

MA0004 Matematická analýza 1, 8. seminář

8. 4. 2025

1 Diferenciální počet funkcí více proměnných

- Definiční obor
- Limita funkce dvou proměnných
- Spojitost funkce dvou proměnných

- Kuben J. a kol. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z:
home1.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13_14/materialy/Diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf
- Došlá Z., Došlý O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2. vydání, 1999. ISBN 80-210-2052-0. Dostupné z:
<http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/protisk.pdf>
- Klačka J. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně. 2009. Dostupné z:
http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021

- Kurášnová S., Vondra J. *Diferenciální počet funkcí více proměnných – interaktivní sbírka příkladů a testových otázek*. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2009. Dostupné z: <https://is.muni.cz/elportal/estud/prif/ps09/sbirka/web/index.html>
- Kadeřábek Z. *Limity funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. 2007. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/xpb8v/Limity_funkci_vice_promennych.pdf
- isibalo.com. *Matematika: Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 2020. Dostupné z: <https://isibalo.com/matematika/diferencialni-pocet-funkci-vice-promennych>

Funkce více proměnných

Definice: Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *reálná funkce n reálných proměnných* a množina M se nazývá *definiční obor* této funkce a značí se $D(f)$.

Poznámka:

- V případě $n = 2$ hovoříme (reálné) funkci dvou (reálných) proměnných x, y . Každé uspořádané dvojici $[x, y] \in D(f)$ je přiřazeno právě jedno $z \in \mathbb{R}$ takové, že $z = f(x, y)$.
- Pokud je funkce zadána předpisem $z = f(x, y)$ a není udaný definiční obor funkce, pak definičním oborem rozumíme množinu všech bodů $[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pro které tento předpis má smysl.
- Stanovení definičního oboru zadané funkce dvou proměnných bude častým úkolem. Kromě symbolického předpisu je možné definiční obor popsat i zakreslením příslušné oblasti v kartézské soustavě souřadnic (O, x, y) .

Příklad 1: Vyšetřete definiční obor následujících funkcí dvou proměnných a následně jej zakreslete v kartézském souřadném systému (O, x, y) .

a) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 9}$

b) $f(x, y) = \ln(x \cdot \ln(y - x))$

c) $f(x, y) = \sqrt{(1 - \ln y) \cdot \ln(-x)}$

d) $f(x, y) = \ln(x^2 - y) + \sqrt{x - 2y + 4}$

e) $f(x, y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$

f) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$

g) $f(x, y) = \sqrt{\left(x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} - 1\right) \cdot (x^2 + y^2 - 6x)}$

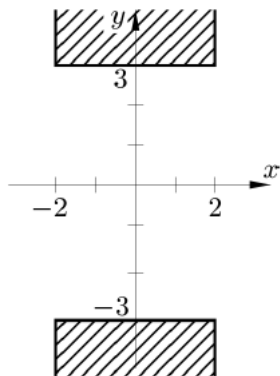
h) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$

Příklad 1 – výsledky

- a) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 2 \wedge |y| \geq 3\}$
- b) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, (x > 0 \wedge y > x+1) \vee (x < 0 \wedge y < x+1 \wedge y > x)\}$
- c) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, (0 < y \leq e \wedge x \leq -1) \vee (y > e \wedge -1 \leq x < 0)\}$
- d) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y < x^2 \wedge y \leq \frac{1}{2}x + 2\}$
- e) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, (x > 0 \wedge y > -2x^2) \vee (x < 0 \wedge y < -2x^2)\}$
- f) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, -1 - x^2 \leq y \leq 1 - x^2\}$
- g) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, \left(\frac{(y-2)^2}{4} + x^2 - 1 \geq 0 \wedge x^2 + y^2 - 6x \geq 0 \right) \vee \left(\frac{(y-2)^2}{4} + x^2 - 1 \leq 0 \wedge x^2 + y^2 - 6x \leq 0 \right)\}$
- h) $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, y^2 \geq -x, y^2 \geq x, y \in (0, 2)\}$

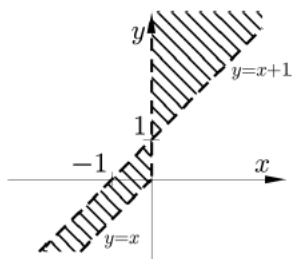
Zobrazení definičních oborů v rovině (O, x, y) najdete na následujících slajdech.

