů a formulek (incomplete & for tough guys only!)

→ Kvantové hlavolamy: část I .PDF, II .PDF, III .PDF, IV .PDF, V .PDF ... série popularizačních článků

http://www-ucjf.troja.mff.cuni.cz/cejnar/prednasky/qm.html

Multiple sums: $\boxed{\mathcal{H} = \oplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i}$

For instance, $\mathcal{H}_i$ = subspaces with different sharp values of a certain observable

- Multiplying Hilbert spaces:

  Let $\{|\phi_{1i}\rangle\}_{i=1}^{d_1}$ be an orthonormal basis of $\mathcal{H}_1$ and $\{|\phi_{2j}\rangle\}_{j=1}^{d_2}$ one of $\mathcal{H}_2$

  Direct (tensor) product $\boxed{\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}$ is a space with the "dyadic product"

  basis $\boxed{|\Phi_{ij}\rangle \equiv |\phi_{1i}\rangle|\phi_{2j}\rangle}$ (non-product bases can also be constructed)

  Dimension: $\boxed{d_{\mathcal{H}} = d_1 \times d_2}$

  Orthonormality: $\langle\Phi_{ij}|\Phi_{i'j'}\rangle = \delta_{ii'}\delta_{jj'}$

  Factorized states: $\forall$ pair $|\psi_1\rangle = \sum_i \alpha_i|\phi_{1i}\rangle \in \mathcal{H}_1$ and $|\psi_2\rangle = \sum_j \beta_j|\phi_{2j}\rangle \in \mathcal{H}_2$

  there $\exists$ product state $\boxed{|\Psi_\otimes\rangle \equiv |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \sum_{i=1}^{d_1}\sum_{j=1}^{d_2} \underbrace{\alpha_i\beta_j}_{\gamma_{ij}} |\Phi_{ij}\rangle}$

  For factorized states: $\langle\Psi_\otimes|\Psi'_\otimes\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\psi_1|\psi'_1\rangle_{\mathcal{H}_1} \times \langle\psi_2|\psi'_2\rangle_{\mathcal{H}_2}$

  Entangled states: unfactorizable superpositions $\boxed{|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_1}\sum_{j=1}^{d_2} \underbrace{\gamma_{ij}}_{\neq\alpha_i\beta_j} |\Phi_{ij}\rangle}$

  For entangled states: $\boxed{\langle\Psi|\Psi'\rangle_{\mathcal{H}} \neq \langle\psi_1|\psi'_1\rangle_{\mathcal{H}_1} \times \langle\psi_2|\psi'_2\rangle_{\mathcal{H}_2}}$

  Multiple products: $\boxed{\mathcal{H} = \otimes_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i}$

  $\mathcal{H}_i$ = spaces corresponding to different parts of the system (e.g. particles) or

onstanta. *[Kdy je nutné přejít ke kvantovému popisu?]*
jeho modifikace *[experiment se zpožděnou volbou, kvantový "vymazávač"].*
rakter částic, vliv měření na kvantový systém, "kvantová logika"].
ozice *[fundamentální kvantový princip!].*

ntového systému
tový prostor versus Hilbertův prostor *[důsledek principu superpozice].*
pravděpodobnosti *[pravděpodobnost "rozeznání stavu 1 ve stavu 2"].*
tace *[duální prostor lineárních forem].*
becný tvar].
lní funkce] a l^2 *["nekonečné sloupečky"].* Izomorfie separabilních Hilb.prostorů.
d prostoru na alternativní stavové podprostory].
ožkové systémy: různé stupně volnosti, soustavy složené z více částí].
[Subsystémy vícesložkového systému, který je sám v čistém kvantovém stavu, se nemusejí nacházet v čistých stavech!]

h prostorů
funkce].
pinory) *["sloupečky" funkcí, alias funkce spojité+diskrétní proměnné].*
ektní součin 1-částicových prostorů).
lných částic, bosonové a fermionové vlnové funkce (symetrizované a antisymetrizované stavové vektory).
částic, Fokův prostor. Separabilita versus neseparabilita prostoru.

kálních veličin
torů pozorovatelným *[momenty statistického rozdělení veličiny v daném stavu].*
[bezdisperzní stavy, vlastní čísla coby "naměřitelné" hodnoty dané veličiny].
orů hermitovských operátorů. Spektrální rozklad operátoru *[degenerovaný a nedegenerovaný případ].* Pravděpodo
m: von Neumannův (formální) versus Diracův (intuitivní) přístup. "Rigged Hilbert space" *[Gelfandův triplet v*

ých operátorů
ní čísla/vektory projekce spinu do libovolného směru, konstrukce přes Riemannovu sféru].
ektrum, delta-funkce a rovinné vlny, rozšíření Hilbertova prostoru].
jádření ve sférických souřadnicích, vlastní čísla komponenty ve směru z].
lu *[ukázka mechanismu kvantování energie: 1D konečná pravoúhlá potenciální jáma].*
vnice *[rovnice pro vlastní stavy hamiltoniánu].*
stupňů volnosti v případě rotačně symetrického 3D potenciálu, kulové funkce *[úpravy Schrödingerovy rovnice*
ödingerovy rovnice v některých jednoduchých 3D systémech *[vodík, harmonický oscilátor, hlavní a radiální kvanto*
agnetickém poli, Pauliho rovnice. Tvar Pauliho rovnice v homogenním poli, Zeemanovo štěpení spektráln
rovnice *[neměnnost spektra při kalibračních transformacích pole, kalibrační transformace vlnových funkcí].*

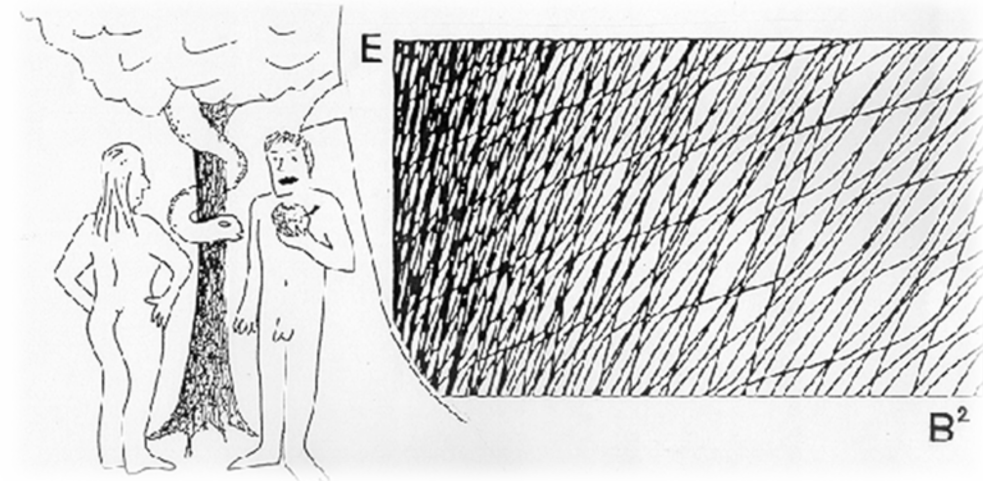
→Konečná pravoúhlá potenciálová jáma 1D .PDF

3a. Kompatibilní a nekompatibilní veličiny

- Komutující a nekomutující operátory, vlastnosti komutátorů.
- Současná diagonalizace komutujících operátorů *[operátory komutují právě když všechny projektory na jednotlivé vlastní podprostory komutují].*
- Úplná množina pozorovatelných *[báze číslovaná úplnou množinou vlastních hodnot, lib. další komutující operátor je funkcí ostatních].*
- Obecná relace neurčitosti pro nekompatibilní veličiny *[přes Schwarzovu nerovnost].*

"Essential formulae" *(for tough guys only!!!)*
soupis základních pojmů a formulek

Knihy



- **P. Cejnar: *A Condensed Course of Quantum Mechanics***
  (Karolinum, 2013) **.... dedikovaná učebnice k tomuto kursu**
- J. Formánek: *Úvod do kvantové teorie* (1983,2004)
- J.J. Sakurai: *Modern Quantum Mechanics* (1985,1994)
  J.J. Sakurai, J.J.Napolitano: *Modern Quantum Mechanics* (2011)
- G. Auletta, M. Fortunato, G. Parisi: *Quantum Mechanics* (2009)
- L.E. Ballentine: *Quantum Mechanics. A Modern Development* (1998)
- A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (1995)
- A. Bohm, *Quantum Mechanics: Foundations and Applications* (1979, 1993)
- W. Greiner: *Quantum Mechanics: An Introduction* (1989),
  W. Greiner: *Quantum Mechanics: Special Chapters* (1998)
  W. Greiner, B. Müller: *Quantum Mechanics: Symmetries* (1989)
- E. Merzbacher: *Quantum Mechanics* (1961,1998)
- S. Flügge: *Practical Quantum Mechanics* (1971,1999)
- J. Pišút, L. Gomolčák, V. Černý: *Úvod do kvantovej mechaniky* (1983)
- J. Pišút, V. Černý, P. Prešnajder: *Zbierka úloh z kvantovej mechaniky* (1985)
- R.P. Feynman: *Feynmanovy přednášky 3* (1964,2002/6) ....

