MA0004 Matematická analýza 1, 1. seminář

18. 2. 2025

Náplň cvičení

1. Posloupnosti
   - Opakování znalostí ze střední školy
   - Monotonie a omezenost posloupnosti
   - Limita posloupnosti

Literatura

- Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.
- Bušek, I. *Řešené maturitní úlohy z matematiky.* Praha: SPN, 1985.
- Odvárko, O. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady.* Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-195-7.

Opakování znalostí o posloupnostech ze střední školy

Zopakujte si (doma):

- posloupnosti a jejich vlastnosti (pojem posloupnost, rekurentní určení posloupnosti, některé vlastnosti posloupností)
- aritmetická posloupnost
- geometrická posloupnost

Monotonie a omezenost posloupnosti

Příklad 1: Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) monotónní:

(a) $\left(\frac{-1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$

(b) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

(c) $\left(\frac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Příklad 2: Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) omezená:

(a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

(b) $\left(\frac{3n+4}{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

(c) $((-1)^n \cdot n)_{n=1}^{\infty}$

Příklad 1: Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) monotónní:

(a) $\left(\frac{-1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$

(b) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

(c) $\left(\frac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Příklad 2: Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) omezená:

(a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

(b) $\left(\frac{3n+4}{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

(c) $((-1)^n \cdot n)_{n=1}^{\infty}$

Výsledky:

1.(a) rostoucí, (b) není monotónní, (c) klesající;

2.(a) omezená, (b) omezená, (c) není omezená.

Limita posloupnosti

Limita posloupnosti

Definice: Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu L, jestliže ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro všechna $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Limita posloupnosti

Limita posloupnosti

Definice: Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu L, jestliže ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro všechna $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Příklad 3a (úkol pro dvojice): Posloupnost $\{a_n\}$ je dána následujícím předpisem: $a_n = \frac{(-1)^n + n}{2n}$. Platí pro ni, že $L = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

- Vypočítejte prvních pár členů posloupnosti $\frac{(-1)^n + n}{2n}$.
- Pro Vámi zvolenou kladnou hodnotu parametru ε najděte vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platila předchozí definice.

Limita posloupnosti

Limita posloupnosti

Definice: Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu L, jestliže ke každému reálnému $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro všechna $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Příklad 3a (úkol pro dvojice): Posloupnost $\{a_n\}$ je dána následujícím předpisem: $a_n = \frac{(-1)^n + n}{2n}$. Platí pro ni, že $L = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

- Vypočítejte prvních pár členů posloupnosti $\frac{(-1)^n + n}{2n}$.
- Pro Vámi zvolenou kladnou hodnotu parametru ε najděte vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platila předchozí definice.

K ověření správnosti vašeho řešení pomůže soubor `cv1_priklad3a.ggb`, který si můžete stáhnout v interaktivní osnově *Matematická analýza 1 – semináře* a otevřít v Grafickém kalkulátoru Geogebry.

Počítání s nekonečnem

Při výpočtu $\lim_{n\to\infty} a_n$ můžeme začít dosazením $n = \infty$ a pokusit se o vyčíslení. Zkuste to u následujících výrazů, které jsou předpisy pro $\{a_n\}$:

1. $\frac{14}{n},\ n,\ n^2,\ n^2+n,\ 5\cdot n^2,\ \sqrt{n},\ 1234-n,\ 2n+1234$
2. $\frac{n^2+4}{n-1},\ n-\sqrt{n^2+3},\ 1^n,\ n^0$

Počítání s nekonečnem

Při výpočtu $\lim_{n\to\infty} a_n$ můžeme začít dosazením $n = \infty$ a pokusit se o vyčíslení. Zkuste to u následujících výrazů, které jsou předpisy pro $\{a_n\}$:

1. $\frac{14}{n}$, n, n^2, $n^2 + n$, $5 \cdot n^2$, $\sqrt{n}$, $1234 - n$, $2n + 1234$
2. $\frac{n^2+4}{n-1}$, $n - \sqrt{n^2+3}$, 1^n, n^0

Neurčité výrazy:

$$\left[\pm\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [\infty - \infty], [0 \cdot \infty], [0^0], [\infty^0], [1^\infty]$$

Počítání s nekonečnem

Při výpočtu $\lim_{n\to\infty} a_n$ můžeme začít dosazením $n = \infty$ a pokusit se o vyčíslení. Zkuste to u následujících výrazů, které jsou předpisy pro $\{a_n\}$:

1. $\frac{14}{n},\ n,\ n^2,\ n^2+n,\ 5\cdot n^2,\ \sqrt{n},\ 1234-n,\ 2n+1234$
2. $\frac{n^2+4}{n-1},\ n-\sqrt{n^2+3},\ 1^n,\ n^0$

