Algebra 3 (MA 0011)

RNDr. Břetislav Fajmon, Ph.D.

Katedra matematiky Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity v Brně – verze 2024

Obsah

Úvod

Tento textík je zčásti seznamem otázek k opakování algebraických předmětů na pedagogické fakultě MUNI, zčásti by mohl být textem krátce uvádějícím do pojmu Booleho algebra, a také možná někdy (aspoň v mírné formě prezentované v knize Pinter: The Book of Abstract Algebra) pokusem o prezentaci důkazu, že existují polynomické rovnice stupně pátého a vyššího, které nelze řešit přesným vzorcem.

Břetislav Fajmon,
verze textu únor 2025, text bude během výuky doplňován

1 Otázka 01: Logika a teorie množin

- Uveďte negaci výroku:

$$\forall n \in N : (6|n \quad \Leftrightarrow \quad (2|n \ \wedge \ 3|n))$$

  (pozor, kvantifikátor patří k celé ekvivalenci, není součástí jen levé části ekvivalence, ale náleží celému výroku a neguje se nejprve ... pak až pokračujeme a negujeme danou ekvivalenci).

- Napište vlastnost neutrálního prvku algebraické operace (vlastnost 3) a vlastnost existence inverzí u algebraické operace (vlastnost 4) ... pečlivě i s kvantifikátory; a ve druhé fázi proveďte negaci těchto výroků.

Pojďme dále na témata a označení teorie množin:

- Pod pojmem **vztahy mezi množinami** si představte relaci $\subseteq$, nebo rovnost výrazů s množinami a množinovými operacemi (binárními a unárními). Typický množinový vztah je distributivní zákon:

$$\forall X, Y, Z \in 2^A : X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z),$$

  který dokazujeme Vennovými diagramy nebo pomocí univerzálního prvku x.

K množinám se vrátíme ještě u tématu Booleho algebry.

2 Otázka 02: Relace, ekvivalence, uspořádání, zobrazení

- Co je to binární relace? Uveďte nějaké její vlastnosti a příklad relace, která má danou vlastnost.
- Jak binární relace reprezentujeme? a) výčtem jejích prvků jako množinu uspořádaných dvojic; b) pomocí orientovaného diskrétního grafu; c) pomocí matice; d) pomocí kartézského grafu.
- Co je to relace reflexivní? Co je to relace antireflexivní? Co je to relace symetrická? Co je to relace antisymetrická? Co je to relace tranzitivní? Co je to relace úplná?
- Co je to relace ekvivalence? Jak relaci ekvivalence reprezentujeme (pomocí určitého rozkladu množiny na podmnožiny, který vždy existuje: v jedné podmnožině rozkladu jsou právě ty prvky, které jsou navzájem v relačním vztahu.
- Co je to relace uspořádání? Jak relaci uspořádání reprezentujeme? (speciálně pomocí Hasseho diagramu – vysvětlete, jak v Hasseho diagramu značíme reflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu). Uveďte dvě nebo tři velmi typické relace uspořádání.
- Co je to zobrazení? Jaké typy zobrazení známe?[1] U každého typu uveďte nějaký příklad nejlépe reálné funkce, tj. zobrazení $R \to R$ s danou vlastností.
- Některé základní funkce: u elementárních funkcí byste měli být schopni řešit úlohy následujících typů:

  a) nakreslete pro zadaný vzorec graf (základní funkce lineárně lomené, mocninné-odmocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické), a určete její definiční obor a obor hodnot;

  b) vypočtěte vzorec funkce inverzní ze zadaného vzorce;

  c) uveďte definici minima-maxima x_0 funkce $f(x)$; funkce $f(x)$ klesající-rostoucí na intervalu; funkce $f(x)$ ohraničené zdola, shora, zcela; funkce $f(x)$ periodické; funkce $f(x)$ je sudá-lichá.

A poslední příklad z funkcí, který byste měli zvládnout, se týká následující tabulky nebo její části: Vyplňte ji tak že v každém sloupci je nějaký jiný úhel; tam, kde existují dvě možnosti, si vyberte jen jednu.

x (°)	0°							−30°
x (rad)			$\frac{\pi}{2}$			$\frac{3\pi}{2}$		
$\sin x$				$\frac{\sqrt{3}}{2}$			$\frac{1}{2}$	
tg x		1			není def.			