Příklad 1 – zakreslení definičních oborů v rovině



Obr. 1

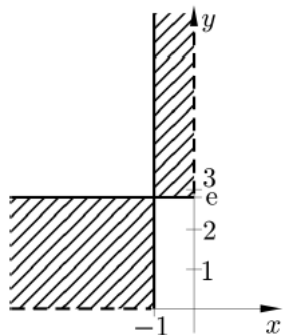
a)



Obr. 2

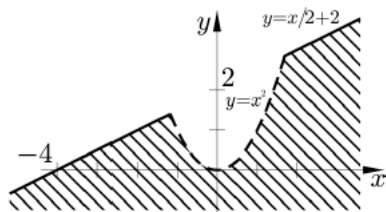
b)

Příklad 1 – zakreslení definičních oborů v rovině



Obr. 4

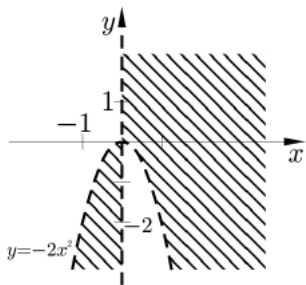
c)



Obr. 5

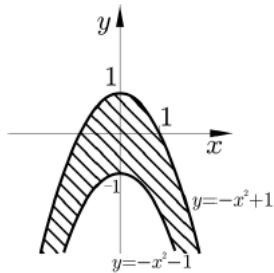
d)

Příklad 1 – zakreslení definičních oborů v rovině



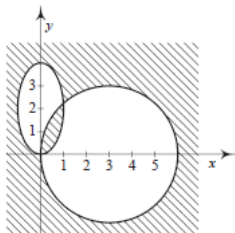
Obr. 6

e)

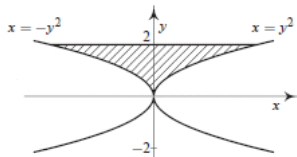


Obr. 7

f)



g)



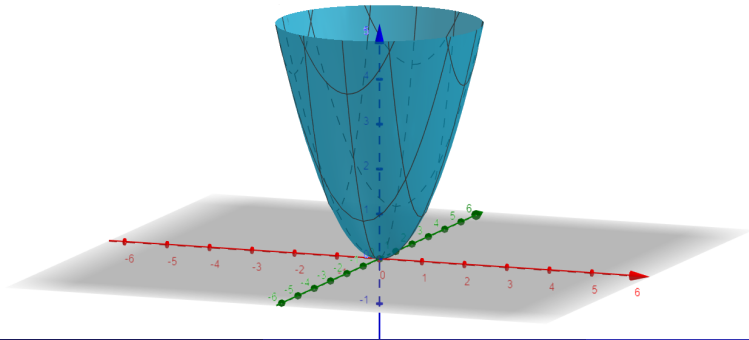
h)

Graf funkce dvou proměnných

Graf funkce dvou proměnných

Definice: Grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných nazýváme množinu uspořádaných trojic $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$, pro které $[x, y]$ patří do definičního oboru $D(f)$.

Graf funkce $z = x^2 + y^2$ vykresleného nástrojem Geogebra 3D grafy:



Limita funkce dvou proměnných

Definice: Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $M[x_0; y_0]$ limitu rovnou číslu L , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny body z ryzího δ -okolí bodu M platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. Píšeme

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0;y_0]} f(x, y) = L.$$

Poznámka:

- U funkcí více proměnných nemáme k dispozici L'Hospitalovo pravidlo.
- Postupujeme podobně jako u výpočtu limit z funkcí jedné proměnné: nejdříve dosadíme limitní bod do předpisu funkce. Pokud výraz nelze vyčíslit, hledáme jeho vhodnou úpravu tak, abychom jej zjednodušili a mohli dosadit do pozměněného výrazu.
- Platí stejná aritmetika limit pro součet, rozdíl, součin a podíl dvou výrazů jako u limit funkcí jedné proměnné.

