# Zobrazení z množiny do množiny, typy zobrazení

*Nechť **R** je relace z množiny A do množiny B splňující vlastnosti: Ke každému prvku $a \in A$ existuje nejvýše jeden prvek $b \in B$ takový, že $[a,b] \in$ **R.** Tato relace se nazývá **zobrazení z množiny A do množiny B.** Značíme R: $A \rightarrow B$.*

Nechť **R** je zobrazení z množiny A do množiny B.

- Jestliže $[a,b] \in$ **R**, pak prvek $a \in A$ nazýváme **vzorem** prvku $b \in B$ v zobrazení **R**; prvek $b \in B$ nazýváme **obrazem** prvku $a \in A$ v zobrazení **R**.
- Množina $O_1(\mathbf{R}) = \{a \in A$: existuje $b \in B$ takové, že $[a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **definiční obor** zobrazení **R**. Platí $O_1(\mathbf{R}) \subset A$.
- Množina $O_2(\mathbf{R}) = \{b \in B$: existuje $a \in A$ takové, že $[a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **obor hodnot** zobrazení **R**. Platí $O_2(\mathbf{R}) \subset B$.

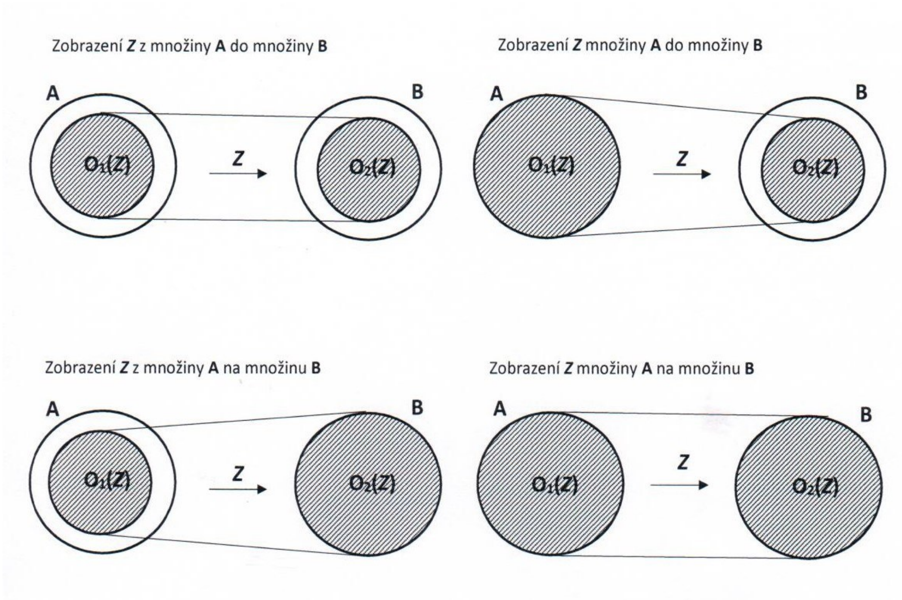
Rozlišujeme následující **typy zobrazení R**:

- I) Je–li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se **R** **zobrazení množiny A do množiny B**.

- II) Je–li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se **R** **zobrazení z množiny A na množinu B**.

- III) Je–li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se **R** **zobrazení množiny A na množinu B**.

- IV) Je–li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se **R** **zobrazení z množiny A do množiny B**.



*Zobrazení Z z množiny A do množiny B se nazývá* ***prosté*** *zobrazení právě tehdy, když relace $Z^{-1}$ je zobrazení z množiny B do množiny A.*

Uzlový graf prostého zobrazení Z z množiny A do množiny B je charakteristický tím, že do každého bodu, který znázorňuje prvek $y \in B$, směřuje nejvýše jedna šipka. Můžeme tedy říci, že platí následující věta: Zobrazení Z z množiny A do množiny B je prosté právě tehdy, když pro každé $y \in B$ platí, že je obrazem nejvýše jednoho prvku $x \in A$ v zobrazení Z.

*V praxi používáme pro rozlišení prostého zobrazení následující tvrzení: Zobrazení Z z množiny A do množiny B je prosté právě tehdy, když* ***každé dva různé vzory mají různé obrazy.***

**Př. 1**: Jsou dány množiny A = {a, b, c} a B = {u, v}. Nechť $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$ jsou binární relace z množiny A do množiny B definované takto:
a) $R_1$ = {[a, v], [b, v], [c, u]}, b) $R_2$ = {[a, u], [b, v]},
c) $R_3$ = {[a, v], [b, v], [c, v]}, d) $R_4$ = {[a, u], [b, u]}.
Rozhodněte, zda tyto relace jsou zobrazení z množiny A do množiny B. Pokud ano, určete typ zobrazení.
a) $R_1$ je zobrazení množiny A na množinu B, není prosté.
b) $R_2$ je prosté zobrazení z množiny A na množinu B.
c) $R_3$ je zobrazení množiny A do množiny B, není prosté.
d) $R_4$ je zobrazení z množiny A do množiny B, není prosté.

