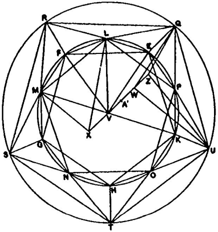
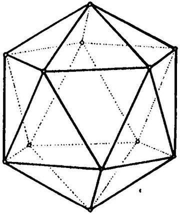
Konstrukční geometrie





Poslední aktualizace: 24. února 2025, Vojtěch Žádník

https://is.muni.cz/el/1441/jaro2025/MA0007/

Cíle

- připomenout, zorganizovat a rozšířit stávající poznatky
- něco udělat, udělané vysvětlit, ...

Proces

- zapamatovat a zopakovat
- pochopit a použít
- rozlišovat a vysvětlovat
- přetvářet a vytvářet

Kulisy

- geometrie

Přehled celkový

- jaro 2025: konstrukční geometrie („syntetická“) — pravítko, kružítko, trpělivost
- podzim 2025 a jaro 2026: počítací geometrie („analytická“) — soustavy rovnic, matice, determinanty

Přehled aktuální

- klasická konstrukční geometrie: Základy, dotykové úlohy
- geometrická zobrazení: shodná, podobná, afinní, projektivní a pár dalších
- poznámky k zobrazování prostoru do roviny

Materiály

- IS: osnova, přednáška, odkazy, staré písemky[1]

Zakončení

- úlohy → písemka → ústní zkouška

Soutěž

- o nejpovedenější konstrukci/výkres/aplikaci použitelnou ve výuce

[1] https://is.muni.cz/auth/el/ped/jaro2025/MA0007/index.qwarp

Základy

= základy eukleidovské geometrie
= geometrie Eukleidových Základů,[2] ovšem s Hilbertovými upřesněními.[3]

Základní pojmy:

- $\boxed{\text{bod}}$, $\boxed{\text{přímka}}$, $\boxed{\text{rovina}}$

Základní vztahy/relace:

A B C

" — ≈ ℝ "

- *incidence, uspořádání, rovnoběžnost, shodnost, spojitost*

všechny úhly

← str. 8

Základní definice:

- *např. úhel, pravý úhel, resp. kolmost přímek, trojúhelník, čtverec, kružnice, rovnoběžnost přímek, . . .*

← cvičení

Základní tvrzení (axiómy/postuláty):

- *několik ke každému ze základních vztahů. . .*

---

[2]kolem −300, http://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovy_Z%C3%A1klady
[3]kolem +1900, http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms

Eukleidovy geometrické axiómy (postuláty)

úsečka

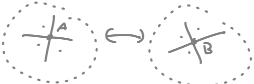
(I) *Každé dva různé body spojuje* přímka.

... a nikdy se neuzavře

(II) *Každou přímku lze na každé straně libovolně* prodloužit.

(III) *Lze vytvořit* kružnice *s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.*

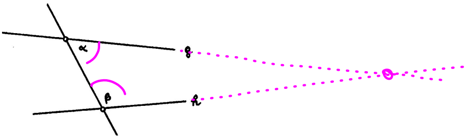
(IV) *Všechny pravé úhly jsou* SHODNÉ.



... homogennost

(V) Lib. *přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé,* pak *tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*[4]

... WTF?



$\alpha + \beta < 2R$ $\Longrightarrow$ *g a h se protínají*

90°

tj. nejsou ||

[4]https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_postulate

Eukleidovy všeobecné axiómy

- *Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.*
- *Když se přidají rovné veličiny k rovným, i celky jsou rovny.*
- apod.

Dnes čteme jako:

- $k = l$ a $m = l \boxed{\Rightarrow} k = m$.
- $k = l$ a $m = n \boxed{\Rightarrow} k + m = l + n$.
- apod.[5]

[5] https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/cn.html

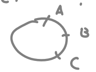
Eukleidovy nevyslovené axiómy (Hilbertovo upřesnění)

Některé věci nejsou v Eukleidově systému explicitně formulovány…

OTEVŘENÁ !

SŘ.

Typický axióm **uspořádání** je např.:



- *Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je* $\boxed{\text{MEZI}}$ *zbylými dvěma.*

Axiómy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiómem.