Při výpočtu se může hodit tato věta:

Věta o součinu s ohraničenou funkcí

Věta: Necht' $\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0;y_0]} f(x,y) = 0$ a funkce g je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu $[x_0;y_0]$. Pak

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0;y_0]} f(x,y) \cdot g(x,y) = 0.$$

Příklad 2: Vypočítejte následující limity.

a)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

b)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (-4, -1)} \frac{(x-y)^2-9}{x^2+y^2}$$

c)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$$

d)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$$

e)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$$

f)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}$$

Příklad 2: Vypočítejte následující limity.

a)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

b)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (-4, -1)} \frac{(x-y)^2-9}{x^2+y^2}$$

c)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$$

d)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$$

e)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$$

f)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 2)} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}$$

Výsledky:

a) $\ln 2$, b) 0 , c) $\frac{3}{8}$, d) 12 , e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{4}{5}$

Příklad 2: Vypočítejte následující limity.

g)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} xy^2 \cdot \cos \frac{1}{xy^2}$$

h)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \cdot \sin \frac{1}{y}$$

i)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x + y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$$

j)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, \infty)} \frac{\cos y}{x + y}$$

k)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin xy}{x}$$

l)
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{e^{xy} - 1}{x}$$

Příklad 2: Vypočítejte následující limity.

g) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} xy^2 \cdot \cos \frac{1}{xy^2}$

h) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \cdot \sin \frac{1}{y}$

i) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x + y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$

j) $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, \infty)} \frac{\cos y}{x + y}$

k) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin xy}{x}$

l) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{e^{xy} - 1}{x}$

Výsledky:

g) 0, h) 0, i) 0, j) 0, k) 2, l) 2

- V případě funkce jedné proměnné se k limitnímu bodu blížíme po přímce $y = 0$, u funkcí dvou proměnných se k němu můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby, po různých přímkách, parabolách atd.
- Existence limity v daném bodě znamená, že **nezáleží na cestě**, po které se k danému bodu blížíme. Dostaneme-li různé hodnoty limity pro různé cesty, limita v daném bodě nemůže existovat.
- Uvedeme si několik způsobů, jak ukázat, že v zadaném bodě limita funkce neexistuje.

Metoda postupných limit

Věta: Označme

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right] = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] = L_2.$$

Existuje-li limita

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0;y_0]} f(x, y) = L,$$

pak platí $L = L_1 = L_2$.

Poznámka: Tato věta je implikací, takže slouží pouze jako metoda důkazu neexistence limity. Pokud ukážeme, že $L_1 \neq L_2$, pak to znamená, že limita nemůže existovat.

Přibližování po různých cestách

K limitnímu bodu $[x_0, y_0]$ se můžeme přibližovat po

- po přímkách, např. pomocí substituce $y = k \cdot (x - x_0) + y_0$, přičemž počítáme limitu pro $x \rightarrow x_0$,
- po parabolách, např. pomocí substituce $y = k \cdot (x - x_0)^2 + y_0$, přičemž opět počítáme limitu pro $x \rightarrow x_0$,
- po kružnicích pomocí polárních souřadnic, substitucí $x = x_0 + \varrho \cdot \cos \varphi$, $y = y_0 + \varrho \cdot \sin \varphi$, přičemž počítáme limitu pro $\varrho \rightarrow 0$,
- či po jiných obecných cestách.

Poznámka: Pokud po volbě nějaké cesty a následné substituci vyjde limita závislá na parametru k či pouze na φ , znamená to, že volba těchto parametrů mění hodnotu limity – tedy limita neexistuje.

V opačném případě (výsledek limity nezávisí na těchto parametrech) není existence limity prokázána!

