

MA0004 Matematická analýza 1, 4. seminář

11. 3. 2025

1 Derivace funkce jedné proměnné

- Geometrický význam derivace
- Využití základních vzorců
- Derivace složené funkce
- Úprava funkce před stanovením derivace
- Tečna a normála funkce

Literatura a použité zdroje

- Došlá, Z., Kuben, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. MU: Brno, 2004.
- Zemánek, P., Hasil, P. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*. Brno, 2012. Dostupné z: <https://is.muni.cz/elportal/?id=980552>

Derivace funkce

Definice: Derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 nazveme limitu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Značit budeme $f'(x)$, resp. y' . Je-li limita vlastní, mluvíme o vlastní derivaci, v opačném případě se jedná o derivaci nevlastní. V případě, že existují jen jednostranné limity, mluvíme o derivaci zprava (zleva).

Ukázka animace vysvětlující geometrický význam derivace $f'(x)$ v určitém bodě $S_2 = [x_0, f(x_0)]$, k němuž se přibližuje bod $S_1 = [a, f(a)]$:

<https://www.geogebra.org/classic/m7vhpa2u>

Příklad 1: Zderivujte následující funkce:

$$1 \quad f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$3 \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

$$4 \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$5 \quad f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$$

Příklad 1: Zderivujte následující funkce:

1 $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

2 $f(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

3 $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

4 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

5 $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

Výsledky:

1. $\left[\frac{11}{6} \cdot \sqrt[6]{x^5} \right]$, 2. $\left[\frac{(x-1) \cdot \sqrt{x}}{2x^2} \right]$, 3. $[x \cdot (2 \ln x + 1)]$,

4. $\left[-\frac{4x}{(x^2-1)^2} \right]$, 5. $\left[\frac{1}{1-\sin x} \right]$

Příklad 2: Zderivujte následující funkce:

1 $f(x) = \sin^4 x$

2 $f(x) = e^{x^2-2x+1}$

3 $f(x) = \ln^3(x^2 - 1)$

4 $f(x) = \operatorname{tg}^3 2x$

5 $f(x) = 5^{x^2-1} + 3$

6 $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}$

7 $f(x) = \frac{1}{(5-2x)^2}$

8 $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$

Příklad 2: Zderivujte následující funkce:

1 $f(x) = \sin^4 x$

2 $f(x) = e^{x^2-2x+1}$

3 $f(x) = \ln^3(x^2 - 1)$

4 $f(x) = \operatorname{tg}^3 2x$

5 $f(x) = 5^{x^2-1} + 3$

6 $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}$

7 $f(x) = \frac{1}{(5-2x)^2}$

8 $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$

Výsledky:

1. $[4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x]$, 2. $[2(x-1) \cdot e^{x^2-2x+1}]$, 3. $\left[\frac{6x \cdot \ln^2(x^2-1)}{x^2-1}\right]$, 4. $\left[\frac{6\sin^2 2x}{\cos^4 2x}\right]$

5. $[2x \cdot 5^{x^2-1} \cdot \ln 5]$, 6. $\left[\frac{x(2+3x^2) \cdot \sqrt{1+x^2}}{x^2+1}\right]$, 7. $\left[\frac{4}{(5-2x)^3}\right]$, 8. $\left[\frac{1}{1+x^2}\right]$

Příklad 3: Zderivujte následující funkce:

1 $f(x) = x^x$

2 $f(x) = x^{\ln x}$

3 $f(x) = x^{\sin x}$

Příklad 3: Zderivujte následující funkce:

1 $f(x) = x^x$

2 $f(x) = x^{\ln x}$

3 $f(x) = x^{\sin x}$

Výsledky:

1. $[x^x \cdot (\ln x + 1)]$, 2. $[2 \cdot \ln x \cdot x^{\ln x - 1}]$, 3. $[x^{\sin x} \cdot (\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})]$

Příklad 4: Napište rovnici tečny a normály grafu dané funkce v bodě $T = [x_0, y_0]$.

1 $f(x) = \frac{3x-1}{2x+3}$, $T = [2, ?]$

2 $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+1}$, $T = [-\frac{1}{2}, ?]$

3 $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$, $T = [2, ?]$

4 $f(x) = x \cdot \ln x$, $T = [e, ?]$

Příklad 4: Napište rovnici tečny a normály grafu dané funkce v bodě $T = [x_0, y_0]$.

1 $f(x) = \frac{3x-1}{2x+3}$, $T = [2, ?]$

2 $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+1}$, $T = [-\frac{1}{2}, ?]$

3 $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$, $T = [2, ?]$

4 $f(x) = x \cdot \ln x$, $T = [e, ?]$

Výsledky:

4.1. $T = [2, \frac{5}{7}]$, tečna: $y = \frac{11}{49}x + \frac{13}{49}$, normála: $y = -\frac{49}{11}x + \frac{741}{77}$

4.2. $T = [-\frac{1}{2}, -1]$, tečna: $y = -2x - 2$, normála: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

4.3. $T = [2, 1]$, tečna: $y = -\frac{1}{2}x + 2$, normála: $y = 2x - 1$

4.4. $T = [e, e]$, tečna: $y = 2x - e$, normála: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}e$

Příklad 5: Napište rovnici tečny a normály

- 1 ke kružnici $x^2 + y^2 = 2$ v jejím bodě $[1, -1]$
- 2 k parabole $y^2 = x$ v jejím bodě $[4, -2]$

Příklad 6: Napište rovnici tečny ke křivce $f(x) = x^2 - 4x + 3$, která svírá úhel $\varphi = 45^\circ$ s osou x .

Příklad 7: Napište rovnici tečny ke křivce $f(x) = x^2 - 2x + 3$, je-li tečna rovnoběžná s přímkou $p : 3x - y + 5 = 0$.

Příklad 5: Napište rovnici tečny a normály

- 1 ke kružnici $x^2 + y^2 = 2$ v jejím bodě $[1, -1]$
- 2 k parabole $y^2 = x$ v jejím bodě $[4, -2]$

Příklad 6: Napište rovnici tečny ke křivce $f(x) = x^2 - 4x + 3$, která svírá úhel $\varphi = 45^\circ$ s osou x .

Příklad 7: Napište rovnici tečny ke křivce $f(x) = x^2 - 2x + 3$, je-li tečna rovnoběžná s přímkou $p : 3x - y + 5 = 0$.

Výsledky:

5.1. Tečna: $y = x - 2$, normála: $y = -x$

5.2. Tečna: $y = -\frac{1}{4}x - 1$, normála: $y = 4x - 18$

6. $T = \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right]$, tečna: $y = x - \frac{13}{4}$

7. $T = \left[\frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right]$, tečna: $y = 3x - \frac{13}{4}$