- *Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému* $\boxed{\text{USPOŘÁDÁNÍ}}$*) Dedekindovy řezy typu „skok“ a „mezera“.*

… jde zejména o upřesnění představy eukleidovské přímky jakožto „reálné“ přímky![6]

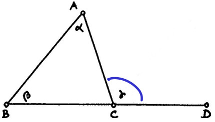
TĚLESA

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \boxed{\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \ldots}$

[6] viz konstrukci tělesa reálných čísel (algebra) a problém sestrojitelných veličin (s. 28).

Co na postulátu (V) nezávisí

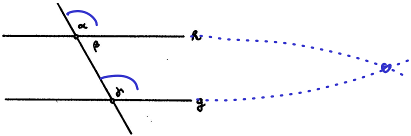
- Věty SUS, SSS, USU, nerovnosti v trojúhelníku apod.
- Věta o vnějším úhlu trojúhelníku.[7]



$$\gamma \boxed{>} \alpha \text{ a } \gamma \boxed{>} \beta$$

(souhlasné)

- *Shodné střídavé úhly implikují rovnoběžnost přímek*[8] (odtud $\boxed{\text{EXISTENCE}}$ rovnoběžky).



$$\alpha = \gamma \boxed{\Rightarrow} h \parallel g$$

$$\alpha > \gamma \Leftarrow h \nparallel g$$

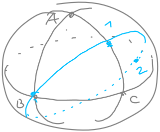
[7] Zde jsou poprvé potřeba axiómy uspořádání (viz s. 10).

[8] Nepřímo pomocí věty o vnějším úhlu trojúhelníku (viz s. 11).

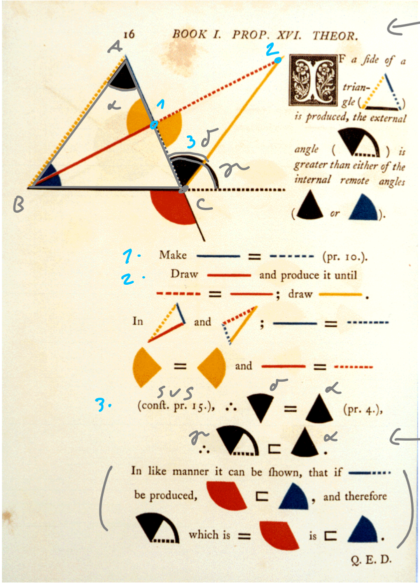
Detail k větě o vnějším úhlu v trojúhelníku[9]

Pozn.

Na sféře obecně NEPLATÍ!



[sférická "přímka" je uzavřená.]

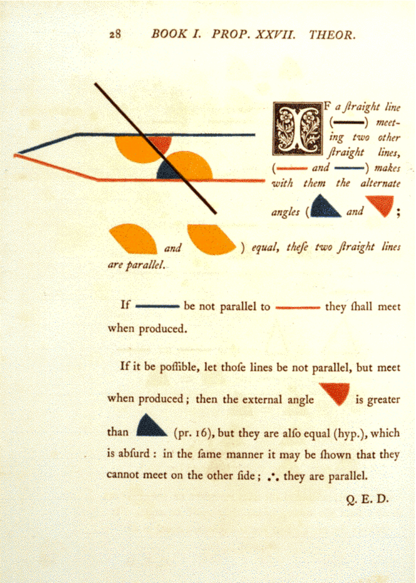


Body 1 a 2 ve stejné polorovině vzhledem k BC!

$\gamma > \alpha$

[9] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-16.html

Detail k větě o existenci rovnoběžky[10]



28 BOOK I. PROP. XXVII. THEOR.

IF a ſtraight line ( ) meeting two other ſtraight lines, (and) makes with them the alternate angles (and ; and) equal, theſe two ſtraight lines are parallel.

If be not parallel to they ſhall meet when produced.

If it be poſſible, let thoſe lines be not parallel, but meet when produced; then the external angle is greater than (pr. 16), but they are alſo equal (hyp.), which is abſurd: in the ſame manner it may be ſhown that they cannot meet on the other ſide; ∴ they are parallel.

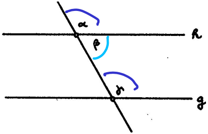
Q. E. D.

[10] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-28.html

Co na postulátu (V) závisí

- Věta o střídavých úhlech[11] (souhlasných) (odtud $\boxed{\text{JEDNOZNAČNOST}}$ rovnoběžky).