Transformace do polárních souřadnic

$$x = x_0 + \varrho \cdot \cos \varphi,$$

$$y = y_0 + \varrho \cdot \sin \varphi,$$

kde $[x_0, y_0]$ je limitní bod a $\varrho > 0$, je možností, jak ukázat i existenci limity a spočítat její výsledek. Platí následující lemma:

Lemma pro výpočet limity pomocí polárních souřadnic

Lemma: Předpokládejme, že funkci $f(x, y)$ lze v polárních souřadnicích se středem v bodě $[x_0, y_0]$ vyjádřit ve tvaru

$$f(x, y) = L + g(\varrho) \cdot h(\varrho, \varphi), \quad L \in \mathbb{R}, \text{ kde}$$

- i) $\lim_{\varrho \rightarrow 0} g(\varrho) = 0$,
- ii) $h(\varrho, \varphi)$ je ohraničená na obdélníku $(0, \varrho_0) \times (0, 2\pi)$, kde $\varrho_0 > 0$.

Pak platí $\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0,y_0]} f(x, y) = L$.

Lemma: Předpokládejme, že funkci $f(x, y)$ lze v polárních souřadnicích se středem v bodě $[x_0, y_0]$ vyjádřit ve tvaru

$$f(x, y) = L + g(\varrho) \cdot h(\varrho, \varphi), \quad L \in \mathbb{R}, \text{ kde}$$

i) $\lim_{\varrho \rightarrow 0} g(\varrho) = 0,$

ii) $h(\varrho, \varphi)$ je ohraničená na obdélníku $(0, \varrho_0) \times (0, 2\pi)$, kde $\varrho_0 > 0$.

Pak platí $\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0,y_0]} f(x, y) = L$.

Postup hledání limity pomocí lemmatu

- 1 Transformujeme limitní výraz do polárních souřadnic.
- 2 Počítáme limitu pro $\varrho \rightarrow 0$.
- 3 Výsledkem může být výraz $L + g(\varrho) \cdot h(\varrho, \varphi)$, kde $g(\varrho)$ je funkce závislá pouze na ϱ , jejíž limita pro ϱ jdoucí k nule je 0, a $h(\varrho, \varphi)$ je ohraničená funkce. Pak je limita rovna zbylému reálnému číslu L , které samozřejmě může být i nula.
- 4 Je-li výsledkem je pouze funkce $h(\varrho, \varphi)$ závislá na obou parametrech či pouze na φ , pak limita neexistuje.

Příklad 3: Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Limita funkce dvou proměnných

Příklad 3: Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-2y}{3x+y}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Výsledky:

a) neex., b) neex., c) neex., d) neex., e) 0, f) neex.

Příklad 3: Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

$$g) \lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 + 5y^2}{x^2 + y^2}$$

$$h) \lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$$

$$i) \lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^4}$$

$$j) \lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Příklad 3: Vyšetřete, zda následující limity existují. Pokud ano, určete jejich hodnotu.

$$g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 + 5y^2}{x^2 + y^2}$$

$$h) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$$

$$i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^4}$$

$$j) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Výsledky:

g) neex., h) 0, i) neex., j) neex.

Spojítá funkce dvou proměnných

Definice: Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0,y_0]} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Poznámka:

- 1 Nalézt body nespojitosti funkce znamená určit body, v nichž není funkce definovaná.
- 2 Domluvme se, že funkce je spojitá v izolovaných bodech definičního oboru.

Příklad 4: Určete body, v nichž není funkce spojitá.

a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

b) $f(x, y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}$

c) $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x+y}$

d) $f(x, y) = \sin \frac{1}{xy}$

e) $f(x, y) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$

f) $f(x, y) = \ln |1 - x^2 - y^2|$

Příklad 4: Určete body, v nichž není funkce spojitá.

a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

b) $f(x, y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}$

c) $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x+y}$

d) $f(x, y) = \sin \frac{1}{xy}$

e) $f(x, y) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$

f) $f(x, y) = \ln |1 - x^2 - y^2|$

Výsledky:

a) $[0, 0]$, b) $\{[x, y]; x = -y\}$, c) $\{[x, y]; x = -y\}$,

d) $\{[x, y]; x = 0 \vee y = 0\}$, e) $\{[x, y]; x = k\pi, y = k\pi, k \in \mathbb{N}\}$,

f) $\{[x, y]; x^2 + y^2 = 1\}$