[1] Opakování typů zobrazení, viz Základy matematiky, zaktualizovaný text, str. 69-71 včetně obrázku

3 Otázka 03: Struktury s jednou a se dvěma operacemi

- $A = \{1; 2; 3\}$ je tříprvková množina. Co za vlastnosti splňuje algebraická struktura s jednou operací, a sice a) $(2^A, \cup)$; b) $(2^A, \cap)$; c) $(2^A, \setminus)$; d) $(2^A, \div)$. Nazvěte tyto struktury z hlediska algebry. Uveďte u každé z nich, jaký konkrétně je neutrální prvek. Jestliže neexistují některé inverzní prvky, najděte příklad prvku, který nemá inverzi.

- Dalšími zajímavými vlastnostmi jsou zákon krácení v grupě (vlastnost 7), zákon idempotence (vlastnost 8) a zákon absorbce (vlastnost 9) ... zejména vlastnosti 8 a 9 jsou pak důležitými při studiu Booleho algebry.

- Co je to polookruh $(M, \triangledown, \star)$? Uveďte typický příklad (tedy příklad polookruhu, který není okruhem).

- Co je to okruh $(M, \triangledown, \star)$? Uveďte typický příklad (tedy příklad okruhu, který není oborem integrity).

- Co je to obor integrity $(M, \triangledown, \star)$? Uveďte typický příklad (tj. příklad oboru integrity, který není tělesem). Jaký vztah splňují netriviální (či: nenuloví) dělitelé nuly?

- Co je to těleso $(M, \triangledown, \star)$? Uveďte typický příklad.

- Jakými strukturami jsou z algebraického hlediska následující množiny se dvěma operacemi?

  a) $(N_0, +, \cdot)$;

  b) $(Z, +, \cdot)$;

  c) $(Q, +, \cdot)$;

  d) $(R, +, \cdot)$;

  e) $(C, +, \cdot)$;

  f) $(Z_6, +, \cdot)$;

  g) $(Z_7, +, \cdot)$;

  h) $(Z_8, +, \cdot)$;

  i) $(2^A, \cup, \cap)$ pro $A = \{1; 2; 3\}$;

  j) $(2^A, \div, \cap)$ pro $A = \{1; 2; 3\}$.

- Co je to homomorfismus grup? Co je to homomorfismus okruhů? Uveďte příklady tohoto homomorfismu.

- K čemu je ten homomorfismus dobrý? a) surjektivní homomorfismus ... měli byste znát; b) injektivní homomorfismus ... bude ještě vysvětlen v otázce 7.

4 Otázka 06: Polynomy

- Co je to polynom? Jakou algebraickou strukturu tvoří množina všech polynomů s reálnými koeficienty $(R[x], +, \cdot)$?
- Co je to kořen polynomu? Co říká základní věta algebry?[2] Co je to násobnost kořene?
- Formulujte pomocí rovnic Eukleidův algoritmus hledání NSD dvou polynomů.
- Uveďte význam Hornerova schématu na příkladu: a) najde kořen polynomu, a současně provede dělení (čeho čím? jaký je výsledek?); b) provede i dělení polynomu se zbytkem ... napište přesně rovnici, ve které jsou obsaženy oba polynomy, jejich podíl i zbytek.[3]
- Co říká věta o racionálních kořenech polynomu z $(Q[x], +, \cdot)$?
- Co říká věta o komplexně sdružených kořenech polynomu z $(R[x], +, \cdot)$?
- Jak se odstraní z polynomu $p(x)$ vícenásobné kořeny? (nemusíte příklad, jen vysvětlení při dobrém označení)
- Co je to algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla? Vysvětlete včetně označení a obrázku.
- Co říká Moivreho věta?
- Jakým způsobem vypočteme $n-$tou odmocninu z komplexního čísla $c \in C$? Uveďte vzorec, vyřešte binomickou rovnici $z^6 = 64$ a binomickou rovnici $z^3 = -1$ a vyznačte vždy všechna řešení dané rovnice v Gaussově rovině.
- Uveďte, jakým způsobem řešíme reciprokou rovnici