(V) $\beta+\gamma<180^\circ \Rightarrow h \times g$



$\alpha+\beta \neq \gamma+\beta \Leftarrow \alpha \neq \gamma$

$\Downarrow$

$180^\circ \neq \gamma+\beta \overset{(V)}{\Longrightarrow} h \times g$

$$h \parallel g \boxed{\Longrightarrow} \alpha = \gamma$$

.. PŘÍZEMÍ

I. PATRO ..

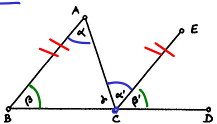
- Věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku.[12]

$\alpha \overset{!}{=} \alpha'$

$\beta \overset{!}{=} \beta'$

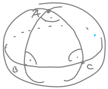
$\alpha+\beta+\gamma =$

$= \alpha+\beta'+\gamma' = 180^\circ$



$$\alpha+\beta+\gamma = \boxed{180^\circ}$$ KONST!

POZN. Na sféře nikdy NEPLATÍ!

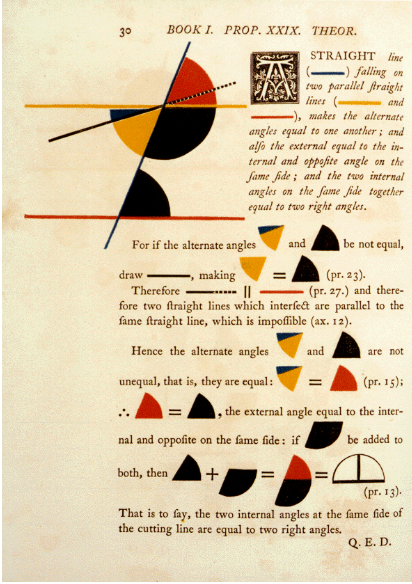


[větší △ ⇒ větší defekt]

- Věty o rovnoběžnících a trojúhelnících a jejich obsazích.[13]
- Pythagorova věta (a téměř vše co následuje)...

[11] Nepřímo pomocí přičtení β a (V) postulátu (viz s. 13).
[12] Přímo pomocí věty o střídavých úhlech (viz s. 14).
[13] Podrobněji od s. 16...

Detail k větě o střídavých úhlech[14]



30 BOOK I. PROP. XXIX. THEOR.

STRAIGHT line ( ) falling on two parallel ſtraight lines (and), makes the alternate angles equal to one another; and alſo the external equal to the internal and oppoſite angle on the ſame ſide; and the two internal angles on the ſame ſide together equal to two right angles.

For if the alternate angles and be not equal, draw , making = (pr. 23).

Therefore || (pr. 27.) and therefore two ſtraight lines which interſect are parallel to the ſame ſtraight line, which is impoſſible (ax. 12).

Hence the alternate angles and are not unequal, that is, they are equal: = (pr. 15);

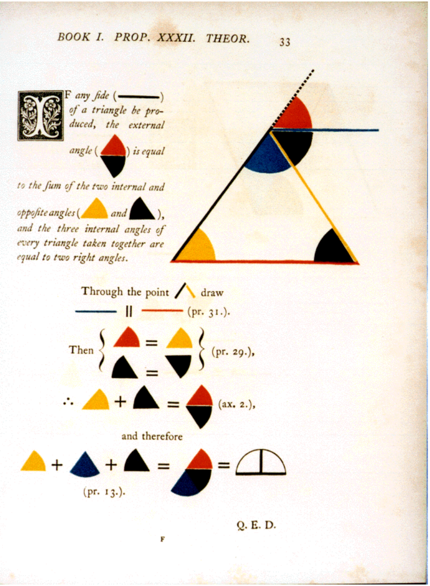
∴ = , the external angle equal to the internal and oppoſite on the ſame ſide: if be added to both, then + = = (pr. 13).

That is to ſay, the two internal angles at the ſame ſide of the cutting line are equal to two right angles.

Q. E. D.

[14] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-30.html

Detail k větě o součtu úhlů v trojúhelníku[15]



BOOK I. PROP. XXXII. THEOR. 33

IF any ſide ( ) of a triangle be produced, the external angle ( ) is equal to the ſum of the two internal and oppoſite angles (and), and the three internal angles of every triangle taken together are equal to two right angles.

Through the point draw ‖ (pr. 31.).