▶ **Breit-Wigner** (Cauchy) **energy distribution:** $\boxed{\Omega(E)=\frac{1}{\pi}\frac{\frac{\Gamma}{2}}{(E-E_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}}$

Γ = finite halfwidth

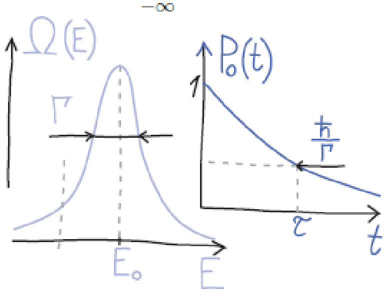
$\langle\langle E^2\rangle\rangle=\infty$ infinite energy disperion because of the slow decrease of $\Omega(E)$

$\boxed{P_0(t)=e^{-\frac{t}{\tau}}}$ with $\boxed{\Gamma\,\tau=\hbar}$ **exponential decay** (average lifetime $\tau=\frac{\hbar}{\Gamma}$)

Inverse proof (from exponential decay to Breit-Wigner distribution):

Assume $A_0(t)=\begin{Bmatrix} e^{-\Gamma t/(2\hbar)}e^{-iE_0t/\hbar} \\ e^{+\Gamma t/(2\hbar)}e^{-iE_0t/\hbar}\end{Bmatrix}$ for $\left\{\begin{matrix} t\geq 0 \\ t<0\end{matrix}\right.$ Coherent assumption on the phase factors. The $t{>}0$ exponential decay is extended also to $t{<}0$

$$\Omega(E)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A_0(t)e^{+i\frac{Et}{\hbar}}dt=\frac{1}{2\pi\hbar}\Bigg(\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0}e^{\left[\frac{\Gamma}{2\hbar}+i\frac{E-E_0}{\hbar}\right]t}dt}_{\frac{\hbar}{(\Gamma/2)+i(E-E_0)}}+\underbrace{\int\limits_{0}^{+\infty}e^{\left[-\frac{\Gamma}{2\hbar}+i\frac{E-E_0}{\hbar}\right]t}dt}_{\frac{-\hbar}{-(\Gamma/2)+i(E-E_0)}}\Bigg)=$$



$$=\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma/2}{(E-E_0)^2+(\Gamma/2)^2}$$

$\Rightarrow\ \overbrace{\Delta E}^{\sim\Gamma}\ \overbrace{\Delta t}^{\sim\tau}=\hbar$ relation obtained again

$\Rightarrow$ Low-energy cutoff of $\Omega(E)$ leads to small **deviations** from the exp. law, in particular, to a smoothening of the $t{=}0$ cusp of the extended function $P_0(t)$

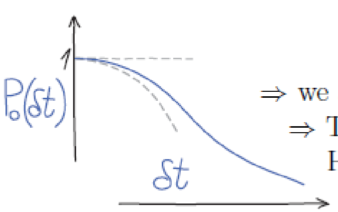
▶ **Non-exponential decay**

QM always yields $\boxed{\frac{d}{dt}P_0(t)\big|_{t=0}=0}$ in contrast to exp. law: $\frac{d}{dt}P_0(t)\big|_{t=0}=-\frac{1}{\tau}$

General derivation for small times:

$|A_0(\delta t)|^2=\langle\psi(0)|e^{-i\frac{\hat{H}\delta t}{\hbar}}|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|e^{+i\frac{\hat{H}\delta t}{\hbar}}|\psi(0)\rangle\approx$ expand up to 2nd order in δt

$$\approx 1+\langle\psi(0)|\hat{H}|\psi(0)\rangle^2\frac{(\delta t)^2}{\hbar^2}-\langle\psi(0)|\hat{H}^2|\psi(0)\rangle\frac{(\delta t)^2}{\hbar^2}=\boxed{1-\underbrace{\frac{\langle\langle E^2\rangle\rangle}{\hbar^2}}_{\tau^{-2}}(\delta t)^2\approx P_0(\delta t)}$$

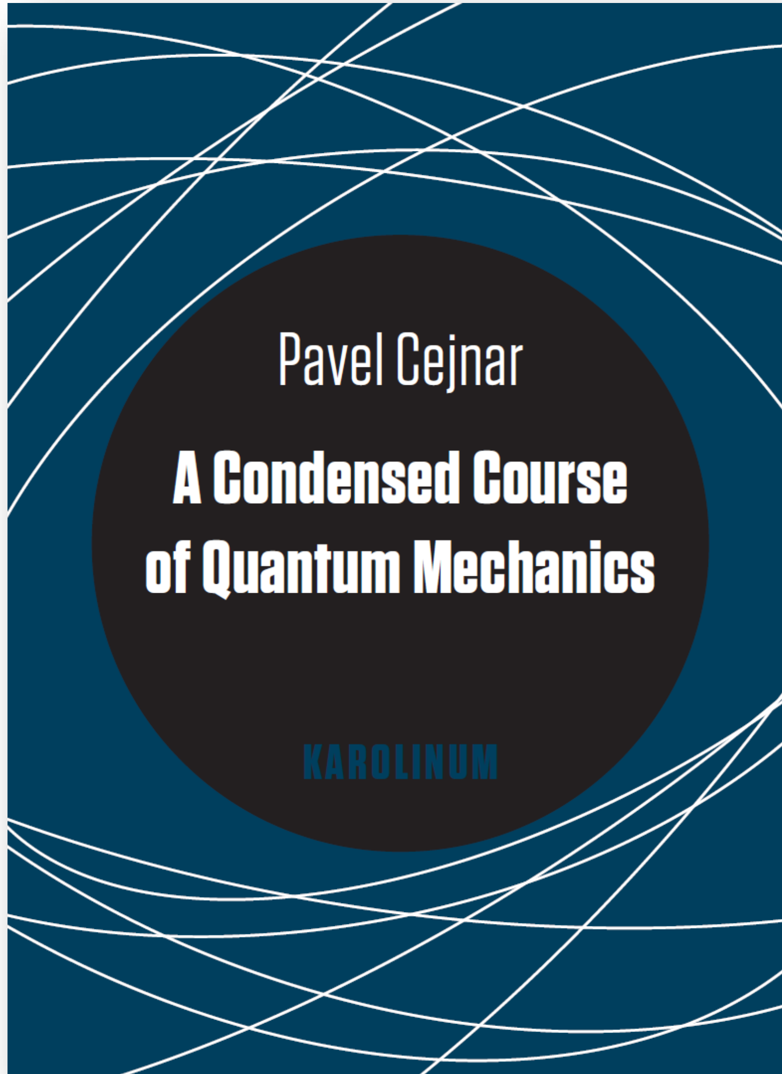


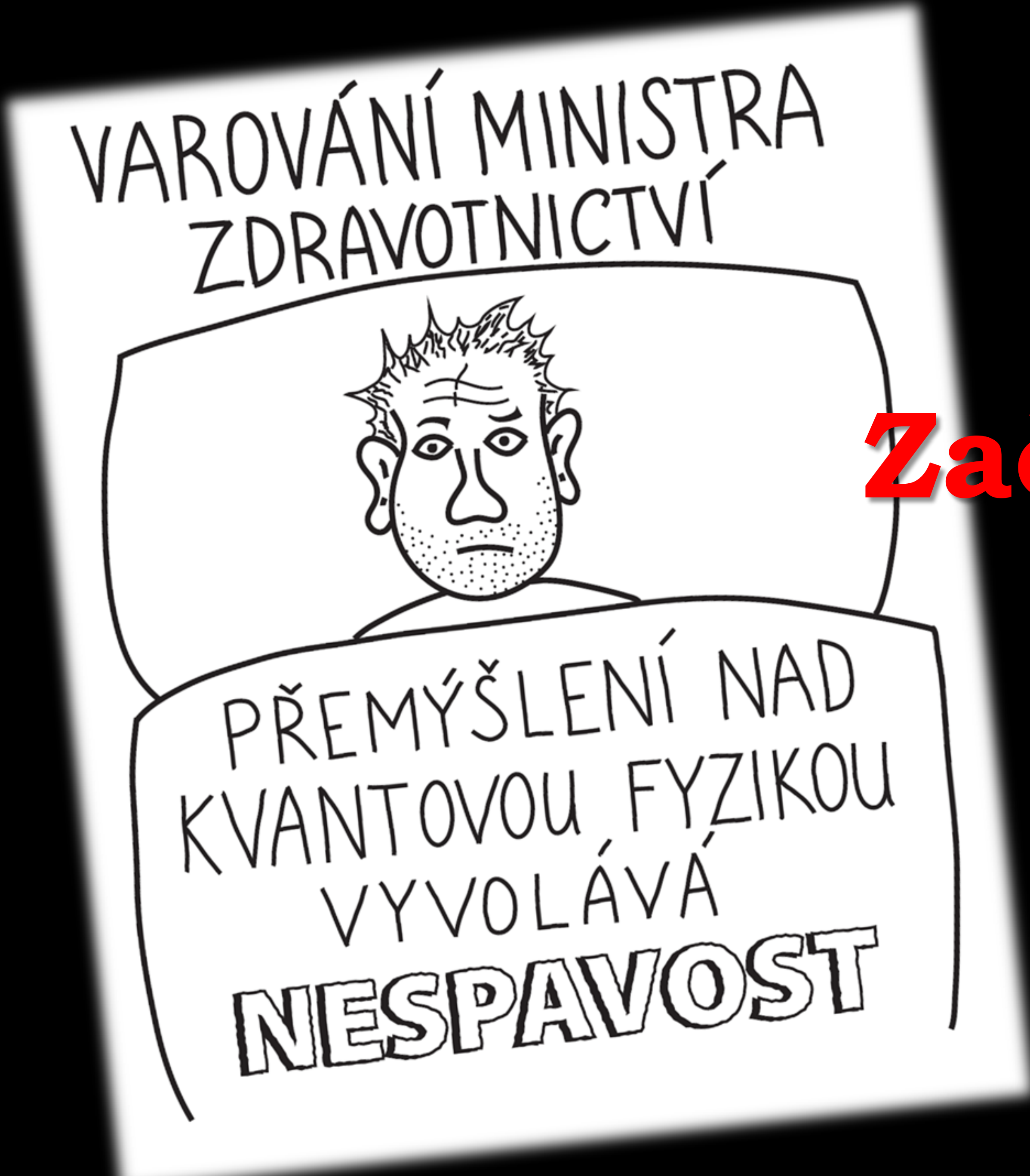
$\Rightarrow$ we again get: $\overbrace{\Delta E}^{\sqrt{\langle\langle E^2\rangle\rangle}}\ \overbrace{\Delta t}^{\tau}=\hbar$

$\Rightarrow$ The QM decay for small times is always quadratic. However, this is usually very hard to measure!