  $$x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

  (nemusíte vyřešit úplně, jen popište metodu řešení až do chvíle, kdy nám zbývá vyřešit rovnici kvadratickou ... tu už řešit nemusíte).
- Metodou půlení intervalu najděte řešení rovnice $x^3 - x - 2 = 0$ na intervalu $\langle 1; 2\rangle$. Nemusíte řešit moc podrobně, protože nemáte kalkulačku – proveďte jen dva kroky, z nichž bude jasné, jak se postupuje.
- Metodou Newtonovou (tečen) najděte řešení rovnice $x^3-x-2 = 0$ na intervalu $\langle 1; 2\rangle$. Nemusíte řešit moc podrobně, protože nemáte kalkulačku – jeden krok vypočtěte a do druhého dosaďte, aby bylo jasné, jak se postupuje.
- odvoďte podrobně vzorec Newtonovy metody.

[2] Základní věta algebry je jakousi obdobou rozkladu přirozeného nebo celého čísla na součin prvočísel.

[3] V otázkách a) i b) nestačí jen projet Hornerovo schéma – musíte ještě v rovnici ukázat, co je důsledkem-výstupem Hornerova schématu.

5 Otázka 04: Vektorové prostory a lineární zobrazení

Jde převážně o zopakování pojmů, příklady těchto pojmů a jejich význam. Otázka sestává ze dvou celků. Prvním celkem je pojem vektorového prostoru a podprostoru.

- Co je to vektorový prostor V nad tělesem T?
- Uveďte příklad vektorového prostoru (prostor aritmetický, prostor polynomů stupně nejvýše 4, prostor polynomů jakéhokoli stupně, prostor spojitých reálných funkcí): jak se na daném VP definuje sčítání vektorů a jak se definuje násobení vektorů skalárem?
- Co je to vektorový podprostor vektorového prostoru?
- Uveďte příklad vektorového podprostoru nějakého vektorového prostoru.
- Co je to lineární kombinace vektorů?
- Co je to lineární závislá množina vektorů?
- Co je to báze (dimenze) vektorového prostoru?
- Co jsou to souřadnice vektoru vzhledem k zadané bázi vektorového prostoru?
- Co je to součet vektorových podprostorů a jak se definuje?
- Co říká věta o dimenzi součtu a průniku vektorových podprostorů?

Právě uvedená část otázky směřuje na zkoumání vlastností afinních podprostorů a studiu jejich vzájemné polohy (vlastnosti a vztahy afinních podprostorů jsou už ovšem jinou státnicovou otázkou z geometrie).

Druhá polovina otázky se věnuje technické podpoře pojmu lineární zobrazení mezi vektorovými prostory a podpoře pojmů vlastní čísla a vlastní vektory lineární transformace:

- Co je to lineární zobrazení φ mezi vektorovými prostory?
- Jak lze lineární zobrazení zadat (vysvětlete tři způsoby zadání na příkladu)?
- Uveďte příklad lineárního zobrazení geometricky, tj. nalezněte jeho matici, jestliže se jedná o osovou souměrnost v rovině nebo o rotaci v rovině se středem v počátku (například pro osovou souměrnost v rovině vzhledem k ose $y = \frac{x}{3}$).
- Co je to lineární transformace?
- Co jsou to vlastní čísla a vlastní vektory lineární transformace?
- Uveďte příklad vlastních čísel a vlastních vektorů geometricky, například u osové souměrnosti vzhledem k ose $y = \frac{x}{3}$.

- Jak nalezneme vlastní čísla a vektory lineární transformace zadané maticí A? Vysvětlete algebraickou metodu (stačí postup bez příkladů, ale v postupu musí vše být dobře označeno).
- Příklad osové souměrnosti v rovině vzhledem k ose $y = \frac{x}{3}$ ... nalezněte matici této lineární transformace a) vzhledem ke standardní bázi, b) vzhledem k ortonormální bázi vlastních vektorů.
- Jak se nazývají matice téže lineární transformace (viz a,b v předchozí odrážce) zadané pouze v různých bázích?

Tolik druhá část otázky – ta se tedy věnuje práci s lineárními zobrazeními (s využitím vlastních čísel, jestliže jsou vlastní čísla reálná různá, pak totiž je zaručeno, že příslušné vlastní vektory jsou navzájem ortogonální).