Then { = ; = } (pr. 29.),

∴ + = (ax. 2.),

and therefore

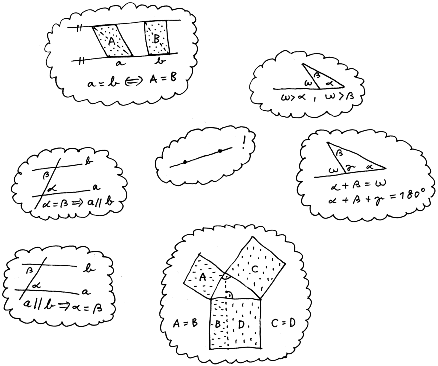
+ + = = (pr. 13.).

Q. E. D.

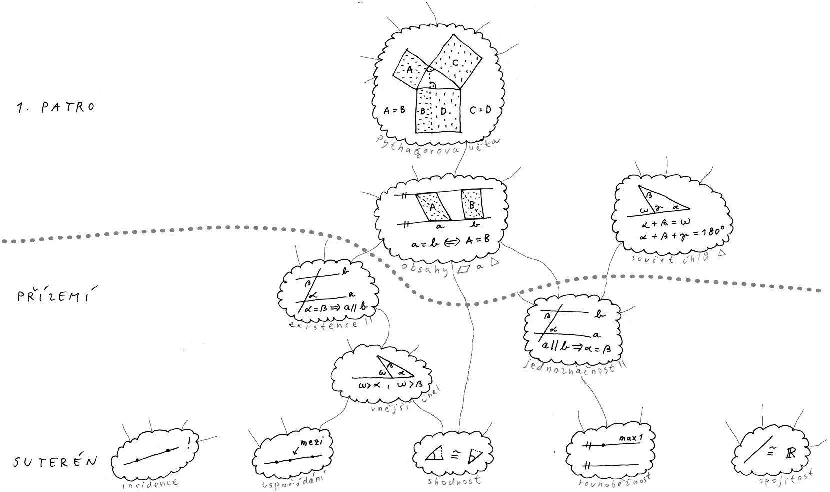
F

[15] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-32.html

Mezishrnutí — takto $\boxed{NE}$!



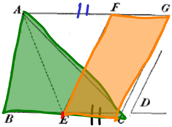
Mezishrnutí — takto $\boxed{\text{ANO}}$! (pokračování na s. 51)

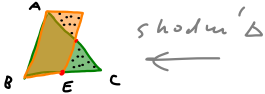


Základní tvrzení o rovnostech obsahů[16]

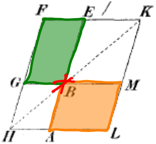
(1) ▶ *Rovnoběžníky, (resp. trojúhelníky) se stejnými základnami a stejnými výškami mají* $\boxed{\text{STEJNÉ obs.}}$.

(2) ▶ *Trojúhelník ABC a rovnoběžník ECGF mají* $\boxed{\text{STEJNÝ obs.}}$ (kde E = střed BC a $BC \parallel AF$):

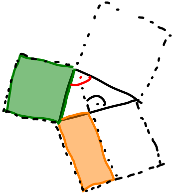




(3) ▶ *Rovnoběžníky BEFG a BALM mají* $\boxed{\text{STEJNÝ obs.}}$ (kde společný bod $B \in$ úhlopříčce HK):



(4) ▶ Eukleidova věta o odvěsně/výšce, resp. věta $\boxed{\text{Pythagorova}}$...

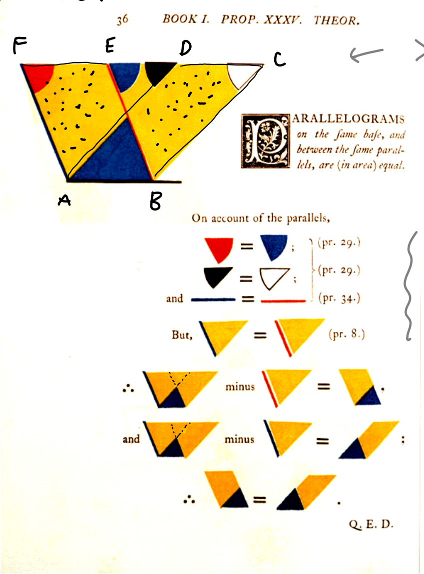


[16]Ve všech důkazech vystačíme s větou o střídavých úhlech a shodnými trojúhelníky (viz s. 17, 18).

