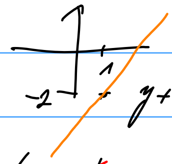
$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{x(y+2)}{2x+y} \quad - ?$$

$$\frac{x(y+2) \to 0}{2x+y \to 0} \qquad \text{„}\frac{0}{0}\text{"}$$

Pravděpodobně neexistuje – nejspíše závisí na cestě, kterou $(x,y)\to(1,-2)$

Zkusme $(x,y)\to(1,-2)$ po přímkách



$y+2 = k(x-1)$

Dosaďme $y+2 = k(x-1)$:

$$\frac{x(y+2)}{2x+y} = \frac{x\cdot k(x-1)}{2x-2+k(x-1)} = \frac{kx(x-1)}{2(x-1)+k(x-1)} = \frac{kx\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(2+k)} = \frac{kx}{k+2}$$

(x je blízko 1, avšak $x\neq 1$)

$\frac{kx}{k+2} \to \frac{k}{k+2}$ pro $x\to 1$; výsledek závisí na k

Např., $k=0 \Rightarrow \frac{k}{k+2} = 0$; $k=1 \Rightarrow \frac{k}{k+2} = \frac{1}{3}$

limita $\nexists$

Jinak: lze zkusit postupné limity

$$\frac{x(y+2)}{2x+y}, \ (x,y)\to(1,-2)$$

$$L_1 = \lim_{x\to 1} \frac{x(y+2)}{2x+y} = \frac{1\cdot(y+2)}{2\cdot 1+y} = \frac{y+2}{2+y} = 1 \text{ pro každé } y. \text{ Pak bude i}$$

$$\lim_{y\to -2}\left(\lim_{x\to 1}\frac{x(y+2)}{2x+y}\right) = \lim_{y\to -2} 1 = 1.$$

V opačném pořadí:

$$L_2 = \lim_{y\to -2}\frac{x(y+2)}{2x+y} = \frac{x\cdot 0}{2x-2} = 0 \text{ pro každé } x \text{ v okolí } 1 \ (x\neq 1)$$

Pak bude $\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to -2}\frac{x(y+2)}{2x+y}\right) = \lim_{x\to 1} 0 = 0$

Hodnoty L_1 a L_2 existují a $L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ původní limita $\nexists$.

Jinak: polární souřadnice

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{x(y+2)}{2x+y}$$

(x,y) v okolí bodu $(1,-2)$

$x = 1+\rho\cos\varphi,\ y = -2+\rho\sin\varphi$

$$\frac{x(y+2)}{2x+y} = \frac{(1+\rho\cos\varphi)\cdot\rho\sin\varphi}{\cancel{2}+2\rho\cos\varphi\cancel{-2}+\rho\sin\varphi} = \frac{(1+\rho\cos\varphi)\cancel{\rho}\sin\varphi}{2\cancel{\rho}\cos\varphi+\cancel{\rho}\sin\varphi} =$$

$\rho\to0,\ \rho\neq0$

$(x,y)\to(1,-2)$
$\Updownarrow$
$\rho\to0$

$$= \frac{(1+\rho\cos\varphi)\sin\varphi}{2\cos\varphi+\sin\varphi}$$

$\rho\to0$: $\dfrac{(1+\rho\cos\varphi)\sin\varphi}{2\cos\varphi+\sin\varphi} \longrightarrow \dfrac{\sin\varphi}{2\cos\varphi+\sin\varphi}$ – výsledek závisí na φ

limita $\nexists$.

Pozn. Lze takto dokázat i existenci, kdyby limita existovala (úpravy jsou ekvivalentní)