6 Otázka 05: Soustavy lineárních rovnic, matice a determinanty

Jde převážně o otázku, která se věnuje různým metodám řešení systému lineárních rovnic (dále zkratka: SLR), a pojmům které s tím souvisejí, tj. zejména maticovým operacím a výpočtu determinantu. Metody A,B,C lze vysvětlit na příkladu

$$\begin{aligned} x \quad - z &= 0, \\ 3x + y \quad &= 1, \\ -x + y + z &= 4. \end{aligned}$$

A) Gaussova eliminační metoda:

- Slovně stručně vysvětlete, v čem spočívá Gaussova metoda (popřípadě Gaussova-Jordanova metoda) ... můžete i bez příkladu.
- Co jsou to elementární řádkové úpravy?
- Co je to schodový tvar matice?
- Jak se liší Gaussova a Gaussova-Jordanova metoda?
- Co říká Frobeniova věta o řešitelnosti a počtu řešení SLR? (jaké jsou různé případy počtu řešení a ve kterých situacích nastanou?)

B) Maticová metoda:

- Kdy lze matice sčítat a jaké algebraické vlastnosti má operace sčítání matic? (neutrální prvek a inverzní prvky vysvětlete podrobně, na příkladu)
- Kdy lze matice násobit a jaké algebraické vlastnosti má operace násobení matic? (neutrální prvek a inverzní prvky vysvětlete podrobně, na příkladu)
- Otázka nenulových dělitelů nuly v okruhu čtvercových matic: vysvětlete podrobně na příkladu.
- Co je to hodnost matice? Definujte a) pomocí schodového tvaru získaného z matice A pomocí EŘÚ; b) pomocí vektorového podprostoru generovaného řádky matice.
- Vysvětlete maticovou metodu řešení SLR – jen vysvětlete postup, nemusíte řešit konkrétní příklad. Pozor, tato metoda není Gaussova eliminace, to byla ta předchozí. Maticová metoda souvisí s násobením matic!!!
- Co je to matice singulární a matice regulární a jak souvisí a) s řešením SLR, b) s výpočtem determinantu, c) s výpočtem inverzní matice, d) s výpočtem hodnosti matice?

C) Cramerovo pravidlo:

- Uveďte definici determinantu, vysvětlete označení, které s tím souvisí.
- Vypočtěte determinant
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$
a) z definice (aspoň naznačte, vyčíslete jeden až dva členy součtu); b) Laplaceho rozvojem pomocí řádku-sloupce (uvedený rozvoj proveďte, ale nemusíte ho dále vyčíslovat).
- Jaké jsou vlastnosti singulární-regulární matice vzhledem k pojmům a) determinant; b) hodnost matice; c) počet řešení SLR $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$; d) inverzní matice?
- Vysvětlete využití determinatů v matodě Cramerovo pravidlo na příkladu z úvodu této otázky.
- Jaké jsou vlastnosti determinantu? Zejména se soustřeďte na rozdíl mezi řádkovými úpravami matice a úpravami determinantu – které úpravy jsou stejné a které se liší a jak?
- Lze chápat determinant jako zobrazení? Jestliže ano, tak mezi kterými množinami („odkud kam“)?
- Jestliže determinant lze chápat jako lineární zobrazení (což lze), tak z linearity zobrazení plyne i vlastnost linearity determinantu – vysvětlete vlastnost linearity determinantu na matici rozměru 2×2.

D) Pripcip superpozice:

- Ad nehomogenní SLR: Co říká Frobeniova věta o řešitelnosti a počtu řešení SLR? (jaké jsou různé případy počtu řešení a ve kterých situacích nastanou?)
- Ad homogenní SLR: Jaké jsou různé případy počtu řešení a ve kterých situacích nastanou?
- Vysvětlete na konkrétním příkladu metodu principu superpozice:
$$\begin{aligned} x + y + 2z - 5w &= 1, \\ 2x + 5y - z - 9w &= 4. \end{aligned}$$

7 Některé části otázky číslo 4 z geometrie

Měli byste znát definici a příklad skalárního součinu vektorů:

- Skalární součin na vektorovém prostoru V nad tělesem T je symetrická pozitivně definitní bilineární forma ... vysvětlete každý z těchto čtyř termínů přesně matematicky.
- Jak se definuje skalární součin na aritmetickém vektorovém prostoru $(R^n, +)$?
- Jak se definuje skalární součin na vektorovém prostoru spojitých funkcí na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$?