Detail k větě o obsazích rovnoběžníků[17]

①

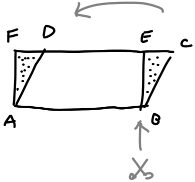
b) obecně



střihání netriv., ale možné..

shodné △ [usu]

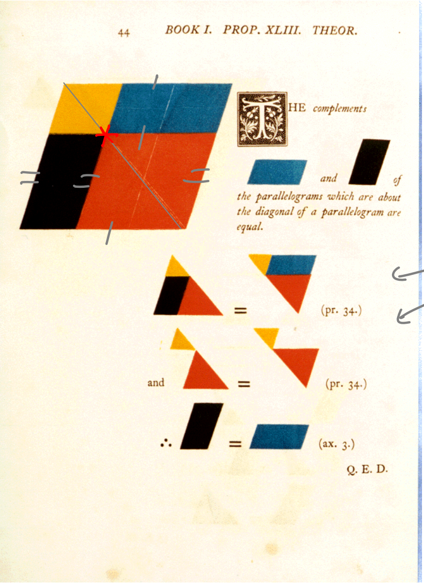
a) spec.



[17] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-36.html

Detail k větě o složených rovnoběžnících[18]

3



44 BOOK I. PROP. XLIII. THEOR.

THE *complements* and *of the parallelograms which are about the diagonal of a parallelogram are equal.*

= (pr. 34.)

and = (pr. 34.)

∴ = (ax. 3.)

Q. E. D.

3 ×

∴ SHODNÉ △

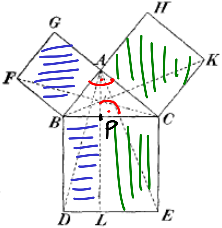
18 http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-44.html

4

Věta

Trojúhelník BAC je pravoúhlý a P je pata výšky z vrcholu A.

Potom platí $\boxed{AB^2 = BC \cdot BP}$ *a* $\boxed{AC^2 = BC \cdot CP}$, *tudíž* $\boxed{AB^2 + AC^2 = BC^2}$.

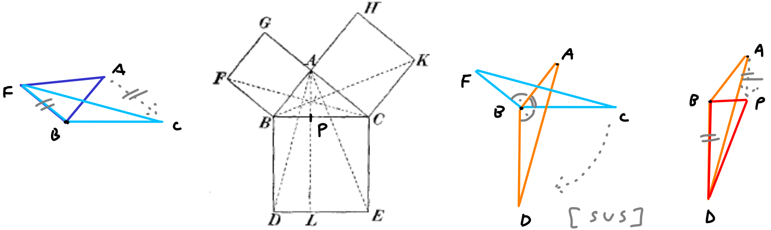


[19] https://www.geogebra.org/m/apubVUSe

4

Věta

Trojúhelník BAC je pravoúhlý a P je pata výšky z vrcholu A.
Potom platí $\boxed{AB^2 = BC \cdot BP}$ *a* $\boxed{AC^2 = BC \cdot CP}$, *tudíž* $\boxed{AB^2 + AC^2 = BC^2}$.



Důkaz.

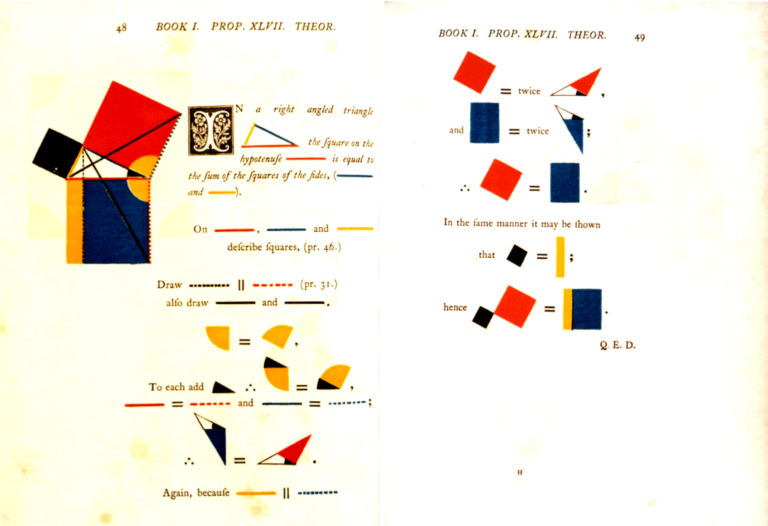
- *FBAG* je čtverec a úhel *BAC* je pravý ⟹ body *G*, *A*, *C* leží na $\boxed{\text{přímce}}$, a ta je $\boxed{\text{rovnob. s } FB}$.
- Odtud podle zákl. věty o obsazích, shodnosti trojúh. $\boxed{FBC}$ a $\boxed{ABD}$ a znovu podle zákl. věty o obsazích:

