

# MA0004 Matematická analýza 1, 6. seminář

25. 3. 2025

- 1 Monotónnost a lokální extrémny
- 2 Konvexnost/konkávnost a inflexní body
- 3 Asymptoty
- 4 Vyšetřování průběhu funkce

## Literatura a použité zdroje

- Zemánek, P., Hasil, P. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*. Brno, 2012. Dostupné z:  
<https://is.muni.cz/elportal/?id=980552>
- Ústav matematiky, FSI VUT Brno. *MATEMATIKA online – Matematika I*. Dostupné z:  
<http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-I/sc-5-sr-1-a-4/default.aspx>

**Příklad 1:** Určete intervaly monotonie a lokální extrémý pro následující funkce.

a)  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ ,  $D(f) = \mathbb{R}$

b)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $D(f) = \mathbb{R}^+ - \{1\}$

c)  $f(x) = x - 2 \cdot \sin x$ ,  $D(f) = (0, 2\pi)$

d)  $f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}$ ,  $D(f) = \mathbb{R}$

e)  $f(x) = \sqrt[3]{(x^4 - 1)^2}$

f)  $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x - 1)^2}$

# Monotónnost a lokální extrémý – výsledky

- a) na  $(-\infty, 0)$  a  $(2, \infty)$  rostoucí, na  $(0, 2)$  klesající,  
 $[2, 4 \ln 2]$  lokální maximum,  $[0, 0]$  lokální minimum
- b) na  $(0, e)$  klesající, na  $(e, \infty)$  rostoucí, na  $(0, 2)$  klesající,  
 $[e, e]$  lokální minimum
- c) na  $(0, \frac{\pi}{3})$  a  $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$  klesající, na  $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$  rostoucí,  
 $[\frac{\pi}{3}, \pi - \sqrt{3}]$  lokální minimum,  $[\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}]$  lokální maximum
- d) na  $(-\infty, -3)$  a  $(-1, \infty)$  klesající, na  $(-3, -1)$  rostoucí,  
 $[-3, 0]$  lokální minimum,  $[-1, 4e]$  lokální maximum
- e) na  $(-\infty, -1)$  a  $(0, 1)$  klesající, na  $(-1, 0)$  a  $(1, \infty)$  rostoucí,  
 $[0, 1]$  lokální minimum,  $[-1, 0], [1, 0]$  lokální maxima
- f) na  $(\frac{9}{11}, 1)$  klesající, na  $(-\infty, \frac{9}{11})$  a  $(1, \infty)$  rostoucí,  
 $[1, 0]$  lokální minimum,  $[\frac{9}{11}, \frac{3^6 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{11^{11}}}]$  lokální maximum

**Příklad 2:** Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce a najděte případné inflexní body u následujících funkcí.

a)  $f(x) = x^3 - 12x$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 12$ ,  $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

b)  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ ,  $f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x)$ ,  $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

c)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ ,  $D(f) = D(f') = \mathbb{R}^+ - \{1\}$

d)  $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1 - x^2)$ ,  $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

e)  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3$ ,  $D(f) = \mathbb{R}$

f)  $f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}$ ,  $f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{e^x}$ ,  $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

# Konvexnost/konkávnost a inflexní body – výsledky

- a) na  $(-\infty, 0)$  konkávní, na  $(0, \infty)$  konvexní,  $[0, 0]$  inflexní bod
- b) na  $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$  a  $(2 + \sqrt{2}, \infty)$  konvexní, na  $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$  konkávní,  $\left[2 - \sqrt{2}, (6 - 4\sqrt{2}) e^{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}\right]$ ,  $\left[2 + \sqrt{2}, (6 + 4\sqrt{2}) e^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}\right]$  inflexní body
- c) na  $(0, 1)$  a  $(e^2, \infty)$  konkávní, na  $(1, e^2)$  konvexní,  $\left[e^2, \frac{e^2}{2}\right]$  inflexní bod
- d) na  $(-\infty, -\sqrt{3})$  a  $(0, \sqrt{3})$  konkávní, na  $(-\sqrt{3}, 0)$  a  $(\sqrt{3}, \infty)$  konvexní,  $[0, 0]$ ,  $\left[-\sqrt{3}, e^{-\frac{3}{2}}\right]$ ,  $\left[\sqrt{3}, e^{-\frac{3}{2}}\right]$  inflexní body
- e) na  $(-\infty, -1)$  a  $(2, \infty)$  konvexní, na  $(-1, 2)$  konkávní,  $[-1, -19]$ ,  $[2, -37]$  inflexní body
- f) na  $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$  a  $(-1 + \sqrt{2}, \infty)$  konvexní, na  $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$  konkávní,  $\left[-1 - \sqrt{2}, \frac{6 - 4\sqrt{2}}{e^{-1 - \sqrt{2}}}\right]$ ,  $\left[-1 + \sqrt{2}, \frac{6 + 4\sqrt{2}}{e^{-1 + \sqrt{2}}}\right]$  inflexní body

**Příklad 3:** Určete asymptoty bez směrnice u následujících funkcí:

a)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b)  $f(x) = 5x + \frac{\sin x}{x}$

c)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

**Příklad 4:** Určete asymptoty se směrnicí (tj. v nevlastních bodech  $\pm\infty$ ) u následujících funkcí:

a)  $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$ ,  $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b)  $f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2}$ ,  $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

c)  $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ ,  $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

**Příklad 3:** Určete asymptoty bez směrnice u následujících funkcí:

a)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b)  $f(x) = 5x + \frac{\sin x}{x}$

c)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

**Příklad 4:** Určete asymptoty se směrnicí (tj. v nevlastních bodech  $\pm\infty$ ) u následujících funkcí:

a)  $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$ ,  $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b)  $f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2}$ ,  $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

c)  $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ ,  $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

**Výsledky:**

3. a)  $x = 0$ , b) neexistuje, c)  $x = 1$

4. a)  $y = 3x + 3$ , b)  $y = -x$ , c)  $y = 0$



# Celkový postup vyšetřování průběhu funkce

- Definiční obor
- Lichost, sudost, periodičnost
- Charakteristika bodů nespojitosti (výpočet jednostranných limit)
- Řešení rovnice  $f(x) = 0$  (intervaly, kdy je funkce nad osou  $x$  či pod osou  $x$ )
- Řešení rovnice  $f'(x) = 0$  (intervaly monotónnosti, lokální extrémy)
- Řešení rovnice  $f''(x) = 0$  (intervaly konvexnosti/konkávnosti, inflexní body)
- Asymptoty

# Průběh funkce – příklady

**Příklad 5:** U funkce  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$  byl vyšetřen její průběh. Načrtněte graf funkce dle dostupných informací (viz soubor Příklad 266 - vzorový.docx ve Studijních materiálech, ve složce Semináře).

**Příklad 6:** Vyšetřete průběh následujících funkcí a načrtněte jejich graf, je-li dána jejich první i druhá derivace.

a)  $f(x) = \frac{x}{3-x^2}$ ,  $f'(x) = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$ ,  $f''(x) = \frac{2x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$

b)  $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right)$ ,  $f'(x) = \frac{x^2-1}{2x^2}$ ,  $f''(x) = \frac{1}{x^3}$

c)  $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ ,  $f'(x) = \frac{2-\ln x^2}{x^2}$ ,  $f''(x) = \frac{2\ln x^2-6}{x^3}$

**Příklad 7:** Vyšetřete průběh následujících funkcí a načrtněte jejich graf.

a)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

b)  $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$

c)  $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$