◀ **Historical remark**

1997: the first exp. detection of short-t corrections to the exponential decay law



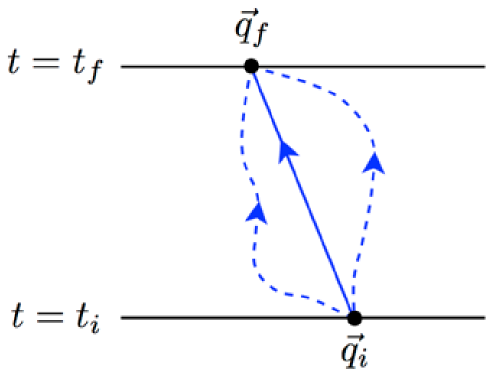

VAROVÁNÍ MINISTRA ZDRAVOTNICTVÍ
PŘEMÝŠLENÍ NAD KVANTOVOU FYZIKOU VYVOLÁVÁ
NESPAVOST

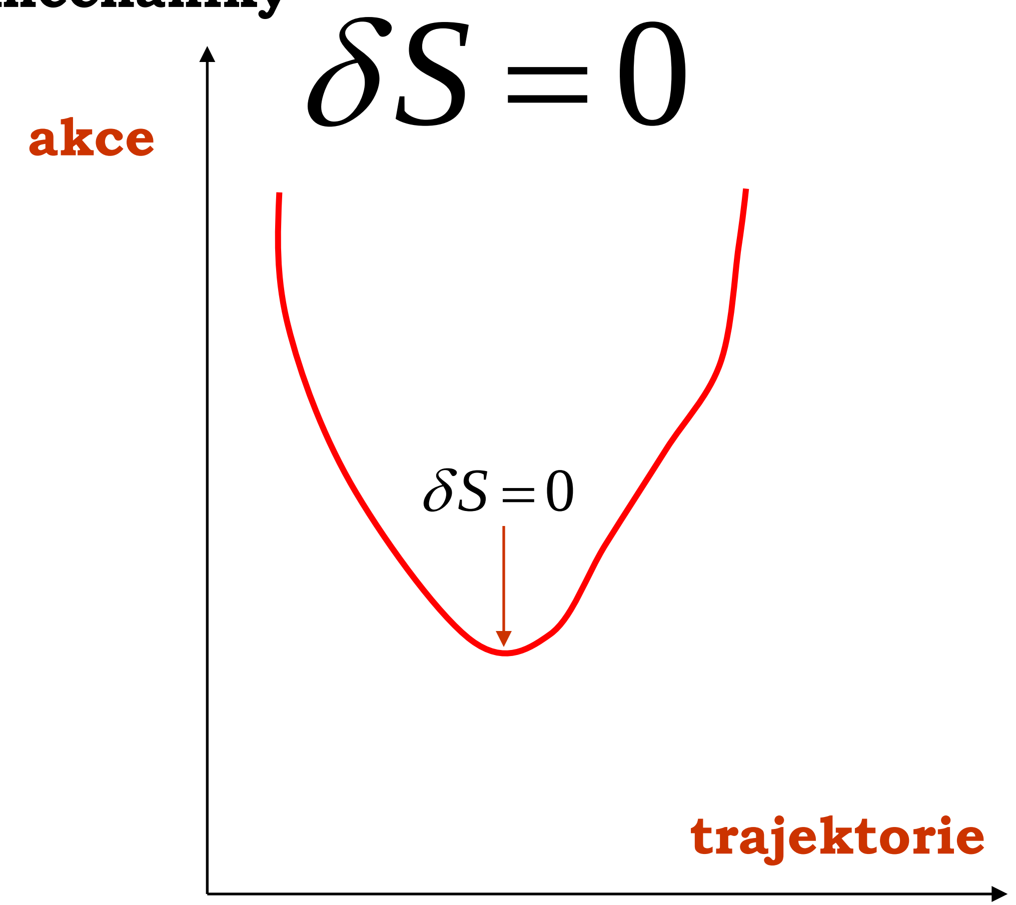
Začínáme...

„Kvantová úroveň“

Variační princip klasické mechaniky

$$S[\vec{q}(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L[\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t]$$

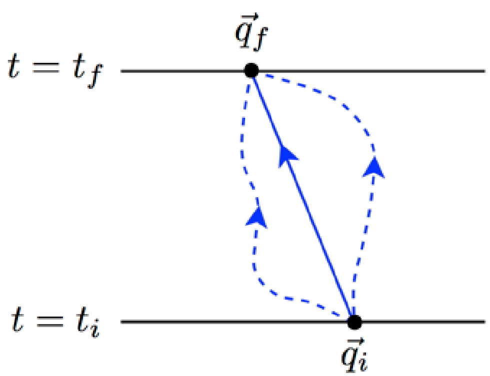




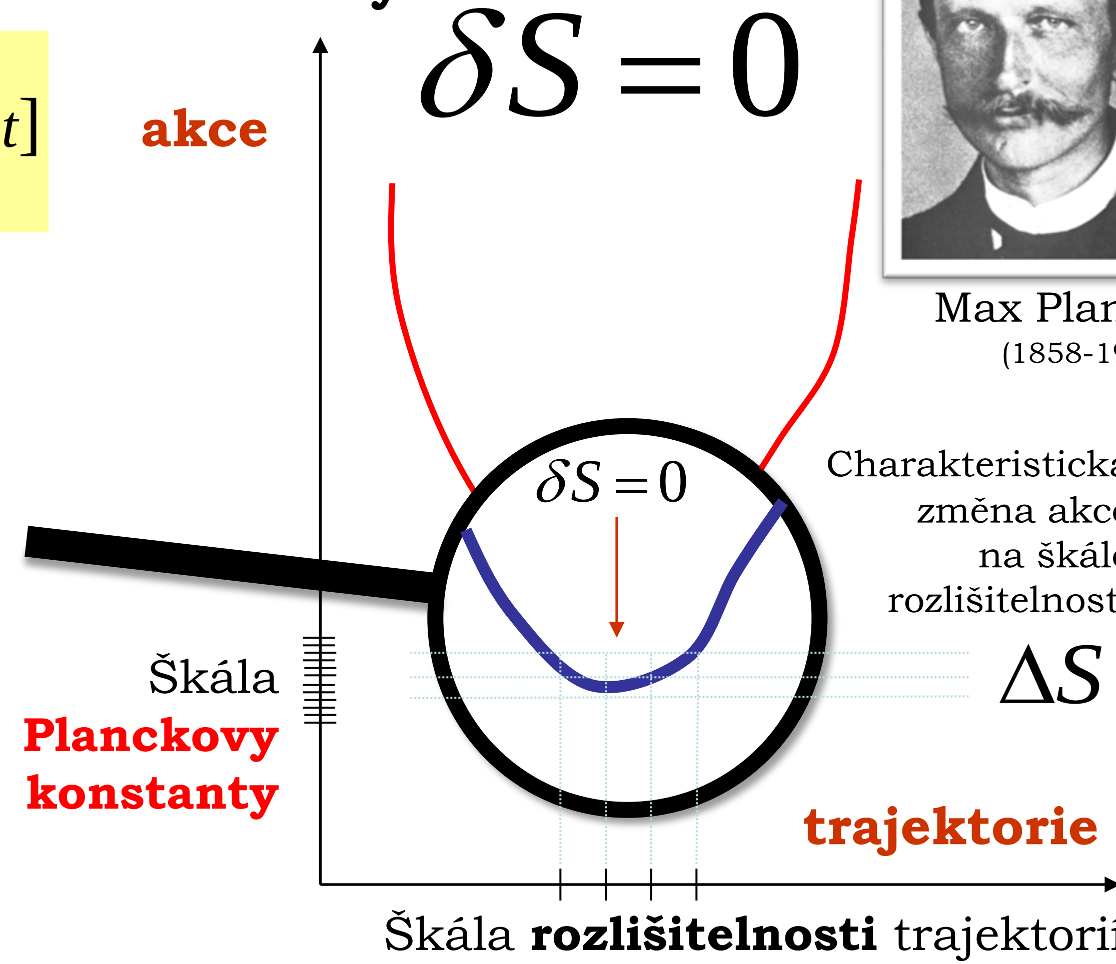
„Kvantová úroveň“

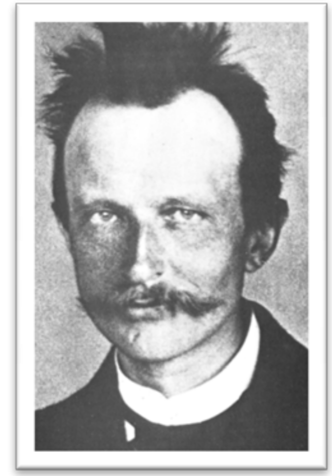
Variační princip klasické mechaniky

$$S[\vec{q}(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L[\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t]$$



$$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$
$$= 0.66\ \mathrm{eV \cdot fs}$$