$$\text{obsah } \boxed{FBA} = \text{obsah } \boxed{FBC} = \text{obsah } \boxed{ABD} = \text{obsah } \boxed{PBD}.$$

Proto má čtverec *FBAG* stejný obsah jako obdélník *PBDL*.
Obdobně to funguje na druhé straně...[19] □

[19] https://www.geogebra.org/m/apubVUSe

Detail k Eukleidově větě o odvěsně[20]


48 BOOK I. PROP. XLVII. THEOR.

IN a right angled triangle the ſquare on the hypotenuſe is equal to the ſum of the ſquares of the ſides, (and).

On , and deſcribe ſquares, (pr. 46.)

Draw || (pr. 31.)

alſo draw and .

= ,

To each add ∴ = ,

= and = ;

∴ = .

Again, becauſe ||

BOOK I. PROP. XLVII. THEOR. 49

= twice ,

and = twice ;

∴ = .

In the ſame manner it may be ſhown

that = ;

hence = .

Q. E. D.

H

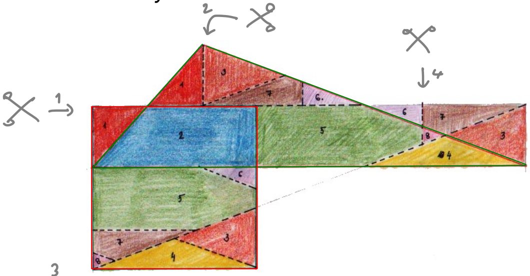
[20] http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-47.html

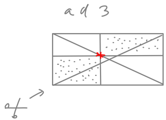
Kombinací předchozích poznatků zjišťujeme, že libovolný mnohoúhelník lze geometricky *kvadraturovat* = sestrojit čtverec se stejným obsahem.[21]

Navíc každou dílčí konstrukci lze doplnit názorným rozstříháním. . . ← viz cvičení

Věta (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova)

Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah $\boxed{\Longleftrightarrow}$ *jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.*



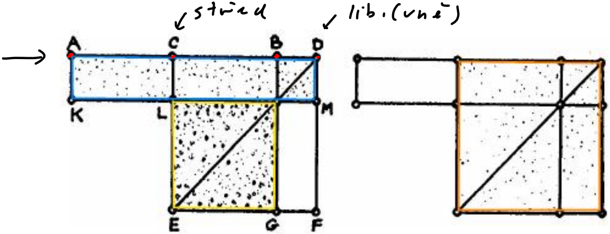


Kvadratura obecného trojúhelníku se stříháním

[21] http://ggbtu.be/mkripDpYd

Geometrická algebra

... geometrické konstrukce vs. algebraická vyjádření...



ukázka 4:

~~Obrázek 4.11~~: [A] II.6: *Pokud je C střed úsečky AB a D je libovolný bod na téže přímce vpravo od B, potom platí* $\boxed{AD \cdot BD} + \boxed{CB^2} = \boxed{CD^2}$.

Poznámky

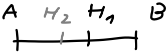
Při značení $|AB| =: b$ a $|DB| =: x$ lze předchozí tvrzení psát jako

$$(b+x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}+x\right)^2 \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}+x\right)^2.$$

Uvedené úpravy známe jako tzv. doplnění do □.

Tyto úpravy jsou prvním krokem k vyjádření kořenů obecné kvadratické rovnice (s. 30).

Míříme k charakterizaci sestrojitelných veličin (s. 28)...



