Cvičení A

Popište explicitně podmnožiny v $\mathbb{R}$, tj. všude předpokládejte $x \in \mathbb{R}$:
1. $\{x : x \leq 2\}$ **2.** $\{x : x \leq 2 \text{ a } x > -2\}$ **3.** $\{x : x - 2 \leq 0 \text{ nebo } x > -2\}$ **4.** $\{x : x - 2 \leq 3x + 1\}$ **5.** $\{x : x - 2 \leq 3x + 1 < 2x + 2\}$ **6.** $\{x : x - 2 \leq 3x + 1 < 2x + 2 \text{ a } 3x - 1 < x - 2 \leq 2x + 1\}$ **7.** $\{x : x^2 - 2 \leq 0\}$ **8.** $\{x : (x-2)^2 \geq 0\}$ **9.** $\{x : |x - 2| \geq 0\}$ **10**$\flat$**.** $\{x : |x - 2| < \delta\}$, pro nějaké obecné $\delta \in \mathbb{R}$ **11.** $\{x : (x+2)(3x+1) < 0\}$ **12.** $\left\{x : \frac{x+2}{3x+1} < 0\right\}$ **13.** $\left\{x : \frac{(x+2)(x-1)}{(3x+1)(x+4)} < 0\right\}$ **14.** $\left\{x : \frac{x+2}{3x+1} + \frac{x-1}{x+4} < 0\right\}$

15$\natural$**.** Najděte suprema a infima množin z předchozích příkladů.

16$\natural$**.** Řešte stejnou úlohu s předpokladem, že všechny uvedené množiny jsou podmnožiny $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, příp. $\mathbb{N}$.

17. Umíte řešit podobné úlohy v $\mathbb{C}$?

18$\flat$**.** Dokažte, že supremum je jediné, pokud existuje.

Najděte suprema, infima, největší a nejmenší prvky (pokud existují a pokud to půjde) následujících podmnožin v $\mathbb{R}$:
19. $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ **20.** $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ **21.** $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Q}\right\}$ **22.** $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{R}\right\}$ **23.** $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ **24.** $\{(-1)^n n : n \in \mathbb{N}\}$ **25.** $\left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ **26.** $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ **27.** $\{n + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ **28.** $\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ **29**$\sharp$**.** $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$
30. $\left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N} \text{ a } n < m\right\}$

$\natural$ Označte množinu z příkladu 30 jako M_0 a analogicky pro libovolné $c \in \mathbb{Z}$ definujte $M_c = \left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N} \text{ a } c < n < m\right\}$. Potom
31. najděte indexy $c \neq d$ tak, aby $M_c = M_d$ **32.** najděte indexy e a f tak, aby $M_e \neq M_f$ **33.** najděte největší a nejmenší prvky, suprema a infima množin M_c v závislosti na c

34. Popište sjednocení a průnik všech intervalů tvaru $(0, \frac{1}{n})$ pro $n \in \mathbb{N}$.

35. Dělejte totéž pro uzavřené intervaly stejného tvaru.

36. Totéž pro intervaly $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, (n, ∞) a pod.

37. Řešte tytéž úlohy pro $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, příp. $\mathbb{R}$.

38$\natural$**.** Vysvětlete, proč je dělení 0 zapovězeno.

Uvědomte si, že nerovnost $|a - b| < c$ pro $a, b, c, \in \mathbb{R}$ znamená právě totéž, co tvrzení „vzdálenost a od b na reálné ose je menší než c“. Pak řešte nerovnosti pro $x \in \mathbb{R}$:

39. $|x+1| \geq x+1$ **40.** $|x+1| \geq |x|+1$ **41.** $|x+1| \geq |x+2|$ **42.** $|3x+1| \geq |x+2|$ **43.** $3x+1 \geq |x| > 3x-1$ **44.** $|x+1|+|x+2| < 12$ **45.** $\big||x+1|-|x+2|\big| \leq 12$ **46.** $\frac{|x+2|}{|x+1|} > 4$ **47.** $\frac{|x+2|}{|3x+1|} \leq 5$ **48.** $|x(1-x)| < 0.05$ **49.** $|x^2-4| > 0$ **50.** $|x^2-4| < 1$ **51.** $|\sin x| \leq 0.5$ **52.** $|\sin^2 x - 1| > 0$ **53.** a podobně...

54♮. Dokažte, že pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}$ platí $|a|-|b| \leq |a-b|$.

55. Pro která a, b platí rovnost?

56. Uvědomte si, že úlohy „popište explicitně množinu $\{x \in \mathbb{R} : x^2+x-6 > 0\}$“ a „řešte nerovnost $x^2+x-6 > 0$ pro $x \in \mathbb{R}$“ jsou úplně stejné. Pak řešte 15 a 16 vzhledem k zadáním 39 až 53.