Max Planck
(1858-1947)

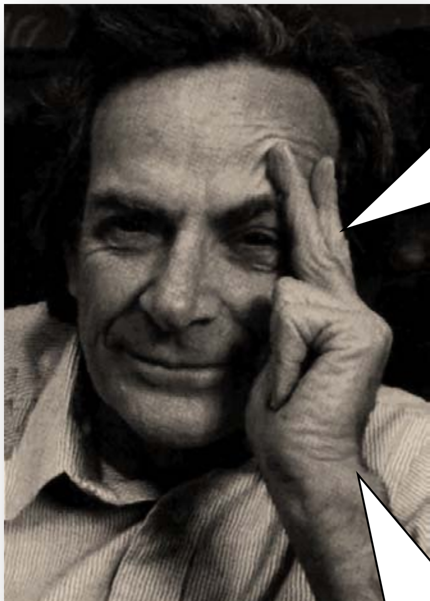
Kritérium pro platnost **klasické mechaniky**: $\dfrac{\Delta S}{\hbar} \gg 1$

Kvantová mechanika nastupuje když: $\dfrac{\Delta S}{\hbar} \leq 1$

Interference částic

Dvouštěrbinový experiment pro elektrony

Pro daný počáteční a koncový bod existují 2 trajektorie splňující $\delta S = 0$
Klasická částice letí buď po I, nebo po II

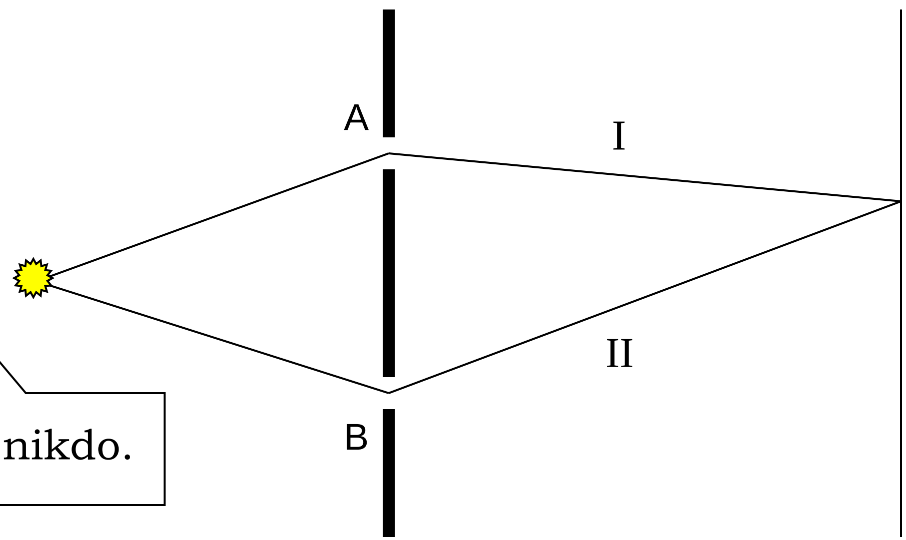


Richard P. Feynman
(1918 -1988)

Dvouštěrbinový experiment je srdcem kvantové mechaniky. Obsahuje tu jedinou skutečnou záhadu. Této záhady se nelze zbavit nějakým „vysvětlením“ jejího fungování. My prostě jen popíšeme, jak ta záhada funguje. A tím vám zároveň sdělíme základní zvláštnost celé kvantové mechaniky…

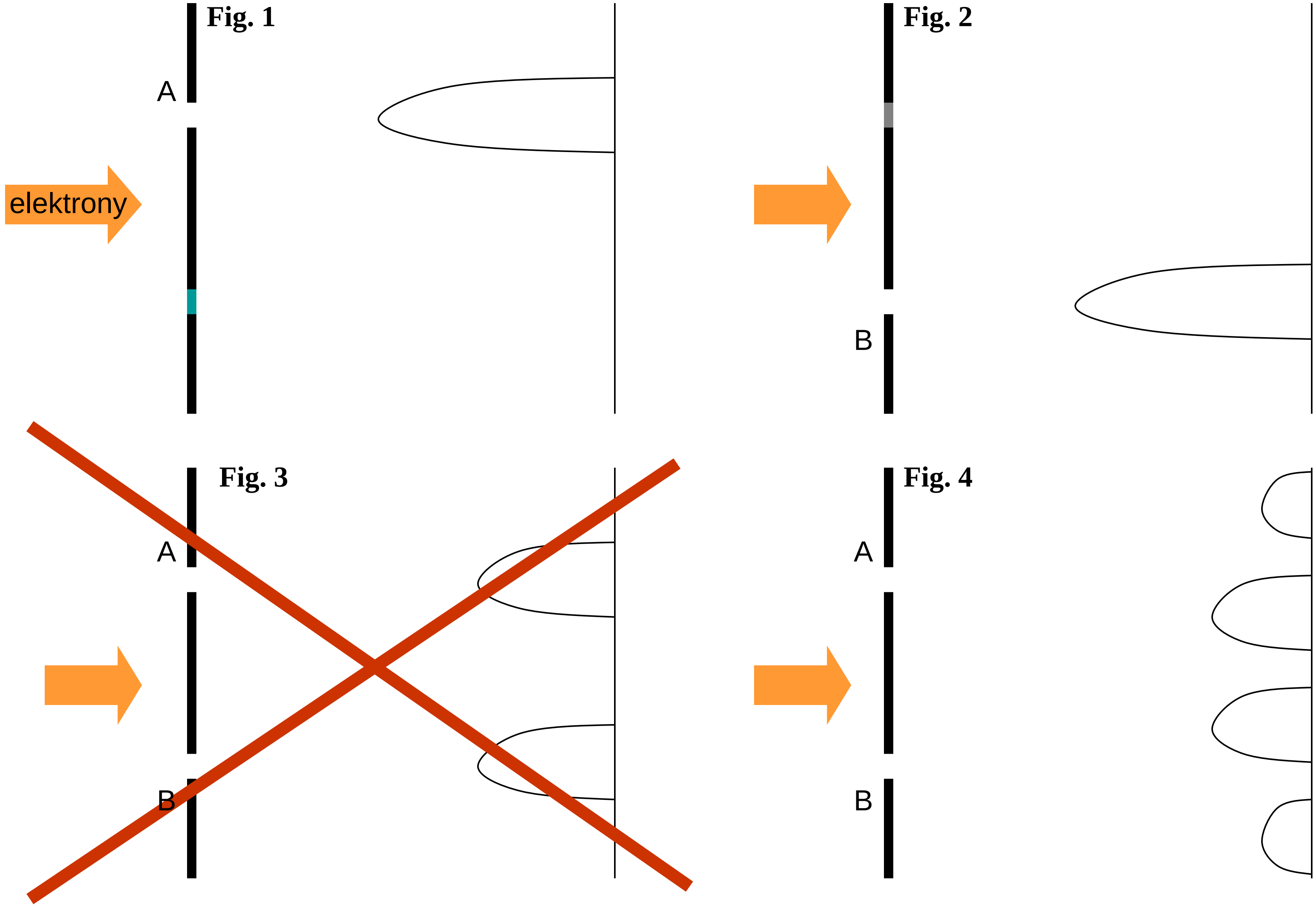
Kvantové mechanice nerozumí nikdo.