Definice

Bod H dělí úsečku AB ve *zlatém řezu*, pokud poměr celé úsečky k delší části řezu je stejný jako poměr delší části ke kratší, tzn. pokud

$$BA : AH_1 = AH_1 : HB, \quad \text{nebo} \quad AB : BH_2 = BH_2 : HA.$$

Konstrukce (Eukleidova)

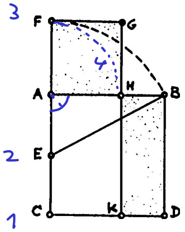
(i) AC je kolmice k AB, přičemž $AC = AB$,

(ii) $E =$ střed AC,

(iii) F leží na polopřímce CA tak, že $EF = EB$,

(iv) H leží na úsečce AB tak, že $AH = AF$

$\Longrightarrow$ AH je delší částí zlatého řezu úsečky AB.



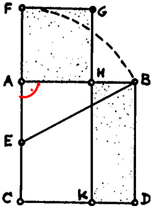
Důkaz a něco navíc

Zdůvodnění konstrukce plyne z předchozího (s. 25) a z Pythagorovy věty (s. 19):

$$CF \cdot FA + \cancel{AE}^2 = \boxed{EF^2 = EB^2} = \boxed{AB^2 + \cancel{AE}^2} \quad \text{neboli} \quad CF \cdot FA = AB^2.$$

Tzn. obdélník *CFGK* a čtverec *ABDC* mají stejný obsah.
Tyto však mají společnou část *CKHA*, takže
taky čtverec *AHGF* a obdélník *KDHB* mají stejný obsah.
To můžeme zapsat jako

$$\boxed{AH^2 = HB \cdot AB} \quad \text{neboli} \quad AH : BH = AB : AH. \quad \square$$



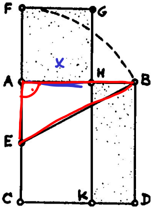
Důkaz a něco navíc

Zdůvodnění konstrukce plyne z předchozího (s. 25) a z Pythagorovy věty (s. 19):

$$CF \cdot FA + AE^2 = \boxed{} = \boxed{} \quad \text{neboli} \quad CF \cdot FA = AB^2.$$

Tzn. obdélník $CFGK$ a čtverec $ABDC$ mají stejný obsah.
Tyto však mají společnou část $CKHA$, takže
taky čtverec $AHGF$ a obdélník $KDHB$ mají stejný obsah.
To můžeme zapsat jako

$$\boxed{} \quad \text{neboli} \quad AH : BH = AB : AH. \qquad \square$$



Počítání

Při označení $|AB| =: b$ a $|AH| =: x$ definice zlatého řezu zní:

$|EB|^2 = b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$$b : x = x : (b - x) \quad \text{neboli} \quad b(b - x) = x^2 \quad \text{neboli} \quad \boxed{x^2 + bx - b^2 = 0}.$$

Postupně sestrojené veličiny jsou:

$$|AE| = |EC| = \boxed{\frac{b}{2}}, \quad |EB| = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2} b}, \quad |AF| = |AH| = x = \boxed{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) b}.$$

Skutečně, $x = \boxed{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) b}$ je kořenem kvadratické rovnice $\boxed{x^2 + bx - b^2 = 0}$ ...

Sestrojitelné veličiny

Reálné veličiny — reprezentované úsečkami — umíme:

- **sčítat** a **odčítat** — pomocí přikládání a odebírání úseček na přímce,
- **násobit** a **dělit** — pomocí stejnoplochých rovnoběžníků, resp. podobných trojúhelníků,
- **druhou odmocninu** — pomocí Eukleidovy věty o odvěsně, resp. o výšce.

Sestrojitelné veličiny

Reálné veličiny — reprezentované úsečkami — umíme:

- **sčítat** a **odčítat** — pomocí přikládání a odebírání úseček na přímce,
- **násobit** a **dělit** — pomocí stejnoplochých rovnoběžníků, resp. podobných trojúhelníků,
- **druhou odmocninu** — pomocí Eukleidovy věty o odvěsně, resp. o výšce.

Věta

Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem $\boxed{}$ *jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu*

$$\mathbf{1} \quad + \quad - \quad \cdot \quad : \quad \sqrt{\ } \quad (\quad)$$

Věta

Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem $\iff$ jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu

$$\mathbf{1} \quad + \quad - \quad \cdot \quad : \quad \sqrt{\ } \quad (\quad)$$

Důkaz.

Začneme s úsečkou představující jednotku.