Neurčité výrazy:

$$\left[\pm\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [\infty-\infty], [0\cdot\infty], [0^0], [\infty^0], [1^\infty]$$

U posloupností (a obecně u funkcí) můžeme zkoumat rychlost jejich růstu a dle tohoto kritéria je porovnávat. Skutečnost, že posloupnost $\{a_n\}$ roste výrazně pomaleji než posloupnost $\{b_n\}$ zapisujeme $a_n << b_n$. Pro reálná čísla $0 < a < b, 1 < \alpha < \beta$ platí:

$$n^a << n^b << \alpha^n << \beta^n << n! << n^n$$

Počítání s nekonečnem

Při výpočtu $\lim_{n\to\infty} a_n$ můžeme začít dosazením $n = \infty$ a pokusit se o vyčíslení. Zkuste to u následujících výrazů, které jsou předpisy pro $\{a_n\}$:

1. $\frac{14}{n},\ n,\ n^2,\ n^2+n,\ 5\cdot n^2,\ \sqrt{n},\ 1234-n,\ 2n+1234$
2. $\frac{n^2+4}{n-1},\ n-\sqrt{n^2+3},\ 1^n,\ n^0$

Neurčité výrazy:

$$\left[\pm\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [\infty-\infty], [0\cdot\infty], [0^0], [\infty^0], [1^\infty]$$

U posloupností (a obecně u funkcí) můžeme zkoumat rychlost jejich růstu a dle tohoto kritéria je porovnávat. Skutečnost, že posloupnost $\{a_n\}$ roste výrazně pomaleji než posloupnost $\{b_n\}$ zapisujeme $a_n << b_n$. Pro reálná čísla $0 < a < b, 1 < \alpha < \beta$ platí:

$$n^a << n^b << \alpha^n << \beta^n << n! << n^n$$

Příklad: Posloupnosti $\{n^2+3n-1\}$ a $\{n^2\}$ rostou stejně rychle, členy $3n-1$ můžeme u 1. posloupnosti ignorovat.

Příklad 3b: Pro posloupnost $\{a_n\}$ najděte $\lim_{n\to\infty} a_n$. Pomožte si grafickým znázorněním prvních pár členů.

(a) $a_n = \frac{1}{n}$
(b) $a_n = -\frac{1}{n}$
(c) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$
(d) $a_n = c\ (c \in \mathbb{R})$
(e) $a_n = n$
(f) $a_n = -n$

Příklad 3c: Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$ zadaných posloupností:

(a) $a_n = \frac{3n^2+1}{2n^2+1}$
(b) $a_n = \frac{3n+1}{2n^2+1}$
(c) $a_n = \frac{3n^2+1}{2n+1}$

Příklad 4: Vypočítejte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3-n^2}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2}{n+1} - \frac{6n^3}{n^2-3}\right)$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^4-(n-2)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(f) $\lim_{n\to\infty} n\left(n - \sqrt{n^2+3}\right)$

(g) $\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{6n+1}{2n-3}}$

(h) $\lim_{n\to\infty} \ln \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+3}}$

Příklad 4: Vypočítejte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3-n^2}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2}{n+1} - \frac{6n^3}{n^2-3}\right)$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^4-(n-2)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(f) $\lim_{n\to\infty} n\left(n - \sqrt{n^2+3}\right)$

(g) $\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{6n+1}{2n-3}}$

(h) $\lim_{n\to\infty} \ln \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+3}}$

Výsledky:

4. (a) -2, (b) $-\infty$, (c) $\frac{15}{2}$, (d) 0, (e) 0, (f) $-\frac{3}{2}$, (g) 27, (h) $\ln 2$.

Příklad 4: Vypočítejte:

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{2+3^n}{3^n-2}$

(j) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^2}$

(k) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$

(l) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(1+2+3+\ldots+n\right)$

(m) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{3} - \frac{3+5+7+\cdots+(2n+1)}{n-5}\right)$

(n) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

(o) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$ (pomůže znalost $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$)

(p) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{9n-7}$ (pomůže znalost $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$)

Limita posloupnosti

Příklad 4: Vypočítejte:

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{2+3^n}{3^n-2}$

(j) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^2}$

(k) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$

(l) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(1+2+3+\ldots+n\right)$

(m) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{3} - \frac{3+5+7+\cdots+(2n+1)}{n-5}\right)$

(n) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

(o) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$ (pomůže znalost $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$)

(p) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{9n-7}$ (pomůže znalost $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$)

Výsledky:

4. (i) 1, (j) ∞, (k) 0, (l) $\frac{1}{2}$, (m) $-\frac{19}{3}$, (n) $\frac{4}{3}$, (o) $e^{-\frac{1}{3}}$, (p) e^3.