Co se stane když $S_I - S_{II} \approx \hbar$ **?**



Interference částic

Dvouštěrbinový experiment pro elektrony



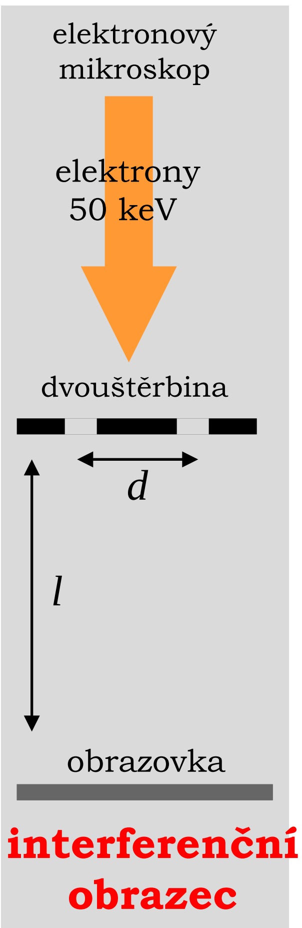
Interference částic

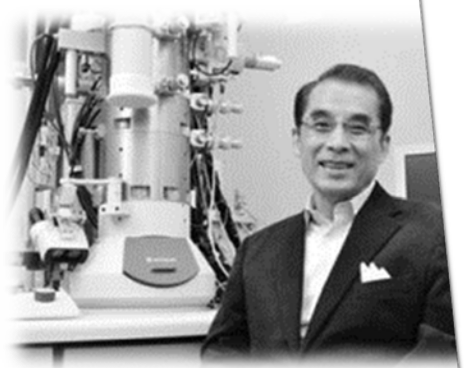
Dvouštěrbinový experiment pro elektrony

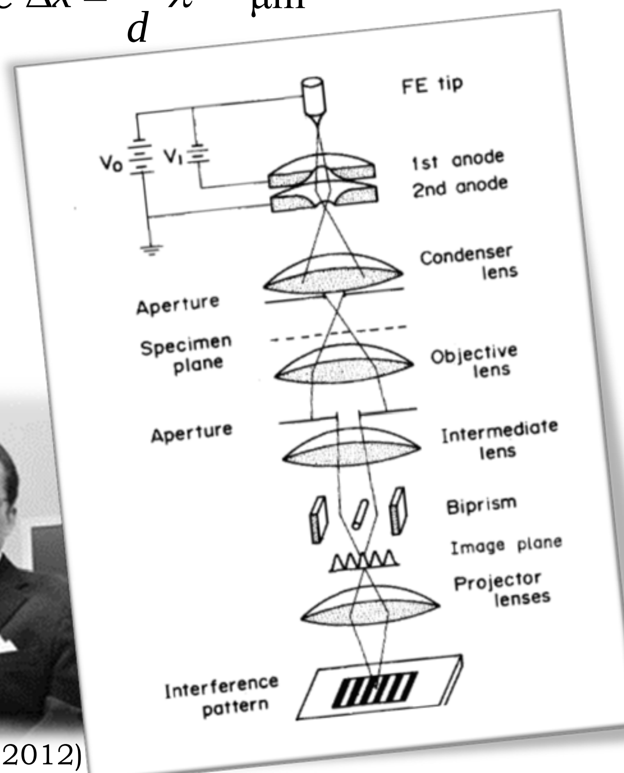
$$\lambda = \frac{\hbar / 2\pi}{p}$$

… **vlnová délka** pro částici s hybností p

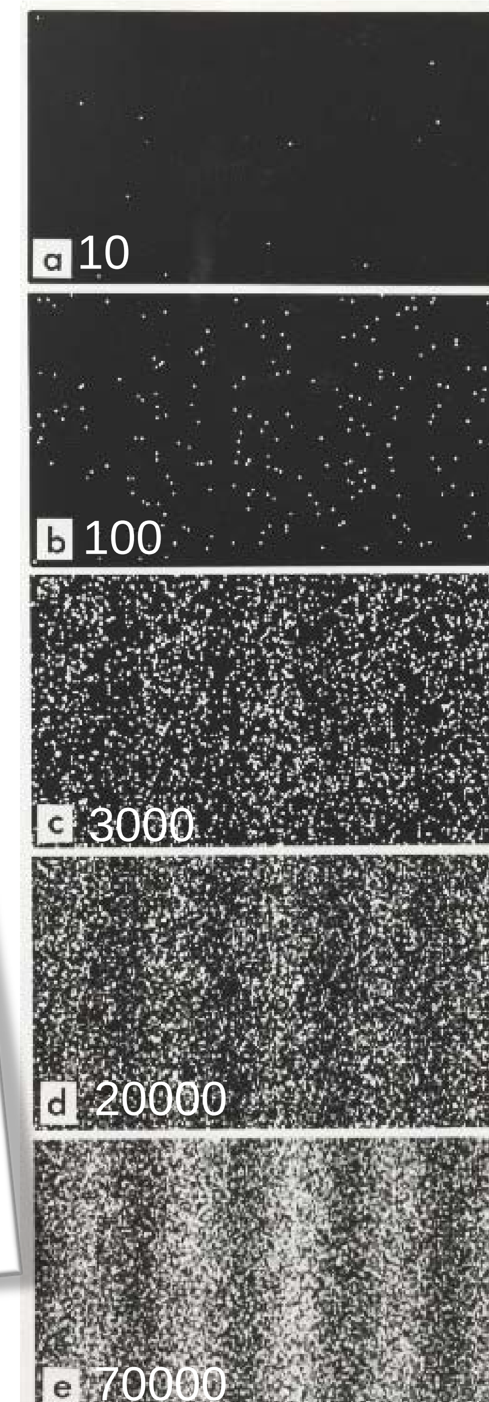
Pro elektron o kinetické energii 50 keV
$\lambda \approx 0.0055$ nm
$d \sim \mu$m, $l \sim$ m
$\Rightarrow$ perioda obrazce $\Delta x = \frac{2l}{d}\lambda \sim \mu$m




Akira Tonamura (1942-2012)



A. Tonomura *et al.*, Am. J. Phys. 57 (1989) 117

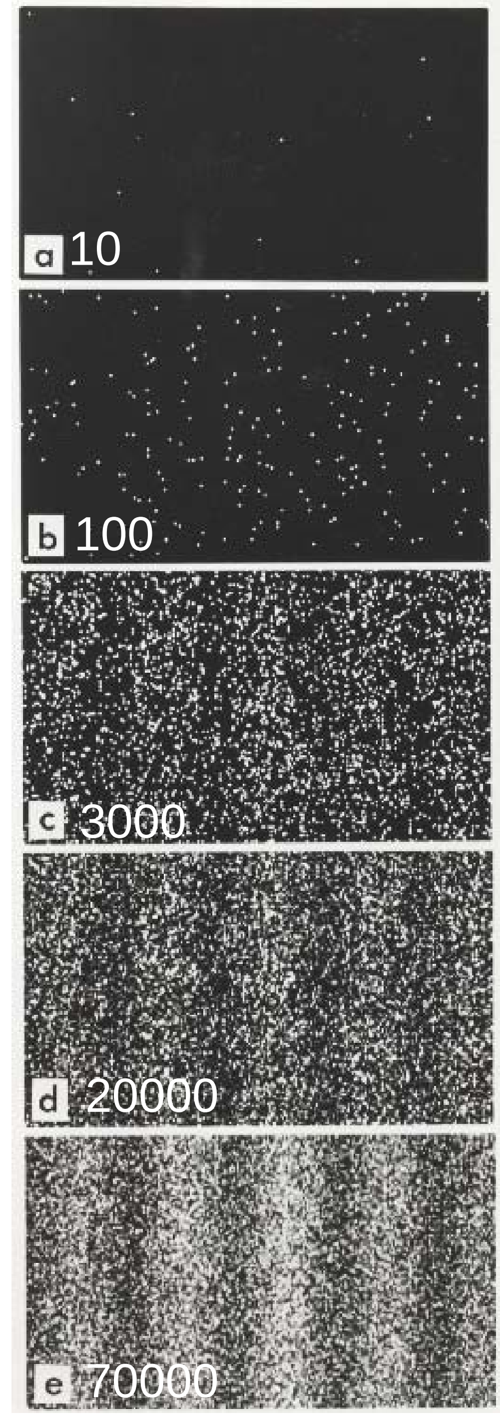


Interference částic

Dvouštěrbinový experiment pro elektrony

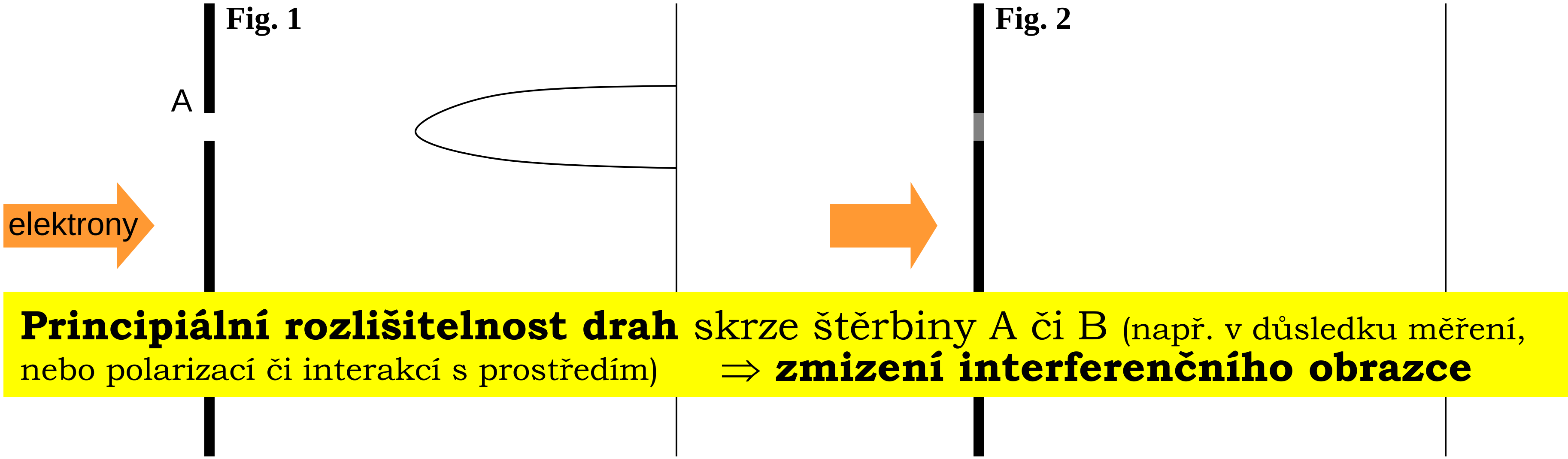
*„Každý elektron **je v přístroji sám**, tedy musí **interferovat sám se sebou**…“*