Další sestrojitelné veličiny vznikají konstrukcemi v rovině, a to výhradně jako

(a) průnik dvou přímek $\rightsquigarrow$ soustava $\boxed{}$ rovnic,

(b) průnik přímky s kružnicí $\rightsquigarrow$ soustava $\boxed{}$ a $\boxed{}$ rovnice,

(c) průnik dvou kružnic $\rightsquigarrow$ soustava $\boxed{}$ rovnic.

Eliminací jedné proměnné dostaneme $\boxed{}$, nebo $\boxed{}$ rovnici; vyřešíme, dosadíme, ...

Kořen(y) lib. $\boxed{}$ a $\boxed{}$ rovnice umíme vyjádřit z jejích koeficientů pomocí právě uvedených operací! □

Poznámka (viz s. 25)

Algebraické vyjádření kořenů kvadratické rovnice $x^2 + bx + c = 0$ se dělá takto:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \quad \text{neboli} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,$$

což po odmocnění a úpravě vede k dobře známému vzorečku

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad \text{neboli} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

(a) zdvojení krychle $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt[3]{2}a$,

(b) rozvinutí kružnice $\rightsquigarrow$ $x = 2\pi r$,

(c) kvadratura kruhu $\rightsquigarrow$ $x = \sqrt{\pi}r$,

(d) roztřetění úhlu $\rightsquigarrow$ $x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$,

(e) pravidelné mnohoúhelníky $\rightsquigarrow$ ...... (s. 54)

Problémy (b) a (c) jsou ekvivalentní; problémy (d) a (e) spolu úzce souvisí.

Díky J.H. Lambertovi, resp. F. Lindemannovi víme, že π není racionální, resp. algebraické číslo.[22]

Z předchozího (a trochu následujícího) víme, že

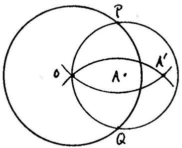
- problémy (a), (b) a (c) $\boxed{}$ řešitelné,
- problémy (d) a (e) $\boxed{}$ řešitelné.

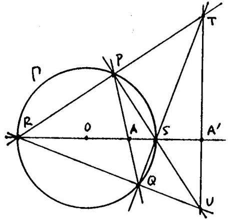
[22] r. 1767, resp. 1882

Eukleidovské konstrukce = konstrukce s kružítkem a pravítkem.

Mascheroniovské konstrukce = konstrukce pouze s kružítkem.

Steinerovské konstrukce = konstrukce pouze s pravítkem a jednou kružnicí.





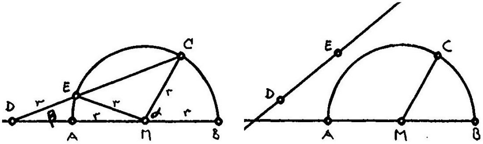
Příklad: Mascheroniovská a steinerovská konstrukce inverzního bodu A' k bodu A vzhledem ke kružnici se středem O.

Věta

Konstrukce je proveditelná eukleidovsky $\boxed{}$ *je proveditelná mascheroniovsky* $\boxed{}$ *je proveditelná steinerovsky.*

Konstrukce *neusis*

Konstrukce *neusis* = konstrukce s kružítkem a pravítkem se <ins>značkami</ins> (které se přikládají k přímkám, resp. kružnicím)



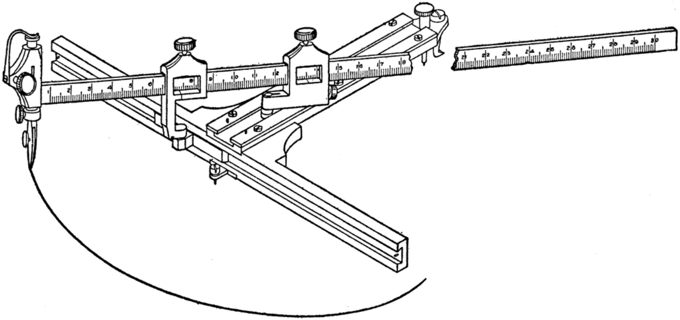
Příklad: Archimédova trisekce úhlu s označeným pravítkem.

Poznámka

Takto lze sestrojit (reálné) kořeny libovolné $\boxed{\qquad\qquad}$ rovnice, tedy vyřešit problémy (a), (d) a některé další (e) na s. 31…[23]

[23] http://en.wikipedia.org/wiki/Neusis_construction

Užitek



Konstrukce elipsy pomocí *neusis* udělátka.