**Př. 2**: Jsou dány množiny A = {x, y, z}, B = {a, b}. Rozhodněte, zda dané relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení z A do B.

a) $\mathbf{R_1}$ = {[x,a], [y,b], [z,a], [z,b]},

b) $\mathbf{R_2}$ = {[x,a], [z,b]},

c) $\mathbf{R_3}$ = {[x,a], [y,a], [z,a]}.

**$R_1$** není zobrazení.

**$R_2$** je prosté zobrazení z množiny A na množinu B.

**$R_3$** je zobrazení celé množiny A na množinu B, není prosté (nemůže být).

**Př. 3**: Jsou dány množiny A = {x, y, a, c}, B = {c, x, b, z}.

a) Rozhodněte, o jaký typ zadaných zobrazení se jedná.

R = {[x, z], [c, c], [y, c]}, S = {[x, z], [y, z], [a, z], [c, x]}.

b) Zapište výčtem prvků jednu binární relaci z množiny A do množiny B, která není zobrazením.

c) Zapište výčtem prvků

1) jedno zobrazení **$R_1$** z množiny A do množiny B,

2) jedno zobrazení **$R_2$** množiny A do množiny B,

3) jedno zobrazení **$R_3$** množiny A na množinu B,

4) jedno zobrazení **$R_4$** z množiny A na množinu B.

Řešení: a) R je zobrazení z množiny A do množiny B, není prosté.

S je zobrazení množiny A do množiny B, není prosté.

b) T = {[x, z], [x, b], [a, z], [c, x]}.

c) **$R_1$** = {[x, z]}, je prosté.

**$R_2$** = {[x, z], [y, z], [a, z], [c, z]}, není prosté.

**$R_3$** = {[x, c], [y, b], [a, z], [c, x]}, je prosté.

**$R_4$** neexistuje.

*Prosté zobrazení množiny A na množinu B nazýváme* ***bijektivní zobrazení*** *nebo také* ***vzájemně jednoznačné zobrazení****.*

**Př. 4**: Jsou dány množiny A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d}. Rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná a zda je toto zobrazení prosté:

a) **$R_1$** = {[1,a], [2,c], [3,d]},

b) **$R_2$** = {[1,a], [2,c], [3,d], [4,a]},

c) **$R_3$** = {[2,a], [1,c], [3,b], [4,d]}. Vzájemně jednoznačné zobrazení.

a) Prosté zobrazení z množiny A do množiny B.

b) Zobrazení množiny A do množiny B, není prosté.

c) Prosté zobrazení množiny A na množinu B.

***Permutací*** *konečné množiny A nazýváme každé prosté zobrazení množiny A na množinu A (vzájemně jednoznačné zobrazení).*

**Př. 5**: Zapište všechny permutace tříprvkové množiny A = {1, 2, 3}.

a = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, b = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, c = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

d = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, e = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, f = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

***Definice:*** *Nechť* ***R*** *je zobrazení z množiny M do množiny N a* ***S*** *je zobrazení z množiny N do množiny K. Pak relace* ***R*** ○ ***S*** *je zobrazení a nazývá se* ***složené zobrazení*** *ze zobrazení* ***R*** *a* ***S****.*

**Př. 6:** Jsou dána zobrazení R, S v množině A = {1, 2, 3, 4} takto:

R = {[1, 3], [4, 2], [2, 3], [3, 1]},

S = {[1, 1], [4, 2], [2, 1], [3, 4]}.

Určete složené relace R ○ S, S ○ R.

*Řešení:* R ○ S = {[1, 4], [4, 1], [2, 4], [3, 1]},

S ○ R = {[1, 3], [4, 3], [2, 3], [3, 2]}. Vidíme, že R ○ S ≠ S ○ R.

*Složení dvou zobrazení je vždy zobrazení, složení dvou permutací je permutace.*

**Př. 7**: Složte permutace b ○ c, f ○ d, e ○ b z předchozího příkladu.

b ○ c = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ = d , f ○ d = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ = b, e ○ b = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ = c.

Povšimněte si, že platí e ○ d = d ○ e = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, což je identická permutace. Obě permutace d, e jsou navzájem inverzní.

*Řekneme, že množiny A, B jsou* ***ekvivalentní*** *právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Značíme A ~ B.*

**Př. 8**: Jsou dány množiny A = {a, b, c}, B = {x, y}, C = {1, 2, 3}. Rozhodněte, které množiny jsou ekvivalentní.

Ř: Množiny A, B nejsou ekvivalentní (neexistuje prosté zobrazení množiny A na množinu B). Množiny A, C jsou ekvivalentní (existuje prosté zobrazení množiny A na množinu C, například R = {[a,3],[b,1],[c,2]}), tj. **A ~ C**.

*Množina M je **vlastní podmnožinou** množiny N právě tehdy, když M je podmnožinou N a současně $M \neq N$.*

*Řekneme, že množina A je **konečná** právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A.*

*Řekneme, že množina B je **nekonečná** právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B, která je ekvivalentní s množinou B.*

**Př. 9**: Uvažujme množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel a množinu S všech kladných sudých čísel. Zjistěte, zda jsou ekvivalentní.