© Charles Addams, the New Yorker 1940

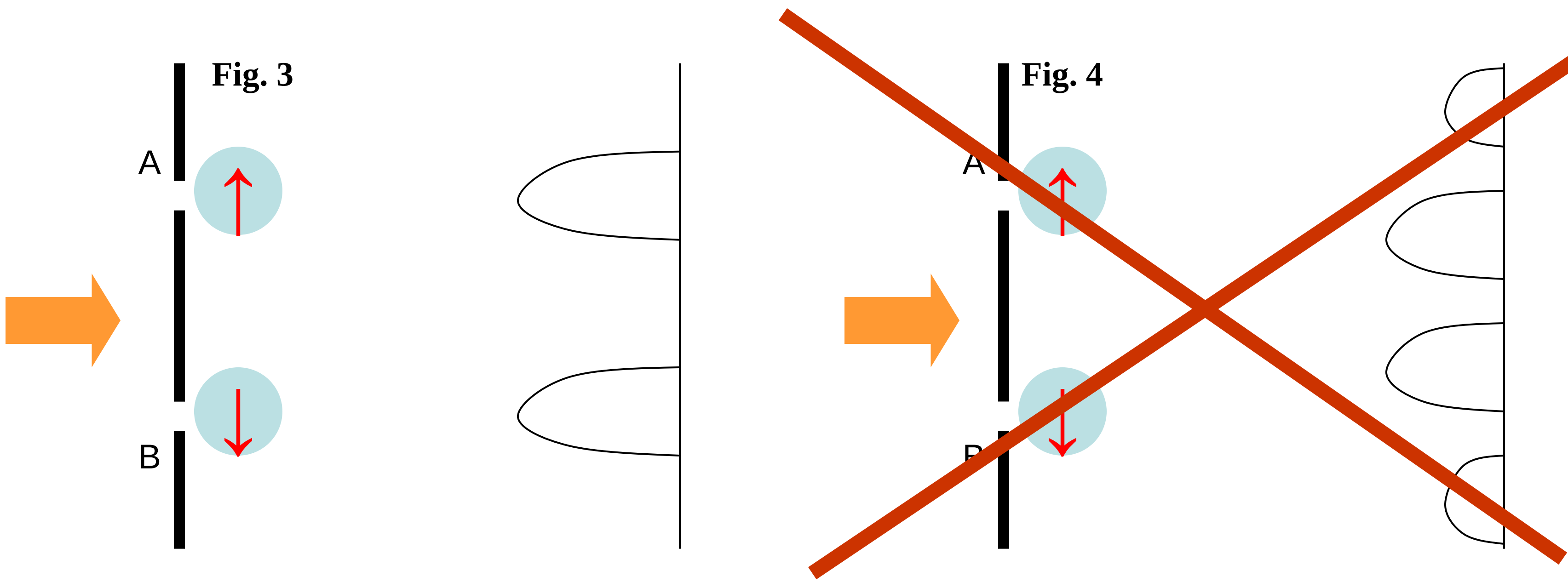


Interference částic

Dvouštěrbinový experiment pro elektrony

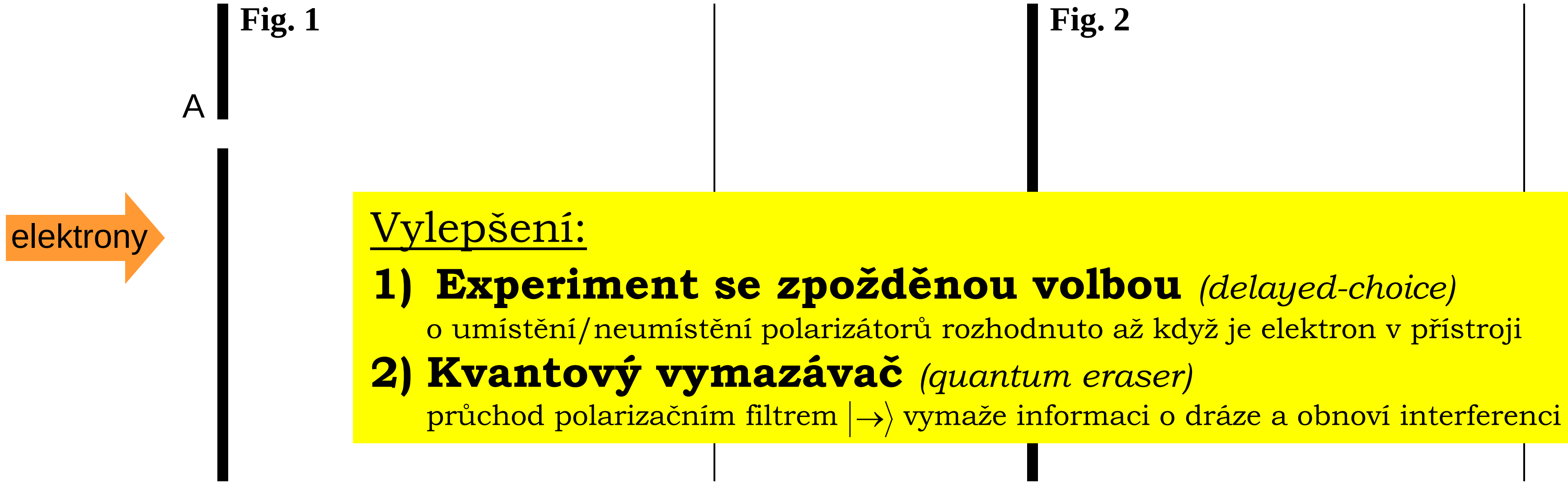


Principiální rozlišitelnost drah skrze štěrbiny A či B (např. v důsledku měření, nebo polarizací či interakcí s prostředím) $\Rightarrow$ **zmizení interferenčního obrazce**



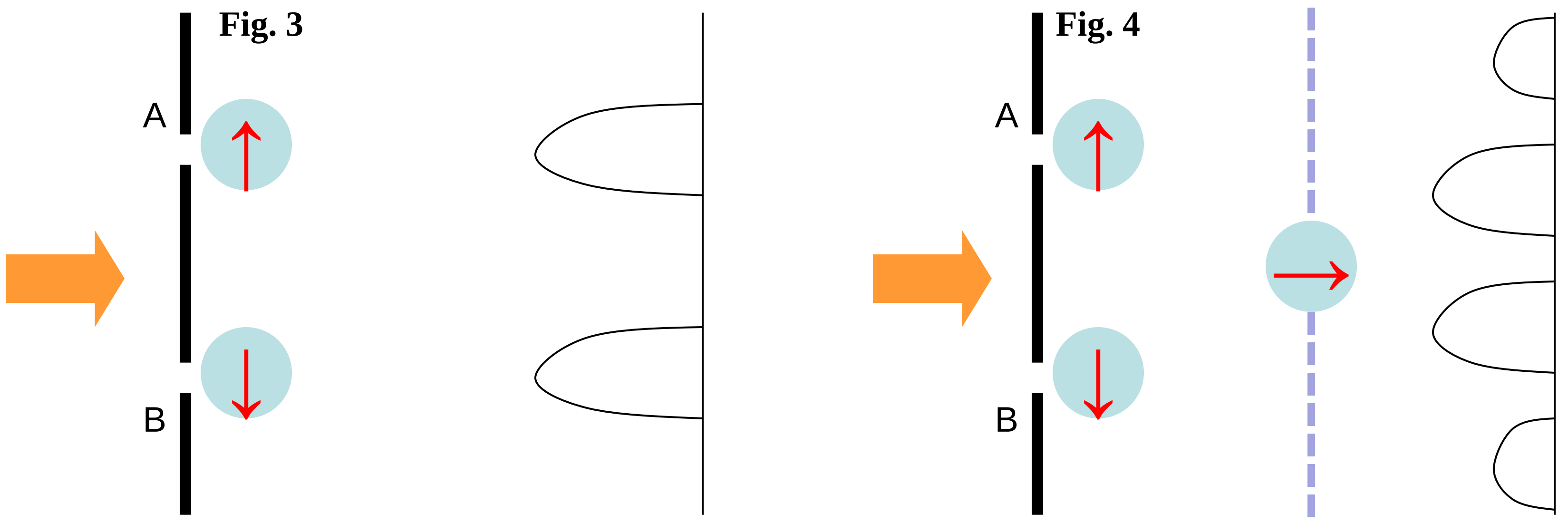
Interference částic

Dvouštěrbinový experiment pro elektrony



<u>Vylepšení:</u>

1) **Experiment se zpožděnou volbou** *(delayed-choice)*
   o umístění/neumístění polarizátorů rozhodnuto až když je elektron v přístroji
2) **Kvantový vymazávač** *(quantum eraser)*
   průchod polarizačním filtrem $|\rightarrow\rangle$ vymaže informaci o dráze a obnoví interferenci



