

MA0004 Matematická analýza 1, 5. seminář

18. 3. 2025

1 Výpočet limity s pomocí L'Hospitalova pravidla

Literatura a použité zdroje

- Zemánek, P., Hasil, P. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*. Brno, 2012. Dostupné z:
<https://is.muni.cz/elportal/?id=980552>

L'Hospitalovo pravidlo

Věta: Bud' $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť je splněna jedna z podmínek

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka: L'Hospitalovo pravidlo lze využít pro výpočet limit z neurčitých výrazů

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Použití L'Hospitalova pravidla

- 1 Limity typu $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$ se řeší L'Hospitalovým pravidlem přímo, přičemž jej můžeme použít opakovaně.
- 2 Limity typu $[\infty - \infty]$ se řeší úpravou výrazu a převodem na výše uvedené typy, například takto:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

- 3 Limity typu $[0 \cdot \infty]$ se řeší úpravou

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

- 4 Limity typu $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$ se řeší úpravou

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = [e^{0 \cdot \infty}]$$

a následným výpočtem limity z výrazu $g(x) \cdot \ln f(x)$, což vede na předchozí případ.

Příklad 1: Vypočtěte následující limity:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cdot \sin x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

Příklady na použití L'Hospitalova pravidla

Příklad 1: Vypočtěte následující limity:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cdot \sin x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

Výsledky:

$$1. \left[\frac{4}{3}\right], 2. \left[\frac{1}{2}\right], 3. \left[-\frac{2}{\pi}\right], 4. [0], 5. [0]$$

Příklad 1: Vypočtěte následující limity:

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cdot \ln \frac{1}{x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 - \sin x) \cdot \operatorname{tg} x$

9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$

10. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \cdot \ln(x - 1)$

Příklad 1: Vypočtěte následující limity:

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cdot \ln \frac{1}{x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 - \sin x) \cdot \operatorname{tg} x$

9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$

10. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \cdot \ln(x - 1)$

Výsledky:

6. $[0]$, 7. $[\infty]$, 8. $[0]$, 9. $[0]$, 10. $[0]$

Příklad 1: Vypočtěte následující limity:

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\cos \frac{\pi}{2} x \right)^{\ln x}$$

Příklady na použití L'Hospitalova pravidla

Příklad 1: Vypočtete následující limity:

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\cos \frac{\pi}{2} x \right)^{\ln x}$$

Výsledky:

$$11. \left[e^{-\frac{9}{2}} \right], \quad 12. \left[\frac{1}{e} \right], \quad 13. \left[\frac{1}{e} \right], \quad 14. \left[e^{-\frac{1}{6}} \right], \quad 15. [1]$$

Příklad 1: Vypočtěte následující limity:

16. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \cdot \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$

18. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

Příklad 1: Vypočtěte následující limity:

16. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \cdot \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$

18. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

Výsledky:

16. $\left[\frac{1}{2} \right]$, 17. $\left[\frac{1}{6} \right]$, 18. $[0]$