57♮. Dokažte, že pro každé $0 < a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ existuje jediné číslo $0 < x \in \mathbb{R}$, pro které platí $x^n = a$ a které pak značíme symbolem $\sqrt[n]{a}$.

V následujících příkladech je $k, n \in \mathbb{N}$ a $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro libovolné n platí:
58. $(ab)^n = a^n b^n$ **59.** $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, pokud výrazy smysl dávají **60♭.** $1+2+\ldots+n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ **61.** $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **62♮.** $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n-1}{a-1}$ **63♮.** $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$ **64.** Napište předchozí výsledek jako $\sum \ldots$ **65♮.** $(1+a)^n \geq 1+na$, pro $a > -1$ **66♯.** $n^{n+1} > (n+1)^n$, pokud $n \geq 3$ **67♯.** $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ **68.** $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

69♮. Pro $n \in \mathbb{N}$ je n-tý člen posloupnosti a definován jako $a_n = \frac{n}{n+1}$. Podle definice pojmu limity dokažte, že $\lim a_n = 1$.[1]

Podobně, pro následující posloupnosti dokažte, že $\lim a_n = 0$:
70. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ **71.** $a_n = \frac{1}{n!}$ **72.** $a_n = (-1)^n \cdot 0.999^n$

73. Podobně, pro $a_n = \ln n$ dokažte, že $\lim a_n = \infty$.

74. Podobně, pro $a_n = (-1)^n n$ dokažte, že $\lim a_n$ neexistuje.

75♮. Rozmyslete si, zda platí $\liminf a_n = \lim A_n$, kde $A_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$, a podobně pro lim sup...

♮ Pro posloupnosti a_n, $n \in \mathbb{N}$, najděte $\sup a_n$, $\inf a_n$, $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$, případně $\lim a_n$, pokud existuje:
76. $a_n = 1-\frac{1}{n}$ **77.** $a_n = \frac{10000n}{n^2+1}$ **78.** $a_n = \frac{n^2-20n+5}{4n^3+10n-1}$ **79.** $a_n = (-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)$ **80.** $a_n = n^{(-1)^n}$ **81.** $a_n = \frac{1}{2n}\sin n^2$ **82.** $a_n = 1 + n\sin\frac{n\pi}{2}$ **83.** $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ **84.** $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt[3]{n^6+1}}$ **85.** $a_n = \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+1}}$ **86.** $a_n = \frac{5^n-2^{n+1}}{2^{n+1}-5^{n+2}}$ **87.** $a_n = \frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$ **88.** $a_n = \frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$ **89.** a další podobné příklady z doporučené literatury...

[1] Symbolem $\lim a_n$ se všude rozumí limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, pokud není výslovně řečeno něco jiného.

90. Vymyslete posloupnost, která konverguje k číslu $\frac{1}{90}$.

91♮. Dokažte, že pro každé $0 < a \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$ existuje $\sqrt[c]{a}$, tj. takové číslo $0 < x \in \mathbb{R}$, že $x^n = c$.

92♯. Dokažte, že posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je rostoucí a shora ohraničená a že posloupnost $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ je klesající a ohraničená zdola. Pak ukažte, že obě posloupnosti mají stejnou limitu.[2]

Najděte následující limity:
93. $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ **94.** $\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n}$ **95.** $\lim \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{5n-7}$

96♯. Pro libovolné $k, n \in \mathbb{N}$ definujte $a_{n,k} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$. Spočítejte $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k}$ a pokuste se vyjádřit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k}$.

Pro $a_{n,k}$ z minulého příkladu dokažte:
97. $a_{n,n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ **98♮.** $a_{n,k} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, pro $n > k > 2$

99. Tlak v recipientu vývěvy klesne po jednom zdvihu pístu o 3%. Kolik se může udělat zdvihů, aby tlak neklesl pod 2/3 původní hodnoty?

100♮. Dokažte, že rozumíte paradoxu o Achilovi a želvě: předpokládejte např., že Achiles je 6-krát rychlejší a nechá želvě náskok 60 želvích kroků; spočítejte, jak daleko od startu želvu dohoní.

Poznámky. Seznam příkladů nemusí být úplný a během času se může ještě měnit—sledujte datum na první straně!
Symboly ♯, ♮ a ♭ slouží v textu k označení úloh, které by rozhodně neměly být přehlédnuty buď proto, že se k nim později vracíme, nebo jsou důležité a/nebo zajímavé samy o sobě. Použitý symbol současně naznačuje obtížnost řešení vzhledem k jeho obvyklému významu.
Jinak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > 2$,

[2] Tuto limitu budeme všude dál značit povědomým symbolem e, tj. $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e \doteq 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995 \ldots\ldots\ldots$