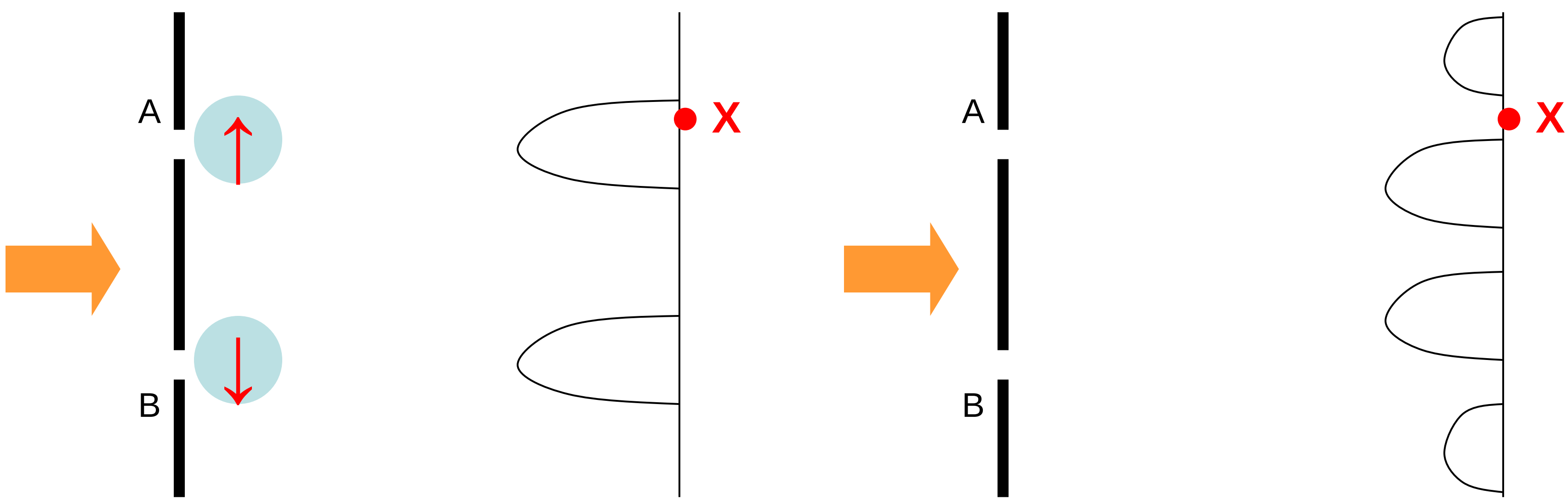
Interference částic

Dvouštěrbinový experiment pro elektrony

$$(A \cap X) \cup (B \cap X) \neq (A \cup B) \cap X$$

„which-path“ setup

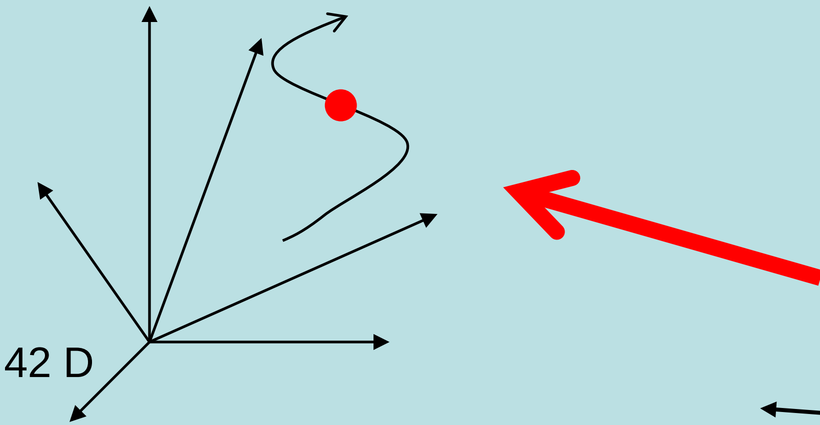
„interference“ setup



... a jdeme opravdu na to!

Stav kvantového systému

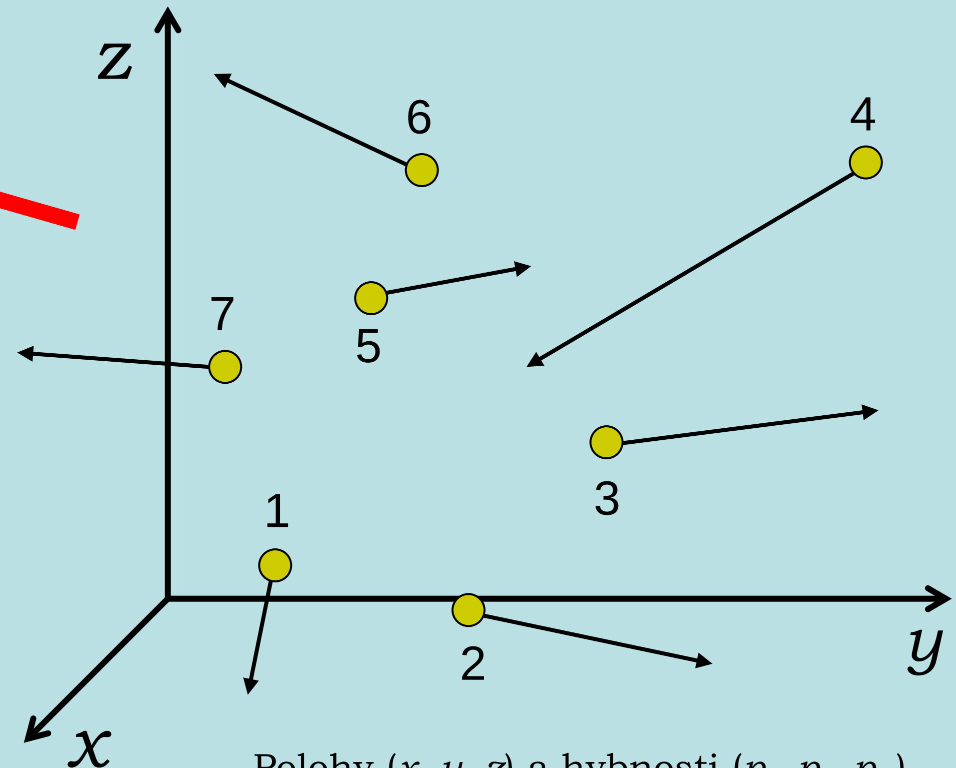
Stav fyzikálního systému: zobrazení reality (jejího sledovaného výseku) v jednom konkrétním okamžiku do prostoru vhodně zvolených matematických entit. Požadavek, aby „stav“ **v jednom čase *t*** umožňoval odvodit „stavy“ (ne nutně výsledky pozorování) **v libovolných jiných časech** (***t*+Δ*t***).



Klasická mechanika

Stavovým prostorem pro N částic je $6N$-rozměrný **fázový prostor** všech souřadnic a hybností. Při zachování energie je pohyb omezen na $(6N-1)$-rozměrnou varietu ve fázovém prostoru.

stavy ≡ body

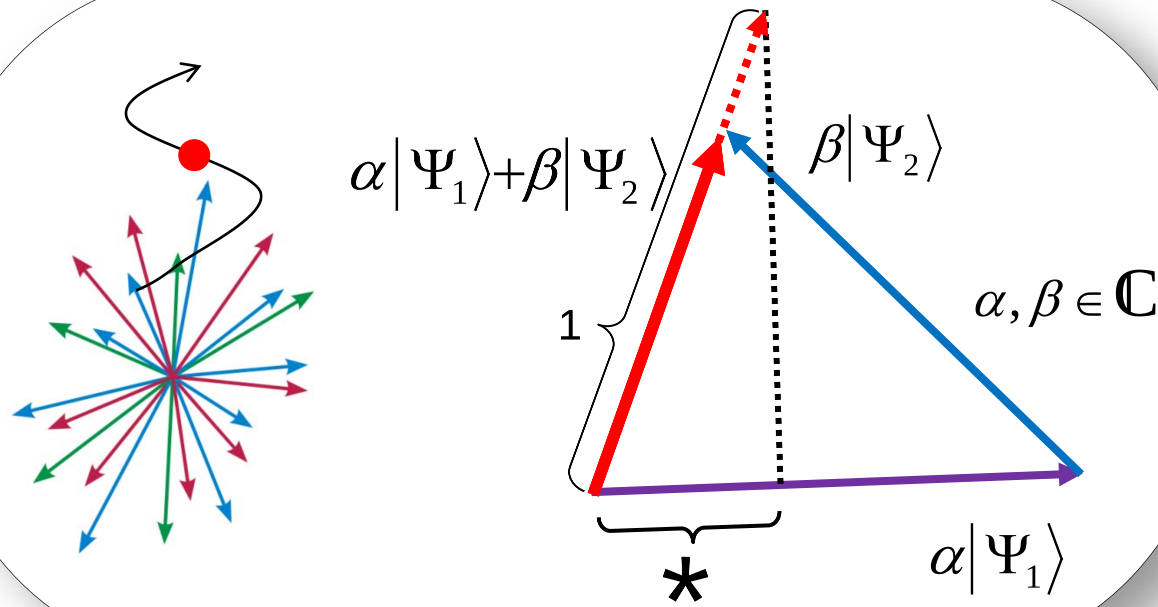


Polohy (x, y, z) a hybnosti (p_x, p_y, p_z) pro N=7 částic

Stav kvantového systému

Kvantové stavy jsou reprezentovány vektory

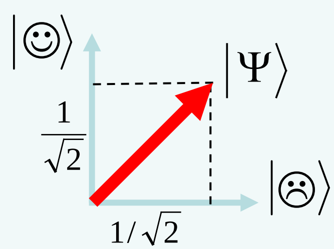
stavy ≡ vektory



Vektor vzniklý součtem (lineární kombinací) dvou či více vektorů s nimi má nenulový překryv, což vede k možné záměně odpovídajících stavů. **To je podstata kvantové neurčitosti**.