*Řešení*: Připomeneme, že $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5,\ldots\}$, $S = \{2, 4, 6, 8, 10,\ldots\}$.
Uvažujme relaci $R = \{[x,y] \in \mathbb{N} \times S;\ y = 2x\}$.

Relace R je prosté zobrazení množiny $\mathbb{N}$ na množinu S, neboť
ke každému $x \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno $y \in S$ takové, že $[x,y] \in R$,
ke každému $y \in S$ existuje právě jedno $x \in \mathbb{N}$ takové, že $[x,y] \in R$.

Tedy $\mathbb{N} \sim S$.

Množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel je nekonečná, neboť je ekvivalentní s množinou S všech kladných sudých čísel, přičemž S je vlastní podmnožinou množiny $\mathbb{N}$.

*Nechť A, B jsou* ***konečné*** *množiny. Pak platí:* $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$*, tedy dvě konečné množiny jsou ekvivalentní, právě když mají stejný počet prvků.*

**Př. 10**: Jsou dány množiny M = $\{1,2,3,4\}$ a N = $\{a,b,c,d\}$.

a) Definujte výčtem prvků relaci R z množiny M do N, která není zobrazením.
b) Definujte relaci Z, která je zobrazením z množiny N do M a určete jeho typ.
c) Zapište výčtem prvků relaci R•Z a rozhodněte, zda je tato relace zobrazením. Pokud ano, určete, zda je prosté.
d) Zapište dvě různé bijekce množiny N na množinu M.
e) Na množině N definujte dvě různé permutace $P_1$, $P_2$ a určete permutace $P_1 \bullet P_2$ a $P_2 \bullet P_1$.

Řešení: a) R = {[2, b], [2, c], [3, a]}.

b) $Z_1$ = {[c, 4]}. Prosté zobrazení z N do M.
$Z_2$ = {[a, 4], [b, 4], [c, 1], [d, 1]}. Zobrazení celé N do M, není prosté.

c) $R \bullet Z_1$ = {[2, 4]}. Prosté zobrazení z M do M.
$R \bullet Z_2$ = {[2, 4], [2, 1], [3, 4]}. Není zobrazení.

d) $B_1$ ={[a, 4], [b, 3], [c, 2], [d, 1]}, $B_2$ ={[a, 2], [b, 4], [c, 3], [d, 1]}. Platí A ~ B.

e) $P_1$ = {[a, b], [b, c], [c, d], [d, a]}, $P_2$ = {[a, c], [b, d], [c, b], [d, a]}.

Jinak zapsáno $P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$.

$P_1 \bullet P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & a & c \end{pmatrix}$, $P_2 \bullet P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & b \end{pmatrix}$.

**Př. 11**: Je dána množina M = $\{1,2,3\}$. V množině M jsou dány relace R, T, U, V takto:

R = $\{[x,y] \in M \times M;\ x \neq y \ \Rightarrow\ x + y = 5\}$,
T = $\{[x,y] \in M \times M;\ x \neq 2 \ \vee\ y = x + 1\}$,
U = $\{[x,y] \in M \times M;\ x < 3 \ \wedge\ y = x + 1\}$,
V = $\{[1,3], [2,1], [3,2]\}$.

a) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z relací R, T, U, V zobrazení v množině M. Pokud ano, určete přesně jejich typ. Je některá z těchto relací permutací na množině M?

b) Zapište relace $R^{-1}$, $V^{-1}$, $V \bullet V$, $U \bullet V$, $R \bullet U$, $R \bullet (V \bullet U)$. Je některá z těchto relací zobrazením v množině M? Pokud ano, určete přesně typ.

Řešení: a) $R = \{[2, 3], [3, 2], [1, 1], [2, 2], [3, 3]\}$. Není zobrazení.

$T = \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [2, 3]\}$. Není zobrazení.

$U = \{[1, 2], [2, 3]\}$. Prosté zobrazení z M do M.

$V = \{[1, 3], [2, 1], [3, 2]\}$. Permutace množiny M.

b) $R^{-1} = \{[3, 2], [2, 3], [1, 1], [2, 2], [3, 3]\}$. Není zobrazení.

$V^{-1} = \{[3, 1], [1, 2], [2, 3]\}$. Permutace množiny M.

$V \bullet V = \{[1, 2], [2, 3], [3, 1]\}$. Permutace množiny M.

$U \bullet V = \{[1, 1], [2, 2]\}$. Prosté zobrazení z M do M.

$R \bullet U = \{[3, 3], [1, 2], [2, 3]\}$. Zobrazení celé M do M, není prosté.

$V \bullet U = \{[2, 2], [3, 3]\}$. Prosté zobrazení z M do M.

$R \bullet (V \bullet U) = \{[2, 3], [3, 2], [2, 2], [3, 3]\}$. Není zobrazení.