Také musíte znát definici velikosti vektoru a některé vlastnosti velikosti:

- Jak se definuje velikost vektoru pomocí skalárního součinu vektorů? (obecně pomocí vektorového součinu)
- Uveďte vlastnost pozitivní definitnosti velikosti.
- Uveďte vlastnost homogenity velikosti.
- Uveďte trojúhelníkovou nerovnost.
- Každý nenulový vektor lze normovat ... co to znamená?
- Jak se definuje velikost na vektorovém prostoru spojitých funkcí na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$?

Otázku vektorového součinu vám řeknu (zopakuji) na začátku čtvrté výuky já sám:

- Jaký je geometrický význam skalárního součinu dvou vektorů?
- Jak se definuje vektorový součin vektorů (obecně, v dimenzi 2, v dimenzi 3)?

8 K Otázkám 01, 02, 03 (logika a teorie množin, relace na množině, operace na množině): Booleho algebra

- Co je to svaz? Nakreslete svaz všech dělitelů přirozeného čísla 60, uspořádaný relací dělitelnosti.
- Nakreslete svaz všech dělitelů přirozeného čísla 72, uspořádaný relací dělitelnosti.
- Nakreslete svaz všech podmnožin pětiprvkové množiny (uspořádaný podle relace $\subseteq$).
- Uveďte vlastnosti operací $\vee$, $\wedge$ ve svazu (nově: vlastnost idempotence, vlastnost absorbce).
- Poznámka: vlastnost neutrálního prvku nemusí u daných operací platit, protože v nekonečných svazech nemusí největší (nejmenší) prvek existovat.
- Musí operace $\vee$, $\wedge$ splňovat distributivní zákon? Operace průniku a sjednocení distributivní zákon splňují, ale obecně ve svazu nemusí platit – příkladem jsou svazy M_5 a N_5.
- Naštěstí platí krásná matematická věta: Svaz je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz M_5 nebo N_5.
- Definice komplementu, definice komplementárního svazu. Měli byste být schopni najít komplement prvku ve svazu, nebo říct, že neexistuje.
- Věta: Jestliže je komplementární svaz současně distributivní, tak všechny komplementy jsou určeny jednoznačně.
- Příklad: Komplement v množinovém svazu $(2^A, \cup, \cap)$ je doplněk množiny, jak jsme zvyklí na unární operaci doplňku.
- Definice: Booleho algebra je každý komplementární distributivní svaz.
- Příklad: $(2^A, \cup, \cap)$ je Booleho algebra.
- Využití Booleho algebry: Zákonitosti v Booleho algebře dovolují modelovat a zjednodušovat logické výrazy nebo množinové výrazy.
- Co jsou to de Morganova pravidla a) v teorii množin, b) v logice, c) v Booleho algebře?

9 Otázka 07: Číselné obory a jejich konstrukce

Tato otázka vysvětluje vlastnosti jednotlivých množin čísel ve školské matematice, ale také uvádí algebraické konstrukce každé následné množiny v posloupnosti množin N, Z, Q, R, C pomocí množiny předchozí.

Peanova množina P, množina N přirozených čísel.

- uveďte nedůležité čtyři Peanovy axiomy, které se týkají rovnosti;
- uveďte důležitých čtyři až pět Peanových axiomů, které se týkají pojmu následníka;
- uveďte definici předchůdce, úseku a uspořádání na P;
- uveďte čtyři vlastnosti, které splňují operace sčítání a násobení, jež lze definovat na množině P;
- uveďte, jak lze strukturu $(N_0, +, \cdot)$ vystihnout algebraicky.

Algebraický popis, jak z N zkonstruujeme Z. Studenti by měli umět nakreslit obrázek a celou konstrukci popsat. Bude též zkoušeno na následujících dílčích otázkách:

- Co provedeme s množinou N nejdříve? Vytvoříme kartézský součin $N \times N$.
- Jak definujeme relaci ekvivalence $\sim$?
- Co je to $N \times N/_\sim$? Popište tuto strukturu – jaké jsou její prvky?
- Jak na struktuře $N \times N/_\sim$ definujeme operaci sčítání? Jaké má tato operace vlastnosti? Uveďte minimálně, který prvek je neutrální a jak se najde inverze pro nějaký prvek různý od neutrálního.
- Jak se definuje zobrazení $N \to N \times N/_\sim$, jaké má vlastnosti a co zaručuje?
- Jakým pojmem lze výslednou strukturu s operacemi sčítání a násobení vystihnout algebraicky?