$$|*|^2 = \begin{cases}\text{pravděpodobnost}\\ \text{vzájemné záměny}\\ \text{obou stavů}\end{cases}$$

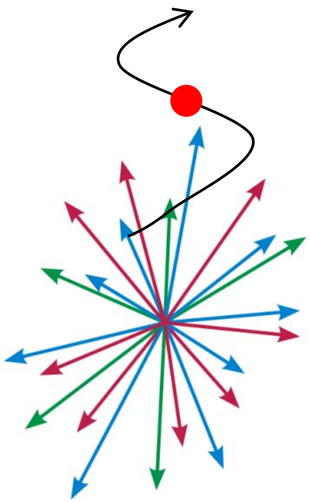
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|☺\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|☹\rangle$$



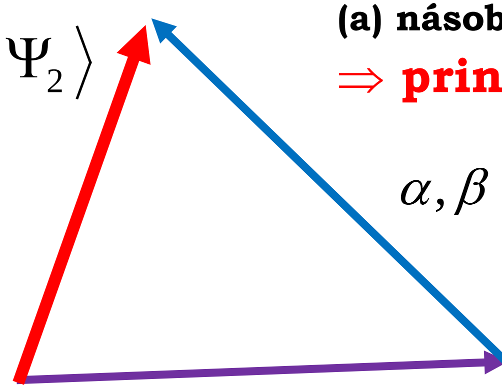
$$P(☺) = \frac{1}{2} = P(☹)$$

Stav kvantového systému

1) Komplexní vektorový prostor



$$\alpha\left|\Psi_1\right\rangle + \beta\left|\Psi_2\right\rangle$$



Uzavřenost tohoto prostoru vůči operacím:
(a) násobení komplexním číslem, (b) sčítání
$\Rightarrow$ **princip superpozice**

$$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Hilbertův prostor

2) Skalární součin

$$\left\langle \Psi' \middle| \Psi \right\rangle \in \mathbb{C}$$

Schwarzova nerovnost

$$\left|\left\langle \Psi' \middle| \Psi \right\rangle\right|^2 \leq \underbrace{\left\langle \Psi' \middle| \Psi' \right\rangle}_{1} \underbrace{\left\langle \Psi \middle| \Psi \right\rangle}_{1}$$

normalizace

„Vybavenost“ prostoru skalárním součinem umožňuje počítat **pravděpodobnost** „záměny“ stavových vektorů:

$$P(\Psi' \mid \Psi) = \left|\left\langle \Psi' \middle| \Psi \right\rangle\right|^2 \in [0,1]$$

3) Úplnost

Každá konvergující posloupnost má limitu uvnitř prostoru (bezpečnostní opatření)

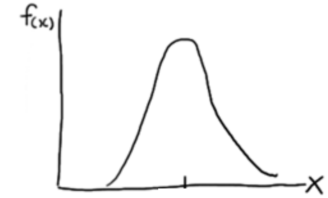
Hilbertovy prostory

Prostor kvadraticky integrovatelných funkcí

$L_2(R)$

Funkce splňující podmínku $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| f(x) \right|^2 < \infty$

Skalární součin $\langle g | f \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, g^*(x)\, f(x)$



Prostor nekonečných sekvencí

l_2

Posloupnosti komplexních čísel
Splňující podmínku $\sum_{i=1}^{\infty} \left| a_i \right|^2 < \infty$

Skalární součin $\langle b | a \rangle \equiv \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

David Hilbert
(1862-1943)

John von Neumann
(1903-1957)

Interference částic

„interference“ setup

Dvouštěrbinový experiment pro elektrony

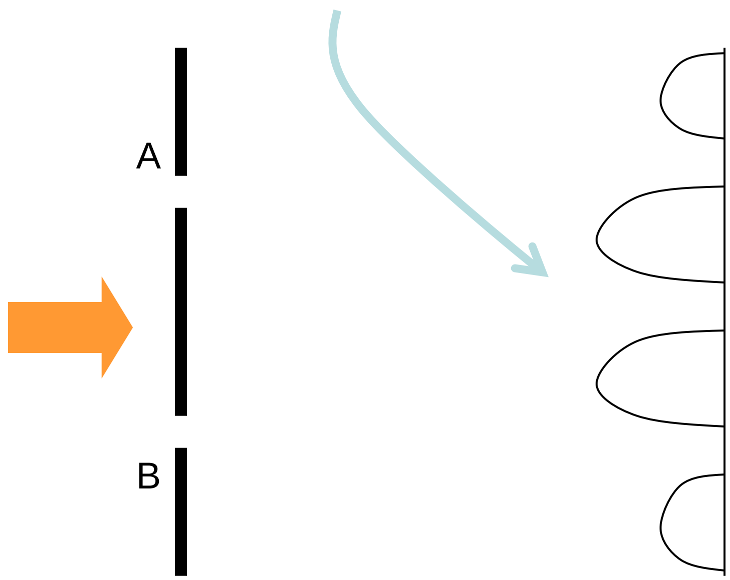
$$|\alpha|e^{i\phi_\alpha} \qquad |\beta|e^{i\phi_\beta}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\psi_A\rangle = \psi_A(x) = \sqrt{\rho_A(x)}\, e^{i\phi_A(x)} \\ \\ |\psi_B\rangle = \psi_B(x) = \sqrt{\rho_B(x)}\, e^{i\phi_B(x)} \end{array}\right\} \longrightarrow \quad |\psi\rangle = \alpha|\psi_A\rangle + \beta|\psi_B\rangle$$

$$P_\psi(x) = |\alpha|^2 \rho_A(x) + |\beta|^2 \rho_B(x) + 2|\alpha||\beta|\sqrt{\rho_A(x)\,\rho_B(x)}\cos\left(\phi_A(x)+\phi_\alpha-\phi_B(x)-\phi_\beta\right)$$

$$\uparrow$$

$$|\langle x|\psi\rangle|^2 = \left|\int dx'\,\delta(x'-x)\psi(x')\right|^2 = |\psi(x)|^2$$



Interference částic

„which-path“ setup

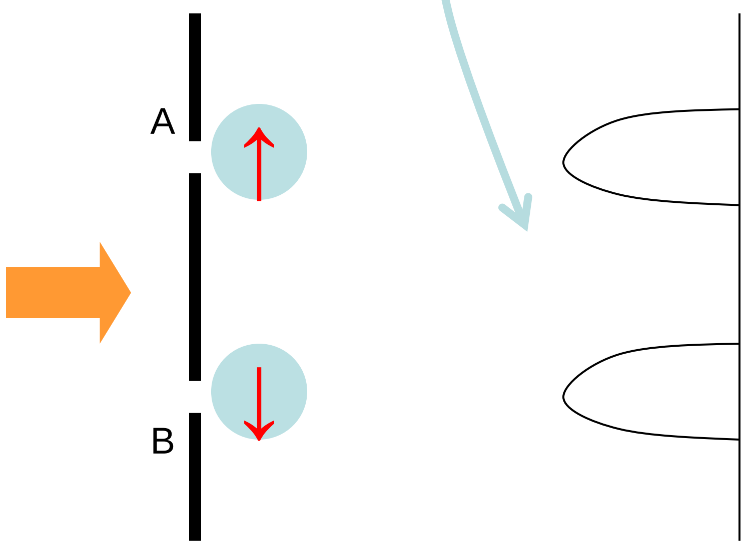
Dvouštěrbinový experiment pro elektrony

$$|\Psi_A\rangle = \sqrt{\rho_A(x)}\, e^{i\phi_A(x)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_B\rangle = \sqrt{\rho_B(x)}\, e^{i\phi_B(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi\rangle = \overset{|\alpha|e^{i\phi_\alpha}}{\alpha}|\Psi_A\rangle + \overset{|\beta|e^{i\phi_\beta}}{\beta}|\Psi_B\rangle = \begin{pmatrix} \alpha\,\psi_A(x) \\ \beta\,\psi_B(x) \end{pmatrix}$$

$$P_\Psi(x) = |\alpha|^2 \rho_A(x) + |\beta|^2 \rho_B(x)$$



$$|\langle x\uparrow|\psi\rangle|^2 + |\langle x\downarrow|\psi\rangle|^2$$

$$= \left|\int dx' \begin{pmatrix} \delta(x'-x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\psi_A(x') \\ \beta\psi_B(x') \end{pmatrix}\right|^2 + \left|\int dx' \begin{pmatrix} 0 & \delta(x'-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\psi_A(x') \\ \beta\psi_B(x') \end{pmatrix}\right|^2$$

$$= |\alpha\psi_A(x)|^2 + |\beta\psi_B(x)|^2$$

Pokračování v dalších 77 dílech