Algebraický popis, jak ze Z zkonstruujeme Q. Studenti by měli umět nakreslit obrázek a celou konstrukci popsat. Bude též zkoušeno na následujících dílčích otázkách:

- Co provedeme s množinou Z nejdříve? Vytvoříme kartézský součin $Z \times Z^*$.
- Jak definujeme relaci ekvivalence $\sim$?
- Co je to $Z \times Z^*/_\sim$? Popište tuto strukturu – jaké jsou její prvky?
- Jak na struktuře $Z \times Z^*/_\sim$ definujeme operaci sčítání a operaci násobení? Jaké má tato operace vlastnosti? Uveďte u obou operací minimálně to, který prvek je neutrální a jak se najde inverze pro nějaký prvek různý od neutrálního.

- Jak se definuje zobrazení $Z \to Z \times Z^*/_\sim$, jaké má vlastnosti a co zaručuje?
- Jakým pojmem lze výslednou strukturu s operacemi sčítání a násobení vystihnout algebraicky?

Algebraický popis, jak z Q zkonstruujeme R pomocí řezů množiny Q.

- Co je to řez množiny M?
- Jaké čtyři typy řezů existují (a na jakých množinách)? Vysvětlete i graficky;
- Jak se „zkonstruuje“ R z množiny Q? Čemu odpovídají řezy Q prvního druhu, čemu odpovídají řezy Q třetího druhu?

Algebraický popis, jak z R zkonstruujeme C. Studenti by měli umět nakreslit obrázek a celou konstrukci popsat. Bude též zkoušeno na následujících dílčích otázkách:

- Co provedeme s množinou R nejdříve? Vytvoříme kartézský součin $R \times R$.
- Jak na struktuře $R \times R$ definujeme operaci sčítání a operaci násobení? Jaké má tato operace vlastnosti? Uveďte u obou operací minimálně to, který prvek je neutrální a jak se najde inverze pro nějaký prvek různý od neutrálního (a že tato inverze je opět komplexním číslem!!).
- Jak se definuje zobrazení $R \to R \times R$, jaké má vlastnosti a co zaručuje?
- Jakým pojmem lze výslednou strukturu s operacemi sčítání a násobení vystihnout algebraicky?

Seznam literatury:

Beránek, 2011 Jaroslav Beránek: Vybrané kapitoly z algebry. Skriptum Pdf, počet stran 70. Doplnění obsahu předmětů Algebra 1 a Algebra 3 na PdF pro budoucí učitele 2.stupně. Brno 2011.

Budínová, I., 2013 Irena Budínová: Polynomy. Text určený studentům učitelství matematiky, Brno 2013. Počet stran 56.

Horák, 2002 P. Horák: Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I, Brno 2002. Sbírka příkladů na Přírodovědecké fakultě MU. Cvičení pokrývá zhruba látku v předmětech Základy matematiky, Algebra 1, Algebra 2 vyučovaných na Pedagogické fakultě.

Fajmon, 2022 B.Fajmon: Algebra 1. Doplnění přednášek, elektronický text.

Fajmon, 2023 B.Fajmon: Základy matematiky – verze 2023. Doplnění přednášek v předmětu MA0001, počet stran 153.

Fajmon, 2024 B.Fajmon: Algebra 2. Doplnění přednášek, elektronický text.

Kopka, J., 1991 Jan Kopka: Svazy a Booleovy algebry (Ústí nad Labem 1991, zejména str. 19-82). Pan profesor Kopka napsal svůj text z té pozice, že by rád přehledně a srozumitelně podal přehled pojmů algebry a diskrétní matematiky, aby byla vidět její krása. Kniha je hlubším rozvedením pojmu uspořádaná množina uvedeným v předmětu Základy matematiky.

Pinter, 2010 Charles Pinter: A book of Abstract Algebra, 2010. Jedná se o reprint druhého vydání z roku 1990. Neobyčejně čtivý text, napsaný z té pozice, že algebra je důležitá a má důležitá uplatnění.

Rosický, J., 2000 Jiří Rosický: Algebra – grupy a okruhy 2000, reprint textu z roku 1985. Tento text se hodně shoduje s osnovou předmětu Algebra 1 na PdF, nicméně jen až jako doplnění čtivější knihy (Pinter, 2010).